Министерство образования и науки Российской Федерации

ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.968.2

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Решение линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-гладкими ядрами, возникающих в моделировании развивающихся динамических систем

Д. Н. СИДОРОВ

В пособии излагается методика построения параметрических семейств непрерывных и обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода с разрывными ядрами, возникающих при моделировании развивающихся динамических систем. Описан аналитико-численный метод для регулярного случая, когда характеристическое уравнение не имеет натуральных корней и решение интегрального уравнения единственное. В нерегулярном случае характеристическое уравнение имеет натуральные корни, а решение рассматриваемого интегрального уравнения содержит произвольные постоянные. Изложены теоремы существования решений и строится их асимптотика. Метод применен для скалярного, матричного и операторного уравнения Вольтерра. Теоретические результаты иллюстрируются численными расчетами на тестовых примерах.

Пособие предназначено для магистрантов и аспирантов, специализирующихся а области прикладной и фундаментальной математики.

ИРКУТСК 2012

Введение

Систематические исследования в области математического моделирования развития электроэнергетических систем (ЭЭС) ведутся в России вот уже около полувека. В результате создана методология математического моделирования ЭЭС и ее объектов и др. В последнее десятилетие XX века экономика России претерпела радикальные изменения, которые потребовали разработки новых подходов к прогнозированию развития электроэнергетики. В связи с этим, высока актуальность исследования возможных изменений таких важных параметров, как структура электроэнергетики, сроки службы оборудования, учет предыстории развития [2-4].

Модели, учитывающие возрастную структуру ЭЭС, весьма немногочисленны. Отметим, прежде всего, публикацию [1], в которой автор применил метод линейного программирования для оптимизации вводов мощностей крупной энергосистемы (на примере Германии) с разделением по видам топливных ресурсов.

Цель данного методического пособия - описать интегральный подход к моделированию развивающихся систем. Рассматриваемая интегральная модель основана на применении моделей В.М. Глушкова к решению задач, связанных с развитием электроэнергетических систем.

В [1-4, 21] сформулированы различные постановки задач развития макроэкономической системы, учитывающие ее технологическую структуру, а также показаны пути дальнейшего обобщения этих задач.

Рассмотрим применение модели Глушкова для моделирования развития крупной ЭЭС. При этом считается, что вся выпущенная продукция направляется потребителю. В данной работе предполагается, что все виды оборудования имеют одинаковый срок службы (без подразделения на типы станций). Поэтому модель развития ЭЭС записывается как односекторный вариант модели Глушкова

$$\int_{t-c(t)}^{t} \mu(t,s)x(s)ds = p(t), \ \ t \in [t_0, T],$$

при условии

$$x(t) = x^0(t), t \in [t_0 - c(t_0), t_0).$$

Здесь

$x(t)$ - суммарный (по типам станций) ввод электрических мощностей в момент t;

$\mu(t,s) \equiv \mu(t-s)$ - коэффициент интенсивности использования в момент t единицы мощности, введенной ранее в момент s;

$p(t)$ - экспертно задаваемая на перспективу динамика электропотребления (электрической нагрузки);

$c(t)$ - срок жизни самого старого в момент t энергоблока в ЭЭС;

$x^0(t)$ - известная динамика ввода мощностей на предыстории $[t_0 - c(t_0), t_0)$.

На базе этой модели можно ставить различные задачи, например, задачу прогноза развития ЭЭС ($x(t)$ - искомые вводы).

Заметим, что для решения задачи прогноза необходимо знание вводов мощностей на предыстории $[t_0 - c(t_0), t_0]$. Если рассматривать развитие системы с момента её создания, то сформулированную задачу можно переписать в виде

$$\int_0^{a_1(t)} \mu_1(t,s)x(s)ds + \int_{a_1(t)}^{a_2(t)} \mu_2(t,s)x(s)ds + \cdots$$

$$+ \int_{a_{n-1}(t)}^{t} \mu_n(t,s)x(s)ds = p(t), \;\; t \in [0,T],$$

где на разных участках жизни системы свой коэффициент интенсивности использования мощностей $\mu_i(t,s)$.

Здесь для единственности решения необходимо задание правой части в начальной точке. Естественно предположить, что в момент создания системы электрическая нагрузка $p(0) = 0$.

Заметим, что полученное уравнение - уравнение Вольтерра I рода с кусочно-непрерывным ядром, что приводит нас к рассмотрению совершенно иного пласта задач. Рассмотрению которого и посвящено данное пособие.

1.1. Метод построения решений линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами, возникающих в моделировании развивающихся динамических систем

1.1.1. Скалярный случай

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\int_{\alpha_0 t}^{\alpha_n t} K(t,s)x(s)ds = f(t), 0 < t \leq T, \tag{1}$$

где ядро, допускающее на прямых $s = \alpha_i t, i = \overline{1,n}$ разрывы первого рода, определено формулой

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & \alpha_0 t \leq s < \alpha_1 t, \\ K_2(t,s), & \alpha_1 t \leq s < \alpha_2 t, \\ \quad \dots & \quad \dots \dots \\ K_n(t,s), & \alpha_{n-1} t \leq s \leq \alpha_n t, \end{cases} \tag{2}$$

$$0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n \leq 1.$$

Функции $K_i(t,s), i = \overline{1,n}, f(t)$ --- непрерывны и достаточно гладкие, $f(0) = 0$. Интегральные уравнения с разрывными ядрами представляют теоретический интерес и возникают во многих физических и биологических моделях, в частности, в моделировании развивающихся динамических систем электроэнергетики. Решения уравнений (1) могут содержать произвольные постоянные и быть неограниченными при $t \to 0$. Например, если

$$K(t,s) = \begin{cases} 1, 0 \leq s < t/2, \\ -1, t/2 \leq s \leq t, \end{cases} \tag{3}$$

$f(t) = t,$ то уравнению (1) удовлетворяет функция $x(t) = c - \frac{\ln t}{\ln 2},$ где c - const.

В данном разделе пособия мы сформулируем способ построения при $0 < t \leq T$ непрерывных решений уравнения (1) вида

$$x(t) = x^N(t) + t^N u(t), \tag{4}$$

где $x^N(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(\ln t)t^i$. Непрерывная функция $x^N(t)$ имеет при $t \to +0$ конечный или бесконечный предел, $\lim_{t\to+0} u(t) = 0$. Для конкретности предполагается, что $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = 1$. Коэффициенты $x_i(\ln t)$ строятся в виде полиномов по степеням $\ln t$ и могут зависить от определенного числа произвольных постоянных. При построении коэффициентов используется информация о корнях определенного алгебраического уравнения (14) и коэффициентах полиномов Тейлора в точке $t = 0, s = 0$ функций $f(t),\ K_i(t,s), i = 1, \ldots, n$. Число N определяет требуемую гладкость этих функций.

Сформулируем способ построения функции $u(t)$ в представлении искомого решения (4) последовательными приближениями, равномерно сходящимися на промежутке $[0, T]$.

1.1.1.1. Структура решения и теорема существования

Введем условия:

A. Функции $K_i(t,s), i = \overline{1,n}$ непрерывны, имеют непрерывные производные $\frac{\partial K_i(t,s)}{\partial t}$ с конечными пределами на границах областей своего определения

$$D_i = \{t, s | \alpha_i t \leq s < \alpha_i t\}.$$

B. $K_n(t,t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$ и N выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{0\le t\le T} |K_n(t,t)|^{-1} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^{1+N}|K_i(t,\alpha_i t)| + \alpha_{i-1}^{1+N}|K_i(t,\alpha_{i-1}t)|\right) \le 1+q, \quad (5)$$

где $q < 1$, $\alpha_0 = 0, \alpha_n = 1$.

В частности, условие **A** будет выполнено, если функции $K_i(t,s)$ допускают непрерывно-дифференцируемые по t продолжения в область $-\varepsilon < s \le t < T, \varepsilon > 0$. Условие **B** при достаточно большом N выполняется, т.к. $\alpha_i \in (0,1)$ при $i = \overline{1, n-1}$

Лемма 1.1.1.

Пусть выполнены условие **A, B.** Тогда в пространстве $\mathbb{C}_{[0,T]}$ однородное уравнение

$$\int_0^t K(t,s)s^N u(s)ds = 0 \quad (6)$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Дифференцируя уравнение (6), перейдем к эквивалентному интегро-функциональному уравнению

$$Lu + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}t}^{\alpha_i t} \frac{K_i'(t,s)}{K_n(t,t)}(s/t)^N u(s)ds = 0. \quad (7)$$

Здесь

$$Lu = \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_i^{1+N} K_i(t,\alpha_i t)u(\alpha_i t) - \alpha_{i-1}^{1+N} K_i(t,\alpha_{i-1}t)u(\alpha_{i-1}t)\right)(K_n(t,t))^{-1}.$$

В силу условий **A, B** в пространстве $\mathbb{C}_{[0,T]}$ справедлива оценка

$$||Lu - u|| \le q||u||.$$

Поэтому на основании теоремы об обратном операторе с учетом неравенств

$0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n=1$ существует ограниченный обратный оператор $L^{-1}\in\mathcal{L}(\mathbb{C}_{[0,\pi]}\to\mathbb{C}_{[0,\pi]})$. При этом

$$||L^{-1}||\leq\frac{1}{1-q} \tag{8}$$

и уравнение (6) приводится к виду

$$u(t)=-L^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}t}^{\alpha t}\frac{K_i'(t,s)}{K_n(t,t)}(s/t)^N u(s)ds\equiv Au, \tag{9}$$

$0\leq t\leq T$. Введем в пространстве $\mathbb{C}_{[0,T]}$ эквивалентную норму $||u||=\max\limits_{0\leq t\leq T}e^{-lt}|u(t)|, l>0$. В этой норме неравенство (8) сохранится и при достаточно большом l оператор A будет сжимающим, т.к. $||A||\leq\frac{1}{1-q}m(l)$, где $m(l)\to 0$ при $l\to+\infty$. Следовательно, однородное уравнение имеет только тривиальное решение.

