УДК 517.988.67

Минимальные ветви решений нелинейных уравнений и асимптотические регуляризаторы[1]

Н.А. Сидоров
Иркутский государственный университет
ул. К. Маркса 1, Иркутск, 664003, Россия
e-mail: sidorov@math.isu.runnet.ru

Получены достаточные условия существования и единственности решений максимального порядка малости нелинейных уравнений, зависящих от параметра. Введены понятия левого и правого асимптотического регуляризатора линейной оператор-функции $B(\lambda)$, отвечающей линеаризации исходного нелинейного уравнения (1). В случае, когда $\lambda = 0$ является фредгольмовой точкой $B(\lambda)$, дан способ построения таких регуляризаторов. На этой основе предложен новый метод последовательных приближений, сходящийся к ветви максимального порядка малости при нулевом начальном приближении. В отличие от работ [5, 6] в этом методе не нужно знать хорошее начальное приближение искомой ветви.

Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства. Рассмотрим уравнение

$$B(\lambda)x = R(x, \lambda) + b(\lambda), \tag{1}$$

где λ принадлежит окрестности нуля линейного нормированного пространства Λ, $B(\lambda)$ — линейная оператор-функция с плотной в E_1 областью определения, не зависящей от λ. Нелинейный оператор $R : \Omega \subset E_1 \times \Lambda \to E_2$ предполагается непрерывным по x и λ и непрерывно дифференцируемым по x в смысле Фреше в окрестности нуля, причем $||R(x, \lambda)|| = O(||x||^l), l > 1$.

Функция $b(\lambda) : \Lambda \to E_2$ непрерывна по λ, причем $||b(\lambda)|| = o(||\lambda||^m)$.

Пусть ω — открытое множество в Λ, замыканию которого принадлежит точка $\lambda = 0$. Такое множество назовем секториальной окрестностью точки $\lambda = 0$ и введем следующее условие

I. $||B^{-1}(\lambda)|| = O\left(\frac{1}{||\lambda||^p}\right)$ при $\omega \ni \lambda \to 0$.

Рассмотрим задачу построения решений $x(\lambda) \to 0$ при $\omega \ni \lambda \to 0$ уравнения (1). Так как в силу условия I. оператор $B(0)$ не является непрерывно

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, грант 2000-15.

обратимым, то уравнение (1) может не иметь малых решений или иметь несколько таких решений различных порядков малости [1, 2, 5, 6].

Определение 1. *Решение $x(\lambda)$ назовем минимальной ветвью, если уравнение (1) не имеет малых решений более высокого порядка малости, чем $||x(\lambda)||$ при $\omega \ni \lambda \to 0$.*

Теорема 1. *Пусть выполнено условие I., причем $m \geq p \cdot \frac{l}{l-1}$. Тогда уравнение (1) имеет в области $\omega_1 \subseteq \omega$ единственную минимальную ветвь $x(\lambda)$. Более того, последовательность $x_m(\lambda)$, где*

$$x_m = B^{-1}(\lambda)(R(x_{m-1}, \lambda) + b(\lambda)), \ \ x_0 = 0,$$

сходится к этой ветви.

В силу оценки I. и неизбежных погрешностей вычислений построение последовательности x_m требует регуляризации [1]. Этот вопрос рассмотрим ниже.

Далее $B(0) \stackrel{def}{=} B_0$ — нормально разрешимый оператор нулевого нётерова индекса (кратко, фредгольмов оператор), $\dim N(B_0) = n \geq 1$. Введем его псевдорезольвенту Шмидта [2]

$$\Gamma = (B_0 + \sum_1^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i)^{-1}$$

и обозначение $A(\lambda) \stackrel{def}{=} B(\lambda) - B_0$. Здесь γ_i и z_i биортогональны к базисным элементам $\varphi_i \in N(B_0)$ и $\psi_i \in N(B_0^*)$ соответственно.

Пусть

II. $||A(\lambda)x|| \leq a(\lambda)(||x|| + b||B_0 x||)$,

где $a(\lambda) \to 0$ при $\omega \ni \lambda \to 0$, b — *const.*

Тогда $A(\lambda)\Gamma$ — непрерывная оператор-функция и оператор $I - A(\lambda)\Gamma$ непрерывно обратим в области $\omega_1 \subseteq \omega$, где $||A(\lambda)\Gamma|| < 1$.

Пусть

III. $\det\langle (I - A(\lambda)\Gamma)^{-1} A(\lambda)\varphi_i, \psi_n \rangle \sim c||\lambda||^\alpha$.

Если $A(\lambda)\Gamma$ достаточно гладок относительно λ и

$$\det\langle \sum_{j=0}^{p-1} (A(\lambda)\Gamma)^j A(\lambda)\varphi_i, \psi_k \rangle \sim c||\lambda||^\alpha,$$

где $p \geq \alpha$, то условие III. будет выполнено.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия II, III. Тогда условие I будет выполнено с порядком p.*

Далее $B(\lambda) = B_0 - \lambda B_1$, где $\lambda \in R^1$, $||B_1 x|| \leq a(||x|| + b||B_0 x||)$, B_0 — фредгольмов.

Пусть

IV. Элементы $\{\varphi_i^{(k)}\}, i = \overline{1,n}, k = \overline{1,p_i}$ образуют полный B_1-жорданов набор оператора B_0, а функционалы $\{\psi_i^{(k)}\}, i = \overline{1,n}, k = \overline{1,p_i}$ образуют полный B_1^*-жорданов набор оператора B_0^* (см. [2]).