Следствие 1.1.1. Пусть выполнены условия Леммы 1.1.1, $g(t)\in\mathbb{C}_{[0,T]}^{(1)}, g(0)=0, |g'(t)|=o(t^N)$ при $t\to+0$. Тогда неоднородное уравнение $\int_0^t K(t,s)s^N u(s)ds=g(t)$ в классе $\mathbb{C}_{[0,T]}$ имеет единственное решение $u(t)$, причем $u(t)\to 0$ при $t\to+0$.
Доказательство очевидно, т.к. дифференцируя это уравнение можно перейти к эквивалентному уравнению

$$u(t)=Au+t^{-N}L^{-1}g'(t) \tag{10}$$

со сжимающим оператором A и непрерывной свободной функцией.

Теорема 1.1.1. Пусть в пространстве функций непрерывных на $(0,T]$ и имеющих конечный или бесконечный предел при $t\to+0$ (кратко, в классе $\mathbb{C}_{(0,T]}$), существует функция $x^N(t)$ такая, что при $t\to+0$

$$\left(-\int_0^t K(t,s)x^N(s)ds+f(t)\right)'=o(t^N),$$

$f(t) \in \mathbb{C}^{(1)}_{[0,T]}, f(0) = 0.$ Тогда уравнение (1) в классе $\mathbb{C}_{(0,T]}$ имеет решение

$$x(t) = x^N(t) + t^N u(t), \tag{11}$$

где функция $u(t) \in \mathbb{C}_{[0,T]}$, $u(t) \to 0$ при $t \to +0$ и строится единственным образом методом последовательных приближений.

Доказательство вытекает из следствия 1.2.1. Действительно, с помощью замены (11) уравнение (1) преобразуется к уравнению

$$\int_0^t K(t,s)s^N u(s)ds = g(t), \tag{12}$$

где функция

$$g(t) = -\int_0^t K(t,s)x^N(s)ds + f(t) \tag{13}$$

удовлетворяет условию следствия 1. Поэтому в представлении (11) функция $u(t)$ строится последовательными приближениями единственным образом из уравнения (10) при любом начальном приближении.

Определение 1.1.1. Уравнение (12) назовем регуляризацией уравнения (1), а функцию $x^N(t)$ асимптотическим приближением решения (11) уравнения (1)

.

Введение этого определения мотивировано тем, что функцию $u(t)$ можно строить, решая уравнение (12) численно, используя хорошо исследованные квадратурные схемы. Способ построения асимптотических приближений $x^N(t)$ в решении (12) рассмотрим ниже.

1.1.1.2. Построение асимптотического приближения решения

Пусть наряду с условиями **A, B**, выполнено условие

С. Для функций $K_i(t,s), i=\overline{1,n}, f(t)$, при $t \to +0, s \to +0$, построены асимптотические приближения N- го порядка (полиномы Тейлора), т.е.

$$K_i(t,s) = \sum_{n+m=0}^{N} K_{imn} t^m s^n + o((t+s)^N),$$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} f_i t^i + o(t^N),$$

где N выбирается согласно условию **В**.

Введем вспомогательное алгебраическое уравнение относительно j из $\mathbb{N} \cup \{0\}$

$$L(j) = \sum_{i=1}^{n} K_i(0,0)(\alpha_i^{1+j} - \alpha_{i-1}^{1+j}) = 0 \qquad (14)$$

и назовем его характеристическим уравнением интегрального уравнения (1). Так как $f(0) = 0$, то уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i K_i(t, \alpha_i t) x(\alpha_i t)) - \alpha_{i-1} K_i(t, \alpha_{i-1} t) x(\alpha_{i-1} t))) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1} t}^{\alpha_i t} K_i'(t,s) x(s) ds = f'(t)$$

эквивалентно уравнению (1).

Будем искать асимптотическое приближение его решения в виде полинома $x^N(t) = \sum_{j=0}^{N} x_j(\ln t) t^j$.

Методом неопределенных коэффициентов с учетом неравенств $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_n = 1$ составим рекуррентную последовательность разностных уравнений относительно коэффициентов $x_j(z)(z = \ln t)$:

$$K_n(0,0) x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j} (K_i(0,0) -$$

$$- K_{i-1}(0,0)) x_j(z + a_i) = M_j(x_0, \dots, x_{j-1}). \qquad (15)$$

Здесь $j = \overline{0,N}, a_i = \ln\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$, $M_0 = f'(0)$, $M_j(x_0, \dots, x_{j-1}), j = \overline{1,N}$ выражаются определенным образом через коэффициенты полиномов Тейлора из условия **C** и коэффициенты $x_0(z), \dots, x_{j-1}(z)$.

Будем искать решение соответствующих однородных разностных уравнений в виде $x = \lambda^z$. Подставляя функцию λ^z в однородные разностные уравнения, получим $N+1$ характеристических уравнений для разностных уравнений (15):

$$P_j(\lambda) \equiv K_n(0{,}0) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0{,}0) - K_{i+1}(0{,}0))\lambda^{a_i} = 0,\ j = \overline{0, N}. \quad (16)$$

Справедливо

Свойство 1.1.1. $\lambda = 1$ удовлетворяет j-му уравнению (16) тогда и только тогда, когда j удовлетворяет характеристическому уравнению (14) интегрального уравнения (1). Более того, кратность корня j уравнения (14) равна r_j тогда и только тогда, когда

$$L(j) = \sum_{i=1}^{n} K_i(0{,}0)(\alpha_i^{1+j} - \alpha_{i-1}^{1+j}) = 0, \quad (17)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0{,}0) - K_{i+1}(0{,}0))a_i^l = 0, l = \overline{1, r_j - 1}, \quad (18)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_i(0{,}0) - K_{i+1}(0{,}0))a_i^{r_j} \neq 0,$$

где $\alpha_0 = 0, \alpha_n = 1, a_0 = 0, a_n = 0, a_i = \ln\alpha_i, i = \overline{1, n-1}$, При этом кратность $r_j \le n - 1$. Доказательство вытекает из тождества

$$\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{1+j}(K_{i+1}(0{,}0) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_{i-1}^{1+j} K_i(0{,}0)) \quad (19)$$

и структуры уравнений (14), (16).

Если предположить, что при некотором j кратность $r_j \ge n$, то $K_1(0{,}0) = K_2(0{,}0) = \dots = K_{n-1}(0{,}0) = K_n(0{,}0)$ т.к. $\det||a_i^l||_{i,l=\overline{1,n}} \neq 0$. Но тогда в силу (17) $K_n(0{,}0) = 0$, что противоречит условию **B.**

При выполнении условий **A, B, C** возможны два случая.

Регулярный случай.

Пусть $L(j) \neq 0, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда $\lambda = 1$ не удовлетворяет ни одному из уравнений в последовательности (16). Все коэффициенты x_i асимптотики $x^N = \sum_{i=0}^{N} x_i t^i$ определятся однозначно методом неопределенных коэффициентов и от $\ln t$ не зависят.

Из изложенного вытекает

Теорема 1.1.2. Пусть выполнены условия **A**, **B**, **C** и $L(j) \neq 0, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тогда уравнение (1) имеет в $\mathbb{C}_{[0,T]}$ решение $x(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i t^i + t^N u(t)$, где x_i определяются однозначно методом неопределенных коэффициентов, а функция $u(t)$ строится затем однозначно последовательными приближениями, или численно из уравнения (12).

1.1.1.3. Нерегулярный случай

Пусть $L(j) = 0$ только при $j \in \{j_1, \dots, j_k\} \subset \{0,1, \dots, N\}$ и при этом кратность корня $\lambda = 1$ соответствующего уравнения последовательности (16) равна r_j. Пусть в j-ом разностном уравнении (15) правая часть $M_j(z)$ оказалась полиномом от z порядка $n_j \geq 0$.

Тогда в нерегулярном случае, т.е. при $r_j \geq 1$, частное решение j-го уравнение (15) надо искать в виде полинома $\hat{x}(z) = \sum_{i=rj}^{n_j + r_j} c_i z^i$. Коэффициенты c_i этого полинома вычисляются методом неопределенных коэффициентов последовательно, начиная со старшего $c_{n_j + r_j}$. Коэффициент $x_j(z)$ искомого асимптотического приближения x^N в этом случае имеет вид

$$x_j(z) = c_0 + c_1 z + \dots + c_{r_{j-1}} + \hat{x}(z).$$

В нерегулярном случае, когда $r_j \geq 1$, постоянные $c_0, \dots, c_{r_j - 1}$ останутся произвольными, т.к. тогда функции $z^i, i = 0,1, \dots, r_j - 1$ удовлетворят j-му однородному разностному уравнению, отвечающему (15).

На практике, используя свойство 1.1.1., коэффициент $x_j(z)$ в нерегулярном случае можно строить непосредственно в виде полинома $\sum_{i=0}^{n_j + r_j} c_i z^i$, определяя последовательно $c_{n_j + r_j}, \dots, c_0$ методом неопределенных коэффициентов. При этом числа $c_{r_j - 1}, \dots, c_0$ останутся произвольными. Таким образом, в нерегулярном случае, когда $L(j) = 0$ при натуральном j, при определении коэффициента $x_j(z)$ появляются r_j новых произвольных постоянных. Порядок полинома $x_j(z)$ на величину кратности r_j корня $\lambda = 1$ j-го уравнения (16) станет больше порядка n_j правой части соответствующего уравнения (15), то есть порядка полинома $M_j(z)$.

Из выше изложенного вытекает

Основная теорема 1.1.1.2. Пусть выполнены условия **A, B, C.** Пусть характеристическое уравнение $L(j) = 0$ интегрального уравнения (1) имеет в $\mathbb{N} \cup \{0\}$ ровно k корней $\{j_1, \dots, j_k\}$. Пусть при этом корень $\lambda = 1$ j-го уравнения (16) имеет кратность r_j. Тогда уравнение (1) имеет непрерывное решение

$$x = \sum_{i=0}^{N} x_i(\ln t) t^i + t^N u(t), \tag{20}$$

которое зависит от $p = r_1 + \dots + r_k$ произвольных постоянных. Более того, коэффициенты x_i асимптотического приближения $x^N(t)$ являются полиномами от $\ln t$ возрастающих порядков, не превосходящих p. Функция

$u(t)$ по вычисленному асимптотическому приближению с фиксированными постоянными строится последовательными приближениями, равномерно сходящимися при $t \in [0, T]$, либо численно из уравнения (12)

Замечание 1.1.1. Если $L(0) = 0$, то в решении (20) $x_0 = const + a\ln t$, a -- определенная постоянная. Если $a \neq 0$, то $\lim_{t \to +0} x(t) = \infty$ и $x \in \mathbb{C}_{(0,T]}$.

Замечание 1.1.2. Изложенные результаты допускают обобщение в случае, когда в уравнении ((1)) при $\alpha_{i-1}(t) \leq s \leq \alpha_i(t)$, $K(t,s) = K_i(t,s)$, где $\alpha_i(0) = 0$, $0 \leq \alpha_0'(0) < \alpha_1'(0) < \cdots < \alpha_n'(0) \leq 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Замечание 1.1.3. Если $n = 2$ (ядро $K(t,s)$ имеет один разрыв), то характеристическое уравнение (14) имеет не более одного корня. В этом случае коэффициенты x_i в представлении (20) зависят линейно от $\ln t$.

Пример 1.2.1. Уравнение

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = t, \quad 0 < t < \infty, \tag{21}$$

где

$$K(t,s) = \begin{cases} 1 + t - 2s, & 0 \leq s < t/2, \\ -1, & t/2 \leq s \leq t, \end{cases} \tag{22}$$

удовлетворяет условиям основной теоремы. Соответствующее характеристическое уравнение (14) имеет вид

$$L(j) \equiv (\tfrac{1}{2})^{1+j} - (1 - (\tfrac{1}{2})^{1+j}) = 0.$$

Очевидно $j = 0$ --- его простой единственный корень. Поэтому разложение (20) решения интегрального уравнения (21) должно содержать $\ln t$ только в первой степени, т.е. решение раскладывается в ряд

$$\hat{x}(t) = \ln t \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n.$$

Методом неопределенных коэффициентов получим, что $a_0 = a_1 = -1/\ln 2, b_1 = 2 + 1/\ln 2$,

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n! \prod_{k=2}^{n} (1-2^k) \ln 2}, n = 2,3, \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{1-2^n} \{a_n \ln 2 + a_{n-1} \frac{1}{n} (\ln 2 + \frac{1}{n+1}) - b_{n-1} \frac{1}{n}\}, n = 2,3, \ldots.$$

Соответствующему однородному интегральному уравнению удовлетворяет функция

$$\phi(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! \prod_{k=1}^{n} (2^k-1) \ln 2} t^n.$$

Ряды в представлении (23) сходятся при $0 \leq t < \infty$. Поэтому интегральное уравнение (21) при $0 \leq t < \infty$ имеет решение $x(t) = c\phi(t) + \hat{x}(t)$, зависящее от произвольной постоянной c.

1.1.2. Решение систем интегральных уравнений с разрывными ядрами

Рассмотрим систему интегральных уравнений

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad 0 < t \leq T. \tag{23}$$

Предполагается, что матричное ядро $K(t,s)$ размерности $m \times m$ имеет на компакте $0 \leq s \leq t \leq T$ разрывы первого рода на кривых $s = \alpha_i(t),\ i = 1, \dots, n-1$. Таким образом,

$$K(t,s) = \begin{cases} K_1(t,s), & 0 \leq s \leq \alpha_1(t) \\ K_2(t,s), & \alpha_1(t) < s \leq \alpha_2(t) \\ \dots\dots & \\ K_n(t,s), & \alpha_{n-1}(t) < s \leq t, \end{cases} \tag{24}$$

$\mathrm{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))'$, $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))'$. Матрицы $K_i(t,s)$ --- размерности $m \times m$ определены, непрерывны и имеют непрерывные производные по t в соответствующих областях $D_i = \{(s,t) | \alpha_{i-1}(t) < s \leq \alpha_i(t)\}$, $i = 1, \dots, n$, $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n(t) = t$. Функции $f_i(t)$, $\alpha_i(t)$ имеют непрерывные производные, $f_i(0) = 0,\ \alpha_i(0) = 0,\ 0 < \alpha'_1(0) < \alpha'_2(0) < \dots < \alpha'_{n-1}(0) < 1,\ 0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \dots < \alpha_{n-1}(t) < t$ при $t \in (0,T]$. Требуется построить непрерывные решения уравнения в случае матричного ядра при $t \in (0, T']$, где $0 < T' \leq T$, $\lim\limits_{t \to +0} x(t)$ может быть и бесконечным. Предполагается, что каждая из матриц $K_i(t,s),\ i = 1, \dots, n$ имеет непрерывно дифференцируемое по t продолжение в область $0 \leq s \leq t \leq T$. Однородная система может иметь нетривиальные решения. Дифференцирование по t системы (61) с разрывными ядрами, в отличие от классического случая, приводит к новому классу интегральных уравнений Вольтерра с функционально-возмущенным аргументом. Поэтому стандартные методики к системе (61) не применимы и исследование систем с разрывными ядрами вида представляет теоретический интерес.

1.1.2.1. Построение асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ решений неоднородной системы

Пусть выполнено условие

A. Существуют матрицы $\mathcal{P}_i = \sum_{\nu+\mu=0}^{N} K_{i\nu\mu} t^\nu s^\mu,\ i = 1, \dots, n$, вектор-функция $f^N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu t^\nu$, полиномы $\alpha_i^N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{i\nu} t^\nu,\ i = 1, \dots, n-1$, где $0 < \alpha_{11} < \alpha_{21} < \dots < \alpha_{n-1,1} < 1$, такие, что при $t \to +0,\ s \to +0$ справедливы оценки $K_i(t,s) - \mathcal{P}_i(t,s) = \mathcal{O}((t+s)^{N+1}),\ i = 1, \dots, n,\ f(t) - f^N(t) = \mathcal{O}(t^{N+1}),\ \alpha_i(t) - \alpha_i^N(t) = \mathcal{O}(t^{N+1}),\ i = 1, \dots, n-1.$

Разложения по степеням t, s, представленные в условии **A**, далее будем называть "полиномами Тейлора" соответствующих элементов.

Введем матрицу

$$B(j) = K_n(0,0) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} (\mathrm{K}_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))$$

и алгебраическое уравнение

$$L(j) \overset{\text{def}}{=} \det B(j) = 0.$$

Назовем его *характеристическим уравнением* системы интегральных уравнений (23) ядрами вида (24). Так как $f(0) = 0$, матрицы $K_i(t,s)$ и вектор $f(t)$ имеют непрерывные производные по t, то дифференцирование обеих частей системы (23) приводит к эквивалентной системе интегро-функциональных уравнений

$$\begin{aligned} F(x) \overset{\text{def}}{=} {} & K_n(t,t)x(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)\{K_i(t,\alpha_i(t)) - \\ & -\mathrm{K}_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}x(\alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t,s)x(s)ds - f'(t) = 0, \end{aligned} \qquad (25)$$

где $\alpha_0 = 0,\ \alpha_n(t) = t$. Мы не предполагаем, что однородная система имеет только тривиальное решение. Поэтому и указанная однородная интегро-функциональная система может иметь нетривиальные решения. Будем искать асимптотическое приближение частного решения неоднородного уравнения в виде полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=0}^{N} x_j(\ln t)t^j. \tag{26}$$

Покажем, что коэффициенты x_j в общем нерегулярном случае зависят от $\ln t$ и свободных параметров, что согласуется с возможностью существования нетривиальных решений у однородной системы.

При вычислении коэффициентов x_j возможны регулярный и нерегулярный случаи.