Тогда условие I будет выполнено в проколотой окрестности точки $\lambda = 0$ с порядком $p = \max(p_1, \dots, p_n)$ и применима теорема 1. Покажем, что в этом случае можно построить регуляризованный метод последовательных приближений для вычисления минимальной ветви, не требующий обращения оператора $B(\lambda)$.

Определение 2. *Линейный оператор* $\Gamma(\lambda)$, *определенный при* $\lambda \in \omega$, *есть левый асимптотический регуляризатор оператора* $B(\lambda)$, *если* $\lim\limits_{\omega \ni \lambda \to 0} \Gamma(\lambda) B(\lambda) x = x$ *при* $\forall x \in D(B)$.

Аналогичным образом вводится правый асимптотический регуляризатор оператора $B(\lambda)$.

Лемма 2. *Пусть* $B(\lambda) = B_0 - \lambda B_1$ *и выполнено условие IV. Тогда операторы*

$$\Gamma_l(\lambda) \overset{def}{=} \Gamma - \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{p_i} \frac{1}{\lambda_s} \langle \cdot, \psi_i^{(p_i+1-s)} \rangle \varphi_i^{(1)},$$

$$\Gamma_r(\lambda) \overset{def}{=} \Gamma - \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{p_i} \frac{1}{\lambda_s} \langle \cdot, \psi_i^{(1)} \rangle \varphi_i^{(p_i+1-s)}$$

будут соответственно левым и правым асимптотическим регуляризаторами оператора $B(\lambda)$.

Доказательство следует из операторных тождеств

$$\Gamma_l(\lambda)(B_0 - \lambda B_1) = I - \lambda \Gamma B_1,$$

$$(B_0 - \lambda B_1)\Gamma_r(\lambda) = I - \lambda B_1 \Gamma.$$

Теорема 2. *Пусть* $B(\lambda) = B_0 - \lambda B_1$, $||R(x, \lambda)|| = O(||x||^l)$, $||b(\lambda)|| = o(|\lambda|^m)$, *выполнено условие IV,* $p = \max(p_1, \dots, p_n), m \geq p\frac{l}{l-1}$.

Тогда уравнение (1) имеет единственную минимальную ветвь решений $x(\lambda)$. *Порядок малости этой ветви больше чем* $\frac{p}{l-1}$.

Последовательность $x_n = \lambda^{p/(l-1)} u_n$, *где* u_n — *решение линейного уравнения*

$$(I - \lambda \Gamma B_1) u_n = \lambda^{-p/l-1} \Gamma_l(\lambda)(R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)),$$

$$u_0 = 0, n = 1, 2, \dots$$

сходится к минимальной ветви в окрестности точки $\lambda = 0$.

Доказательство использует разложение пространств E_1, E_2, лемму Шмидта [2] и работу [6].

Следствие. Пусть в условиях теоремы 2 $\langle B_1 \varphi_i, \psi_u \rangle = \delta_{ik}$, $i, k = 1, \dots, n$, где $\{\varphi_i\}_1^n$ — базис в $N(B_0), \{\psi_i\}_1^n$ — базис в $N(B_0^*)$. Тогда $p = 1$ и последовательность $x_n = \lambda^{1/l-1} u_n$, где

$$(B_0 + \sum_1^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i - \lambda B_1) u_n = \lambda^{-\frac{1}{l-1}} (I - \frac{1}{\lambda} \sum_1^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i)(R(x_{n-1}, \lambda) + b(\lambda)),$$

$$u_0 = 0,\ n = 1, 2, \dots$$

сходится к минимальной ветви решений.

В дополнение рассмотрим дифференциальный оператор

$$L\left(\frac{d}{dt}\right) = \frac{d}{dt}B_0 - B_1,$$

где B_0 — фредгольмов оператор, $\dim N(B_0) = n \geq 1$. Этот оператор не разрешен относительно производной и в этом смысле сингулярен. Лемма 2 позволяет его регуляризовать. Действительно, по аналогии с леммой 2, при условии IV введем оператор

$$\Gamma_l(\frac{d}{dt}) = \Gamma - \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\frac{d^k}{dt^k}\langle\cdot, \psi_i^{(k)}\rangle\varphi_i^{(1)}.$$

Тогда будет выполнено операторное тождество

$$\Gamma_l(\frac{d}{dt})(\frac{d}{dt}B_0 - B_1) = \frac{d}{dt} - \Gamma B_1,$$

где справа оператор разрешен относительно производной. Поэтому оператор $\Gamma_l(\frac{d}{dt})$ естественно назвать левым регуляризатором сингулярного оператора $L(\frac{d}{dt})$. Аналогично вводится его правый регуляризатор. Отметим, что в выражении $L(\frac{d}{dt})$ вместо оператора дифференцирования мог бы стоять любой другой оператор, перестановочный с B_0 и B_1. Регуляризаторы $\Gamma_l(\frac{d}{dt})$ можно применить при исследовании вырожденных дифференциально – операторных уравнений с вырождением [3, гл. 4], [7]. Полезны они и при решении бифуркационных задач для систем Власова-Максвелла [4].

Список литературы

[1] Лаврентьев М.М., Савельев П.Я. Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики. 1999.

[2] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука. 1969.

[3] Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та. 1982.

[4] Sidorov N., Loginov B. et al. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ. 2002.

[5] Сидоров Н.А.// Известия вузов. Математика. 2001. N 9 (472). С. 59-65.

[6] Сидоров Н.А. // Мат. сборник. 1995. Т. 186. N 2. С. 129-141.

[7] Свиридюк Г.А. // Успехи мат. наук. 1994. Т. 49. N 4. С. 47-74.