Регулярый случай.. $L(j) \neq 0,\ j \in \{0,1,\dots,N\}$. В этом случае коэффициенты x_j будут постоянными векторами из $\mathbb{R}^m$. Действительно, подставляя разложение (26) в систему (8), методом неопределенных коэффициентов с учетом условия **A**, приходим к рекуррентной последовательности линейных систем алгебраических уравнений (СЛАУ) относительно векторов x_j:

$$B(0)x_0 = f'(0), \tag{27}$$

$$B(j)x_j = M_j(x_0,\dots,x_{j-1}), \quad j = 1,\dots,N. \tag{28}$$

Вектор M_j выражается определенным образом через решения $x_0,\dots,x_{j-1}$ предыдущих систем и коэффициенты " полиномов Тейлора" из условия **A**.

Так как в регулярном случае $\det B(j) \neq 0$, то векторы $x_0,\dots,x_N$ определяются единственным образом и асимптотика будет построена.

Нерегулярый случай. Уравнение $L(j) = 0$ *имеет целочисленные корни.*

Определение 1.1.2.1. *Число* j^* *--- регулярная точка матрицы* $B(j)$*, если матрица* $B(j^*)$ *обратима.*

Определение. 1.1.2.2. *Число* j^* *--- простая особая точка матрицы* $B(j)$*, если* $detB(j^*) = 0$*,* $det[(B^{(1)}(j^*)\phi_i, \psi_k)]_{i,k=1}^r \neq 0$*, где* $\{\phi_i\}_1^r$ *--- базис в* $N(B(j^*))$*,* $\{\psi_i\}_1^r$ *--- базис в* $N(B'(j^*))$*,* $B'(j^*)$ *--- транспонированная матрица,* $B^{(1)}(j)$ *-- производная матрицы по* j*.*

Определение 1.1.2.3. *Точку* j^* *назовем* $(k+1)$*-кратной особой точкой матрицы* $B(j)$*, если* $detB(j^*) = 0$*, призводные* $B^{(1)}(j^*), \dots, B^{(k)}(j^*)$ *--- нулевые матрицы,*

$$\det[(B^{(k+1)}(j^*)\phi_i, \psi_k)]_{i,k=1}^r \neq 0,$$

$k \geq 1$, $\{\phi_i\}_1^r$ --- базис в $N(B(j^*))$, $\{\psi_i\}_1^r$ --- базис в $N(B'(j^*))$.

Отметим, что $B^{(k)}(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))$, где $a_i = \ln\alpha_i'(0)$. Покажем, что в нерегулярном случае коэффициенты x_j будут полиномами по степеням $\ln t$ и зависят от произвольных постоянных. Порядок полиномов и число произвольных постоянных связаны с кратностью особых точек матриц $B(j)$ и рангами этих матриц.

Действительно, так как коэффициент x_0 в нерегулярном случае может зависеть от $\ln t$, то на основании метода неопределенных коэффициентов x_0 следует искать как решение разностной системы

$$K_n(0,0)x_0(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(0)(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_0(z + a_i) = f'(0), \quad (29)$$

где $a_i = \ln\alpha'(0)$, $z = \ln t$.

Здесь возможны три случая.

Случай 1. $L(0) \neq 0$, т. е. $\det B(0) \neq 0$. Тогда коэффициент x_0 от z не зависит и определится единственным образом из СЛАУ (65)-(66) с обратимой матрицей $B(0)$.

Случай 2. Пусть $j = 0$ --- простая особая точка матрицы $B(j)$. Коэффициент $x_0(z)$ будем искать в виде линейной вектор-функции

$$x_0(z) = x_{01}z + x_{02}. \tag{30}$$

Для определения векторов x_{01}, x_{02} получим две СЛАУ:

$$\begin{gathered} B(0)x_{01} = 0, \\ B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)x_{01} = f'(0). \end{gathered} \tag{31}$$

Здесь $\det B(0) = 0$, $\{\phi_i\}_1^r$ --- базис в $N(B(0))$. Поэтому $x_{01} = \sum_{k=1}^{r} c_k \phi_k$. Вектор $c = (c_1, \dots, c_r)'$ определится однозначно из условий разрешимости, т. е. из СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{r} (B^{(1)}(0)\phi_k, \psi_i)c_k = (f'(0), \psi_i), \quad i = 1, \dots, r,$$

с невырожденной матрицей. Далее коэффициент x_{02} определится из указанной системы с точностью до $\mathrm{span}(\phi_1, \dots, \phi_r)$. Таким образом, в случае 2 коэффициент $x_0(z)$ будет зависеть от r произвольных постоянных и будет линейным относительно z.

Случай 3. Пусть $j = 0$ --- особая точка матрицы $B(j)$ кратности $k + 1$, где $k \geq 1$. Решение $x_0(z)$ будем искать в виде полинома

$$x_0(z) = x_{01}z^{k+1} + x_{02}z^k + \dots + x_{0k+1}z + x_{0k+2}. \tag{32}$$

Учитывая тождество

$$\frac{d^k}{dj^k}B(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)),$$

где $a_i = \ln\alpha_i'(0)$, и приравнивая коэффициенты при $z^{k+1}, z^k, \dots, z, z^0$ нулю, получим рекуррентную последовательность СЛАУ относительно коэффициентов $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k+2}$:

$$B(0)x_{01} = 0,$$
$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)\binom{k+1}{k}x_{01} = 0,$$

$$B(0)x_{0l+1} + B^{(l)}(0)\binom{k+1}{k+1-l}x_{01} + B^{(l-1)}(0)\binom{k}{k+1-l}x_{02} + \cdots$$
$$\cdots + B^{(1)}(0)\binom{k+1-l+1}{k+1-l}x_{0l} = 0, \quad l = 1, \dots, k,$$

$$B(0)x_{0k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} + B^{(k)}x_{02} + \cdots + B^{(1)}(0)x_{0k+1} = f'(0). \quad (33)$$

Так как в изучаемом случае согласно условиям введенного определения производные $\frac{d^i B(j)}{dj^i}|_{j=0}$, $i = 1, \dots, k$, --- нулевые матрицы, то

$$x_{0i} = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}\phi_j, \quad i = 1, \dots, k+1.$$

Поэтому указааная система принимает вид

$$B(0)x_{0,k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} = f'(0). \quad (34)$$

Так как $\det[(B^{(k+1)}(0)\phi_i, \psi_k)]_{i,k=\overline{1,r}} \neq 0$, то вектор $c^1 \stackrel{\text{def}}{=} (c_{11}, \dots, c_{1r})'$ определится однозначно из условий разрешимости приведенной системы. Итак,

$$x_{0k+2} = \sum_{j=1}^{r} c_{k+2j}\phi_j + \hat{x}_{k+2},$$

$\hat{x}_{k+2}$ --- частное решение СЛАУ. Вектор $c^{k+2} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{k+2,1}, \dots, c_{k+2,r})'$, как и векторы $c^2, \dots, c^{k+1}$, остается произвольным. Таким образом, в случае 3 коэффициент $x_0(z)$ является полиномом $(k+1)$-й степени относительно z и зависит от $r \times (k+1)$ произвольных постоянных. Применяя метод неопределенных коэффициентов с учетом тождества

$$\int t^j \ln^k t\, dt = t^{j+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{k(k-1)\dots(k-(s-1))}{(j+1)^{s+1}} \ln^{k-s} t,$$

можно построить систему разностных уравнений для определения коэффициента $x_1(z)$, $z = \ln t$. Действительно,

$$F(x)|_{x=x_0+x_1t} \overset{\text{def}}{=} [K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^2(K_i(0,0) - \\ -K_{i+1}(0,0))x_1(z+a_i) + P_1(x_0(z))]t + r(t), \quad r(t) = o(t). \tag{35}$$

Здесь $P_1(x_0(z))$ --- определенный полином от z, степень которого равна кратности особой точки $j = 0$ матрицы $B(j)$. Из приведенного соотношения в силу оценки $r(t) = o(t)$ при $t \to 0$ следует, что коэффициент $x_1(z)$ должен удовлетворять системе разностных уравнений

$$\mathrm{K}_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'(0))^2(K_i(0,0) - \\ -K_{i+1}(0,0))x_1(z+a_i) + P_1(x_0(z)) = 0. \tag{36}$$

Если $j = 1$ --- регулярная точка матрицы $B(j)$, то система (21) имеет решение $x_1(z)$ в виде полинома того же порядка, что и кратность особой точки $j = 0$ матрицы $B(0)$. Если $j = 1$ --- особая точка матрицы $B(j)$, то решение $x_1(z)$ строится в виде полинома степени $k_0 + k_1$, где k_0 и k_1 --- кратности особых точек $j = 0$ и $j = 1$ матрицы $B(j)$ соответственно. Коэффициент $x_1(z)$ будет зависеть от $r_0k_0 + r_1k_1$ произвольных постоянных, где $r_0 = \dim N(B(0))$, $r_1 = \dim N(\mathrm{B}(1))$.

Введем условие

B. Пусть матрица $B(j)$ в массиве $(0,1,\dots,N)$ имеет только регулярные точки или особые точки кратностей k_j.

Тогда аналогичным образом можно вычислить остальные коэффициенты $x_2(z),\dots,x_N(z)$ асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ решения рассматриваемого уравнения из последовательности разностных уравнений вида

$$K_n(0,0)x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'(0))^{1+j}(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_j(z+a_i) + \\ +\mathcal{P}_j(x_0(z),\dots,x_{j-1}(z))) = 0, \quad j = \overline{2,N}.$$

Из изложенного вытекает

Лемма 1.1.2.1. *Пусть выполнены условия A, B. Тогда существует вектор-функция* $\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(lnt)t^i$ *такая, что при* $t \to +0$ *имеет место оценка* $|F(\hat{x}(t))|_{\mathbb{R}^m} = o(t^N)$. *При этом коэффициенты* $x_i(lnt)$ *являются полиномами от* lnt *возрастающих степеней, не превосходящих суммы кратностей* $\sum_j k_j$ *особых точек* j *матрицы* $B(j)$ *из массива* $(0,1,\dots,i)$. *Коэффициенты* $x_i(lnt)$ *зависят от* $\sum_{j=0}^{i} dimN(B(j))k_j$ *произвольных постоянных.*

1.1.2.2. Теорема существования непрерывных параметрических семейств решений

Так как $0 \le \alpha_i'(0) < 1$, $\alpha_i(0) = 0$, $i = 1,\dots,n-1$, то для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется $T' \in (0,T]$ такое, что $\max\limits_{i=1,\dots,n-1, t\in[0,T']} |\alpha_i'(t)| \le \varepsilon$ и $\sup\limits_{i=1,\dots,n-1, t\in(0,T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \le \varepsilon.$

Введем условие

C. Пусть $\det K_n(t,t) \neq 0$, $t \in [0,T']$ и N^* выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\max_{t\in[0,T]} \varepsilon^{N^*} |K_n^{-1}(t,t)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m)} \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i^{(1)}(t)|\, |K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t))|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m)} \le q < 1,$$

где $|\cdot|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m)}$ --- норма матрицы размерности $m \times m$.

Лемма 1.1.2.2. *Пусть выполнено условие* C. *Пусть в классе* $\mathbb{C}_{(0,T']}$ *вектор-функций, непрерывных при* $t \in (0, T']$ *и имеющих предел* (*возможно бесконечный*) *при* $t \to +0$, *существует элемент* $\hat{x}(t)$ *такой, что имеет место оценка*

$$|F(\hat{x}(t))|_{\mathbb{R}^m} = o(t^N), \quad N \geq N^*.$$

Тогда уравнение (61) в классе $\mathbb{C}_{(0,T']}$ имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t), \tag{37}$$

где $u(t) \in \mathbb{C}_{[0,T']}$ и определяется единственным образом последовательными приближениями.

Доказательство: Аналогично со скалярным случаем, для определения функции $u(t)$ получим интегро-функциональную систему

$$\begin{gathered} K_n(t,t)u(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)(\tfrac{\alpha_i(t)}{t})^{N^*}(K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t)))u(\alpha_i(t)) + \\ + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t,s)(\tfrac{s}{t})^{N^*} u(s)ds + F(\hat{x}(t))/t^{N^*} = 0. \end{gathered} \tag{38}$$

Введем линейные операторы

$$\begin{aligned} Lu &\overset{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t)\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)(\tfrac{\alpha_i(t)}{t})^{N^*}\{K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}u(\alpha_i(t)), \\ Ku &\overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t,t)K_i^{(1)}(t,s)(s/t)^{N^*} u(s)ds. \end{aligned}$$

Тогда указанная система перепишется в компактной форме

$$u + (L+K)u = \gamma(t),$$

где $\gamma(t) = K_n^{-1}(t,t)F(x^N(t))/t^{N^*}$ --- непрерывная вектор-функция. Введем банахово пространство X непрерывных вектор-функций $u(t)$ с нормой

$$\|u\| = \max_{0 \leq t \leq T'} e^{-lt}|u(t)|_{\mathbb{R}^m}, \quad l > 0.$$

Тогда в силу неравенств $\sup\limits_{t\in[0,T]} \frac{\alpha_i(t)}{t} \leq \varepsilon < 1$ и условия **C** при любом $l \geq 0$ норма линейного функционального оператора L удовлетворяет оценке $\|L\|_{\mathcal{L}(X\to X)} \leq q < 1$. Кроме того, для интегрального оператора K при достаточно большом l справедлива оценка

$$\|K\|_{\mathcal{L}(X\to X)} \leq q_1 < 1 - q.$$

Следовательно, при достаточно большом $l > 0$

$$\|L + K\|_{\mathcal{L}(X\to X)} < 1,$$

т. е. линейный оператор $L + K$ является сжимающим в пространстве X. Поэтому последовательность $\{u_n\}$, где $u_n = -(L + K)u_{n-1} + \gamma(t), u_0 = \gamma(t)$, сходится.

Теорема (основная) 1.1.2.2. *Пусть выполнены условия* $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ *и* $\boldsymbol{C}$, $f(0) = 0$; *матрица* $B(j)$ *в массиве* $(0,1,\dots,N)$ *имеет ровно* ν *особых точек* $j_1,\dots,j_\nu$ *кратностей* k_i, $i = 1,\dots,\nu$, *а все остальные числа этого массива регулярны*; *пусть* $rankB(j_i) = r_i$, $i = 1,\dots,\nu$. *Тогда уравнение (61) при* $0 < t \leq T' \leq T$ *имеет решение*

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*}u(t),$$

зависящее от $\sum_{i=1}^{\nu} (m - r_i)k_i$ *произвольных постоянных.*

Доказательство. На основании леммы 1 в силу условий теоремы возможно построение асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ искомого решения в виде логарифмо-степенного полинома $\sum_{i=0}^{N} x_i(\ln t)t^i$. При этом по построению коэффициенты $x_i(\ln t)$ будут зависеть от указанного числа произвольных постоянных. В силу леммы 2, применяя подстановку $x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*}u(t)$, непрерывную функцию $u(t)$ можно будет построить методом последовательных приближений.

Замечание 1.1.2.2. *В условиях основной теоремы для асимптотического приближения* $\hat{x}(t)$ *искомого решения имеет место асимптотическая оценка* $Px(t) - \hat{x}(t)P_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{O}(t^{N^*}),\ t \to +0.$

В некоторых случаях в условиях теоремы можно построить параметрическое семейство решений в замкнутой форме.

Пример 1.1.2.2. *Система* $\int_0^{t/2} Kx(s)ds + \int_{t/2}^{t} (K - 2E)x(s)ds = bt,\ 0 < t < \infty$, *где* K *- симметрическая постоянная матрица* $m \times m,\ b \in \mathbb{R}^m,\ x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))'$, *1 --- собственное число матрицы* K *ранга* r, $\{\phi_1, \dots, \phi_r\}$ *--- соответствующая ортонормированная система собственных векторов, имеет параметрическое семейство решений*

$$x(t) = -lnt \sum_{i=1}^{r} \frac{(d,\phi_i)}{ln2} \phi_i + c_1\phi_1 + \dots + c_n\phi_r + \hat{a}.$$

Здесь $c_1, \dots, c_r$ *--- произвольные постоянные, вектор* $\hat{a}$ *удовлетворяет СЛАУ*

$$(K - E)\hat{a} = b - \sum_{i=1}^{r} (b, \phi_i)\phi_i.$$

1.1.2.3. Достаточные условия существования единственного непрерывного решения

Для простоты выкладок в этом разделе положим $\alpha_i(t) = \alpha_i t,\ i = 1, \dots, n-1$, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{n-1} < 1$. Введем функцию

$$D(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i |K_n^{-1}(t,t)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)} |(K_i(t,\alpha_i t) - K_{i+1}(t,\alpha_i t))|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)}.$$

Пусть выполнены условия

S. $$D(0) < 1;\ \sup_{0 \le s \le t \le T} |K_n^{-1}(t,t)K(t,s)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)} \le c < \infty.$$

Теорема (достаточные условия существования и единственности решения) 1.1.2.3. *Пусть выполнены условия* $\boldsymbol{S}$, *все матрицы* $K_i(t,s)$ *непрерывны и по* t *имеют непрерывные производные, вектор* $f(t)$ *также имеет непрерывную производную,* $f(0) = 0$. *Тогда уравнение (61) в классе непрерывных функций* $\mathbb{C}_{[0,T]}$ *имеет единственное решение. Более того, решение можно найти методом шагов, сочетая его с методом последовательных приближений.*

Доказательство. Эквивалентное исходному уравнению (61), полученное после его дифференцированию перепишем в виде

$$x(t) + Ax + Kx = \overline{f}(t), \tag{39}$$

где $Ax \overset{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t) \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (K_i(t,\alpha_i t) - K_{i+1}(t,\alpha_i t)) x(\alpha_i t)$,

$Kx \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1} t}^{\alpha_i t} K_n^{-1}(t,t) K_t^{(1)}(t,s) x(s) ds,\ \overline{f}(t) = K_n^{-1}(t,t) f^{(1)}(t)$.

Зафиксировав $q < 1$, выберем $h_1 > 0$ так, чтобы $\max_{0 \le t \le h_1} |D(t)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)} = q <$

1. В силу условия **S** такое $h_1 > 0$ найдется. Положим $0 < h < min\{h_1, \frac{1-q}{c}\}$, где постоянная c определена в условии (**S**). Разобьем интервал $[0, T]$ на промежутки

$$[0, h], [h, h + \varepsilon h], [h + \varepsilon h, h + 2\varepsilon h], ..., \quad (40)$$

где ε выбирается из промежутка (0,1] так, чтобы $\alpha_{n-1} \le \frac{1}{1+\varepsilon}$. Обозначим через $x_0(t)$ сужение искомого решения $x(t)$ на интервал $[0, h]$, а через $x_n(t)$ --- его сужения на интервалы

$$I_n = [(1 + (n-1)\varepsilon)h, (1 + n\varepsilon)h], \quad n = 1,2, ... \, .$$

В силу вышеуказанного выбора ε при $t \in I_n$ " возмущенный" аргумент $\alpha_i t \in \bigcup_{k=1}^{n-1} I_k$. Это включение дает возможность при построении решения $x(t)$ применить известный в теории функционально-дифференциальных уравнений метод шагов.

Для вычисления элемента $x_0(t) \in \mathbb{C}_{[0,h]}$ построим последовательность $\{x_0^n(t)\}$:

$$\begin{aligned} x_0^n(t) &= -Ax_0^{n-1} - Kx_0^{n-1} + \overline{f}(t), \\ x_0^0(t) &= \overline{f}(t), \quad t \in [0, h]. \end{aligned}$$

В силу выбора h имеем оценку $\|A + K\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}_{[0,h]} \to \mathbb{C}_{[0,h]})} < 1$.

Поэтому при $t \in [0, h]$ существует единственное решение $x_0(t)$. Последовательность $x_0^n(t)$ равномерно сходится к нему. Продолжим процесс построения искомого решения при $t \ge h$, т. е. на промежутках $I_n, n = 1,2, ...$. Для определенности пусть далее $\varepsilon = 1$.

Тогда вычислив элемент $x_0(t) \in \mathbb{C}_{[0,h]}$ будем искать $x_1(t)$ в пространстве $\mathbb{C}_{[h,2h]}$ непрерывных вектор-функций. Найдем $x_1(t)$ из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) + \int_h^t K_n^{-1}(t,t) K_t'(t,s) x(s) ds =$$

$$\overline{f}(t) - Ax_0 - \int_0^h K_n^{-1}(t,t) K_t'(t,s) x_0(s) ds$$

последовательными приближениями. При этом $x_0(h) = x_1(h)$.

Введем непрерывную функцию

$$\overline{x}_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 \le t \le h; \\ x_1(t), & h \le t \le 2h, \end{cases}$$

являющуюся сужением искомого непрерывного решения $x(t)$ на интервал $[0,2h]$. Тогда элемент $x_2(t) \in \mathbb{C}_{[2h,3h]}$ можно будет вычислить последовательными приближениями из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) + \int_{2h}^{t} K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x(s)ds =$$

$$\overline{f}(t) - A\overline{x}_1 - \int_0^{2h} K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)\overline{x}_1(s)ds.$$

Продолжая этот процесс за N шагов ($N \ge \frac{T}{h}$) построим искомое решение $x(t) \in \mathbb{C}_{[0,T]}$ уравнения (61).

Пример 1.2.3. *Пусть* $K_1(t-s) = K_2(t-s) + E$, --- *матрицы* $m \times m$, E --- *единичная матрица,* $|K_2^{-1}(0)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)} < 2$, *матрица* $K_2(t)$ *и вектор-функция* $f(t)$ *имеют непрерывные производные по* t, $f(0) = 0$. *Тогда интегральное уравнение*

$$\int_0^{t/2} K_1(t-s)x(s)ds + \int_{t/2}^{t} K_2(t-s)x(s)ds = f(t), \quad 0 < t \le T,$$

удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственное непрерывное решение.

1.1.3. Решение операторных уравнений Вольтерра первого рода кусочно-непрерывными ядрами

Введем в плоскости s, t треугольную область $D = \{s, t; 0 < s < t < T\}$ и зададим непрерывные функции $s = \alpha_i(t), i = \overline{1, n}$, имеющие непрерывные производные при $t \in (0, T)$. Предполагается, что $\alpha_i(0) = 0,\ 0 < \alpha_1(t) < \cdots < \alpha_{n-1}(t) < t$ при $t \in (0, T)$, $0 < \alpha_1'(0) < \cdots < \alpha_{n-1}'(0) < 1$, причем кривые $s = \alpha_i(t), i = \overline{0, n}$, где $\alpha_0(t) = 0, \alpha_n(t) = t$, разбивают область D на непересекающиеся секторы $D_1 = \{s, t: 0 \leq s < \alpha_1(t)\}$, $D_i = \{s, t: \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = \overline{2, n}\}$, $\overline{D} = \bigcup_1^n \overline{D_i}$. Введем двухпараметрическое семейство линейных непрерывных оператор-функций $K_i(t, s)$, определенных на компактах $\overline{D}_i$, дифференцируемых по t и действующих из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2. Таким образом, $K_i(t, s) \in \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$ и $\frac{\partial K_i(t,s)}{\partial t} \in \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$ при $t, s \in \overline{D_i}, i = \overline{1, n}$.

Введем интегральный оператор

$$\int_0^t K(t, s)u(s)ds \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t, s)x(s)ds \tag{41}$$

с ядром

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s), & t, s \in D_1, \\ \cdots & \cdots\cdots \\ K_n(t, s), & t, s \in D_n. \end{cases} \tag{42}$$

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t, s)x(s)\, ds = f(t), \tag{43}$$

где функция $f(t)$ и ее производная $f'(t)$ со значениями в E_2 определены и непрерывны при $t \in [0, T], f(0) = 0$. Уравнение (41) назовем операторным уравнением Вольтерра первого рода с кусочно-непрерывным ядром.Обозначим через $\mathbb{C}_{([0,T];E_1)}$ пространство непрерывных функций $x(t)$ определенных на $[0,T]$ со значениями в E_1.

Требуется построить в классе $\mathbb{C}_{([0,T];E_1)}$ решение уравнения. Такая задача и ее численное решение при $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^1, n = 1$ рассматривалась в ряде работ и монографий. Дифференцирование уравнения приводит к интегро-функциональным уравнениям и его решение в общем случае не единственно. Построение решений уравнения в общем случае не может быть проведено только классическими аналитическими методами теории вольтерровых уравнений. В данной работе уравнение (43) рассматривается в общем случае с использованием теории операторных уравнений с функционально возмущенным аргументом нейтрального типа.

В п. 1.1.3.1 данной части пособия, получены достаточные условия существования и единственности непрерывного решения уравнения (43) с кусочно-непрерывным операторным ядром (80). Такие уравнения, частным случаем которых являются уравнения возникающие в интегральных моделях развивающихся систем ранее не рассматривались. В п. 1.1.3.2 искомое единственное решение строится сочетанием известного в теории функциональных уравнений ``метода шагов'' с методом последовательных приближений. В п.п. 1.1.3.2, 1.1.3.3 рассмотрен теоретически наиболее интересный случай, когда уравнение имеет семейство решений, зависящих от свободных параметров. Предложен метод построения асимтотических приближений параметрических решений и способ их уточнения последовательными приближениями.

Всюду предполагается, что оператор $K_n(t,t)$ имеет ограниченный обратный при $t \in [0,T]$. Нормы $||K_i(t,s)||_{\mathcal{L}(E_1 \to E_2)}$, $||\frac{\partial K_i(t,s)}{\partial t}||_{\mathcal{L}(E_1 \to E_2)}$, $i = \overline{1,n}$ линейных операторов определены и являются непрерывными функциями при $t, s \in \overline{D}_i$, $t \in [0,T]$..

1.1.3.1. Достаточные условия существования единственного непрерывного решения

Так как $f(0) = 0$, то дифференцирование обеих частей уравнения (41) приводит его к эквивалентому функционально-операторному уравнению

$$F(x) \overset{\text{def}}{=} K_n(t,t)x(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)\{K_i(t,\alpha_i(t)) -$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}x(\alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t,s)x(s)\,ds - f'(t) = 0 \quad (44)$$

где $\alpha_0 = 0, \alpha_n(t) = t$. Введем функцию

$$D(t) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i'(t)| ||K_n^{-1}(t,t)\{K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}||_{\mathcal{L}(E_1 \to E_1)},$$

где $||\cdot||_{\mathcal{L}(E_1 \to E_1)}$ --- норма линейного оператора. Пусть выполнено условие:

A.

$$D(0) < 1, \sup_{0<s<t<T} ||K_n^{-1}(t,t)K(t,s)||_{\mathcal{L}(E_1 \to E_1)} \leq c < \infty.$$

Очевидно, неравенство $D(0) < 1$ выполняется, если $|\alpha_i^{(1)}(0)|$ достаточно малы. Здесь и далее оператор $K(t,s)$ в области $\bigcup_1^n D_i$ определен формулой (80). Его производная по t в обычном смысле при $t,s \in \bigcup_1^n D_i$ определяется формулой

$$K^{(1)}(t,s) = \begin{cases} K_1^{(1)}(t,s), & t,s \in D_1, \\ \dots & \dots\dots \\ K_n^{(1)}(t,s), & t,s \in D_n. \end{cases} \quad (45)$$

Теорема 1.2.3.1. (Достаточные условия существования и единственности решения).

Пусть выполнено условие **A**, *все операторы* $K_i(t,s)$ *и операторы* $K_i^{(1)}(t,s)$ *непрерывны в операторной топологии, вектор* $f(t)$ *имеет непрерывную производную,* $f(0)=0$. *Тогда уравнение (41) в классе непрерывных функций* $\mathbb{C}_{([0,T];E_1)}$ *имеет единственное решение. Более того, решение можно найти методом шагов, сочетая его с методом последовательных приближений.*

Доказательство. Применяя к обеим частям уравнения оператор $K_n^{-1}(t,t)$, получим уравнение

$$x(t)+Ax+Kx=\overline{f}(t), \qquad (46)$$

где введены обозначения

$$A(t)x \overset{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t)\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i^{(1)}(t)(K_i(t,\alpha_i(t))-K_{i+1}(t,\alpha_i(t)))x(\alpha_i t),$$

$$Kx \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t,t)K_i^{(1)}(t,s)x(s)ds, \quad \overline{f}(t) \overset{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t)f^{(1)}(t).$$

Зафиксировав $q<1$ выберем $h_1>0$ так, чтобы $\max\limits_{0\le t\le h_1} D(t)=q<1$. В силу условия **A**, непрерывности оператор-функций $K_i(t,s)$ в операторной топологии и непрерывной дифференцируемости функций $\alpha_i(t)$, такое $h_1>0$ найдется. Положим $0<h<min\{h_1,\frac{1-q}{c}\}$, где постоянная c определена в условии **A**. Разобьем интервал $[0,T]$ на промежутки

$$[0,h],[h,h+\varepsilon h],[h+\varepsilon h,h+2\varepsilon h],\dots. \qquad (47)$$

Обозначим через $x_0(t)$ сужение искомого решения $x(t)$ на интервал $[0,h]$, а через $x_m(t)$ --- его сужения на интервалы

$$I_m=[(1+(m-1)\varepsilon)h,(1+m\varepsilon)h], m=1,2,\dots.$$

Выберем ε из промежутка (0,1] так, чтобы при $t\in I_m$ ``возмущенные'' аргументы $\alpha_i(t) \in \bigcup_{k=1}^{m-1} I_k, i = \overline{1, n-1}$. Если $0 < \alpha_i^{(1)}(t) < \frac{1}{1+\varepsilon}$ при $t \in [0, T), i = \overline{1, n-1}$, то указанное выше включение выполняется на промежутке $[0, T)$. Это включение дает возможность при построении решения $x(t)$ применить известный в теории функционально-дифференциальных уравнений метод шагов.

Для вычисления элемента $x_0(t) \in \mathbb{C}_{([0,h],E_1)}$ построим последовательность

$$x_0^n(t) = -Ax_0^{n-1} - Kx_0^{n-1} + \overline{f}(t),$$

$$x_0^0(t) = \overline{f}(t), t \in [0, h].$$

В силу выбора h имеем оценку $||A + K||_{\mathcal{L}(\mathbb{C}_{([0,h];E_1)} \to \mathbb{C}_{([0,h];E_1)})} < 1$. Поэтому при $t \in [0, h]$ существует единственное решение $x_0(t)$. Последовательность $x_0^n(t)$ равномерно сходится к нему. Продолжим процесс построения искомого решения при $t \geq h$, т.е. на промежутках $I_n, n = 1,2, \ldots$. Для определенности пусть далее в $\varepsilon = 1$.

Тогда вычислив элемент $x_0(t) \in \mathbb{C}_{([0,h];E_1)}$ будем искать элемент $x_1(t)$ в пространстве $\mathbb{C}_{([h,2h];E_1)}$ непрерывных вектор-функций. Найдем $x_1(t)$ из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) + \int_h^t K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x(s)\,ds =$$

$$= \overline{f}(t) - Ax_0 - \int_0^h K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x_0(s)\,ds$$

последовательными приближениями. При этом $x_0(h) = x_1(h)$.

Введем непрерывную функцию

$$\overline{x}_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 \leq t \leq h, \\ x_1(t), & h \leq t \leq 2h, \\ \end{cases} \tag{48}$$

являющуюся сужением искомого непрерывного решения $x(t)$ на интервал $[0,2h]$. Тогда элемент $x_2(t) \in \mathbb{C}_{([2h,3h];E_1)}$ можно будет вычислить последовательными приближениями из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) + \int_{2h}^{t} K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x(s)\,ds =$$

$$= \overline{f}(t) - A\overline{x}_1 - \int_0^{2h} K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)\overline{x}_1(s)\,ds.$$

Продолжая этот процесс за N шагов ($N \geq \frac{T}{h}$) построим искомое решение $x(t) \in \mathbb{C}_{([0,T];E_1)}$.

Пример 1.2.4.

Интегральное уравнение

$$\int_0^{t/2} K_1(t-s)x(s)\,ds + \int_{t/2}^{t} K_2(t-s)x(s)\,ds = f(t), 0 \leq t \leq T,$$

$K_1(t-s) = K_2(t-s) + E,\ K_1, K_2$ --- матрицы $m \times m,\ E$ --- единичная матрица,

$$|K_2^{-1}(0)|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m)} < 2,$$

матрица $K_2(t)$ и вектор-функция $f(t) = (f_1(t), \dots, f_m(t))'$ имеют непрерывные производные по t, $f(0) = 0$, удовлетворяет условиям теоремы и имеет единственное непрерывное решение.

Пример 2.2.5.

Краевая задача

$$\begin{cases} \int_0^{t/2} \left(\frac{\partial^2 x(t,y)}{\partial y^2} + x(t,y)\right) dt + \int_{t/2}^{t} \frac{\partial^2 x(t,y)}{\partial y^2}\,dt = f(t,y),\ 0 \leq t \leq T, 0 \leq y \leq 1, \\ x(t,0) = 0, \quad x(t,1) = 0, \end{cases}$$

где функция $f(t,y)$ непрерывна по y и имеет непрерывную производную по

t, $f(0,y)=0$, удовлетворяет условиям приведенной выше теоремы. Искомое непрерывное решение можно построить, решая методом последовательных приближений эквивалентное уравнение

$$x(t,y) = -\frac{1}{2}\int_0^t G(y,\xi)x(t,\xi)\,d\xi + \int_0^1 G(y,\xi)f_t'(t,\xi)\,d\xi$$

со сжимающим интегральным оператором, где

$$G(y,\xi) = \begin{cases} (\xi-1)y, & y \le \xi, \\ (y-1)\xi, & \xi \le y. \end{cases}$$

1.1.3.2. Построение асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ параметрических семейств решений

Пусть выполнено условие

B. Существуют операторные полиномы $\mathcal{P}_i = \sum_{\nu+\mu=1}^{N} K_{i\nu\mu}t^\nu s^\mu, i=\overline{1,n}$, где $K_{i,\nu,\mu} \in \mathcal{L}(E_1 \to E_2)$, -- линейные непрерывные операторы, вектор-функция $f^N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu t^\nu$, полиномы $\alpha_i^N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{i\nu}t^\nu, i=\overline{1,n-1}$, где $0 < \alpha_{11} < \alpha_{21} < \alpha_{21} < \cdots < \alpha_{n-1,1} < 1$, такие, что при $t \to +0$, $s \to +0$ справедливы оценки $||K_i(t,s) - \mathcal{P}_i(t,s)||_{\mathcal{L}(E_1\to E_2)} = \mathcal{O}((t+s)^{N+1}), i=\overline{1,n}$, $||f(t)-f^N(t)||_{E_2} = \mathcal{O}(t^{N+1})$, $|\alpha_i(t) - \alpha_i^N(t)| = \mathcal{O}(t^{N+1}), i=\overline{1,n-1}$.

Разложения по степеням t,s, представленные в условии B, далее будем называть ``полиномами Тейлора'' соответствующих элементов. Введем j-параметрическое семейство линейных операторов

$$B(j) = K_n(0{,}0) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j}(K_i(0{,}0) - K_{i+1}(0{,}0)),$$

$j \in [0, \infty)$. Оператор $B(j)$, отвечающий главной ``функциональной" части уравнения (23), назовем *характеристическим оператором* уравнения.

Будем искать асимптотическое приближение частного решения неоднородного уравнения в виде полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=0}^{N} x_j(\ln t)t^j. \tag{49}$$

Покажем, что коэффициенты x_j со значениями в E_1 в общем нерегулярном случае зависят от $\ln t$ и свободных параметров. Это согласуется с возможностью существования нетривиальных решений у однородного уравнения.

При вычислении коэффициентов x_j возможны регулярный и нерегулярный случаи.

Определение 1.2.3.1. Число j^* --- *регулярная точка* оператора $B(j)$, если оператор $B(j^*)$ имеет ограниченный обратный и *нерегулярная точка* в противном случае.

Регулярый случай: характеристический оператор $\boldsymbol{B(j)}$ имеет ограниченный обратный при $\boldsymbol{j \in (0, 1, \dots, N)}$

В этом случае коэффициенты x_j будут постоянными векторами из E_1. Действительно, подставляя разложение (49) в исходное уравнение, методом неопределенных коэффициентов с учетом условия **B**, приходим к рекуррентной последовательности линейных уравнений относительно векторов x_j:

$$B(0)x_0 = f'(0), \tag{50}$$

$$B(j)x_j = M_j(x_0, \dots, x_{j-1}), j = 1, \dots, N. \tag{51}$$

Вектор M_j выражается определенным образом через решения $x_0, \dots, x_{j-1}$ предыдущих уравнений и коэффициенты ``полиномов Тейлора" из условия **B**. Так как в регулярном случае операторы $B(j)$ обратимы, то векторы $x_0, \dots, x_N$ определяются единственным образом и асимптотика (49) будет построена.

Нерегулярый случай: оператор $\boldsymbol{B(j)}$ в массиве $(\mathbf{0}, \mathbf{1}, \dots, \boldsymbol{N})$ имеет нерегулярные точки

Введем определения:

Определение 1.2.3.2. *Число j^* --- простая особая фредгольмова точка оператора $B(j)$, если $B(j^*)$ --- фредгольмов оператор, $det[< B^{(1)}(j^*)\phi_i, \psi_k >]_{i,k=1}^r \neq 0$, где $\{\phi_i\}_1^r$ --- базис в $N\big(B(j^*)\big)$, $\{\psi_i\}_1^r$ -- базис в $N\big(B'(j^*)\big)$, $B'(j^*)$ --- сопряженный оператор, $B^{(1)}(j)$ --- производная оператора по j, вычисленная при j^*.*

Определение 1.2.3.3. *Пусть $B(j^*)$ --- фредгольмов оператор, j^* назовем особой фредгольмовой точкой индекса $k+1$, если $N(B(j^*)) \subset \bigcap_{i=1}^k N(B^{(i)}(j^*))$,*

$$\det[< B^{(k+1)}(j^*)\phi_i, \psi_k >]_{i,k=1}^r \neq 0, k \geq 1.$$

Отметим, что $B^{(k)}(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j} a_i^k (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))$, где $a_i =$

$\ln\alpha_i'(0)$.

Замечание 1.2.3.1. Согласно определению 1.2.3.3 индекс простой особой фредгольмовой точки равен 1. Если $E_1 = E_2 = \mathbb{R}^1$, то $B(j)$ будет обычной функцией аргумента j. В этом случае определение 1.2.3.2 означает, что j^* --- однократный корень уравнения $B(j) = 0$, а определение 1.2.3.3, что j^* --- $(k+1)$ кратный корень этого уравнения.

Покажем, что в нерегулярном случае коэффициенты x_j будут полиномами по степеням $\ln t$ и зависят от произвольных постоянных. Порядок полиномов и число произвольных постоянных связаны с индексами особых точек операторов $B(j)$ и размерностями $N(B(j))$.

Действительно, т.к. коэффициент x_0 в нерегулярном случае может зависеть от $\ln t$, то на основании метода неопределенных коэффициентов x_0 следует искать как решение разностного уравнения

$$K_n(0,0)x_0(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(0)(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_0(z + a_i) = f'(0), \quad (52)$$

где $a_i = \ln\alpha'(0), z = \ln t$.

Здесь возможны три случая:

Случай 1.

Оператор $B(0)$ имеет ограниченный обратный. Тогда коэффициент x_0 от z не зависит и определится единственным образом из уравнения (15).

Случай 2.

Пусть $j = 0$ --- простая особая фредгольмова точка оператора $B(j)$.

Коэффициент $x_0(z)$ будем искать из разностного уравнения (90) в виде линейной вектор-функции

$$x_0(z) = x_{01}z + x_{02}. \tag{53}$$

Получим для определения векторов x_{01}, x_{02} два уравнения:

$$B(0)x_{01} = 0, \tag{54}$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)x_{01} = f'(0). \tag{55}$$

Пусть $\{\phi_i\}_1^r$ - базис в $N(B(0))$. Тогда $x_{01} = \sum_{k=1}^r c_k\phi_k$. Вектор $c = (c_1, \dots, c_r)'$ определится однозначно из условий разрешимости уравнения (21), т.е. из системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{k=1}^r < B^{(1)}(0)\phi_k, \psi_i > c_k =< f'(0), \psi_i >, i = \overline{1,r}$$

с невырожденной матрицей. Далее коэффициент x_{02} определится из уравнения (21) с точностью до $\mathrm{span}(\phi_1, \dots, \phi_r)$ по формуле

$$x_{02} = \sum_{k=1}^r d_k\phi_k + \Gamma(f'(0) - B^{(1)}x_{01}),$$

где

$$\Gamma = (B(0) + \sum_{k=1}^r <\cdot, \gamma_k > z_k)^{-1}$$

--- регуляризатор В.А.Треногина, $d_1, \dots, d_r$ --- произвольные постоянные. Таким образом в случае 2 коэффициент $x_0(z)$ линеен относительно z и зависит от r произвольных постоянных.

Случай 3. Пусть $j = 0$ --- особая фредгольмова точка оператора $B(j)$ индекса $k + 1$, где $k \geq 1$. Решение $x_0(z)$ разностного уравнения (17) будем искать в виде полинома

$$x_0(z) = x_{01}z^{k+1} + x_{02}z^k + \dots + x_{0k+1}z + x_{0k+2}. \tag{56}$$

Учитывая тождество

$$\frac{d^k}{dj^k}B(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j}a_i^k(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)),$$

где $a_i = \ln\alpha_i'(0)$ и приравнивая коэффициенты при степенях $z^{k+1}, z^k, \dots, z, z^0$ нулю, получим рекуррентную последовательность линейных операторных уравнений относительно коэффициентов $x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0k+2}$:

$$B(0)x_{01} = 0,$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)\binom{k+1}{k}x_{01} = 0,$$

$$B(0)x_{0l+1} + B^{(l)}(0)\binom{k+1}{k+1-l}x_{01} + B^{(l-1)}(0)\binom{k}{k+1-l}x_{02} + \cdots \dots +$$

$$B^{(1)}(0)\binom{k+1-l+1}{k+1-l}x_{ol} = 0, l = 1, \dots, k,$$

$$B(0)x_{0k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} + B^{(k)}(0)x_{02} + \cdots B^{(1)}(0)x_{0k+1} = f'(0). \quad (57)$$

В рассматриваемом случае согласно условиям определения 3 имеем включение

$$N(B(0)) \subset \bigcap_{i=1}^{k} N(\frac{d^iB(j)}{dj^i}|_{j=0}).$$

Поэтому $B^{(i)}(0)x_{0i+1} = 0, i = \overline{0,k}$ и коэффициенты $x_{01}, \dots, x_{0k+1}$ определяются из однородного уравнения $B(0)x = 0$ по формулам $x_{0i} = \sum_{j=1}^{r} c_{ij}\phi_j, i = \overline{1, k+1}$. Уравнение (57) примет вид

$$B(0)x_{0,k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} = f'(0). \quad (58)$$

Так как $B(0)$ --- фредгольмов оператор и $\det[< B^{(k+1)}(0)\phi_i, \psi_k >]_{i,k=\overline{1,r}} \neq 0$, то вектор $c^1 \stackrel{\text{def}}{=} (c_{11}, \dots, c_{1r})'$ определится однозначно из условий разрешимости уравнения (58). Итак,

$$x_{0\,k+2} = \sum_{j=1}^{r} c_{k+2\,j}\phi_j + \hat{x}_{k+2},$$

$\hat{x}_{k+2}$ --- частное решение уравнения (58). Вектор $c^{k+2} \stackrel{\text{def}}{=} (c_{k+2,1}, \dots, c_{k+2,r})'$, как и векторы $c^i = (c_{i1}, \dots, c_{ir})', i = \overline{2, k+1}$, остается произвольным. Таким образом, в случае 3 коэффициент $x_0(z)$ является полиномом $k+1$ -ой степени относительно z и зависит от $r \times (k+1)$ произвольных постоянных. Применяя метод неопределенных коэффициентов с учетом тождества

$$\int t^j \ln^k t\, dt = t^{j+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{k(k-1)\ldots(k-(s-1))}{(j+1)^{s+1}} \ln^{k-s} t,$$

можно построить разностные уравнения для определения коэффициента $x_1(z)$ ($z = \ln t$) и последующих коэффициентов асимптотического приближения (49) . Действительно, с учетом определения оператора F, имеем представление

$$F(x)|_{x=x_0(z)+x_1(z)t} = [K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^2 (K_i(0,0) - \qquad (59)$$

$$-K_{i+1}(0,0))x_1(z+a_i) + P_1(x_0(z))]t + r(t),$$

с оценкой $r(t) = \sigma(t)$. Здесь $P_1(x_0(z))$ --- определенный полином от z, степень которого равна индексу особой фредгольмовой точки $j = 0$ оператора $B(j)$. Из соотношения (59) в силу оценки $r(t) = \sigma(t)$ при $t \to 0$ следует, что коэффициент $x_1(z)$ должен удовлетворять разностному уравнению

$$K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'(0))^2 (K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_1(z+a_i) + \qquad (60)$$

$$+P_1(x_0(z)) = 0.$$

Если $j = 1$ --- регулярная точка оператора $B(j)$, то уравнение (60) имеет решение $x_1(z)$ в виде полинома того же порядка, что и индекс особой фредгольмовой точки $j = 0$ оператора $B(0)$. Если $j = 1$ тоже окажется особой фредгольмовой точкой оператора $B(j)$, то решение $x_1(z)$ строится в виде полинома степени $k_0 + k_1$, где k_0 и k_1 --- индексы особых фредгольмовых точек $j = 0$ и $j = 1$ оператора $B(j)$ соответственно. Коэффициент $x_1(z)$ будет зависеть от $r_0 k_0 + r_1 k_1$ произвольных постоянных, где $r_0 = \dim N(B(0))$, $r_1 = \dim N(B(1))$.

Введем условие

C. Пусть оператор $B(j)$ в массиве $(0,1,\ldots,N)$ имеет только регулярные точки или особые фредгольмовы точки $j_1, \ldots, j_\nu$ индексов k_i, $dimN(Bj_i) =$

$r_i, i = \overline{1,\nu}$.

Тогда аналогичным образом можно вычислить остальные коэффициенты $x_2(z), \dots, x_N(z)$ асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ решения из последовательности разностных уравнений вида

$$K_n(0,0)x_j(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha'(0))^{1+j}(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0))x_j(z + a_i) +$$

$$+\mathcal{P}_j(x_0(z), \dots, x_{j-1}(z))) = 0, j = \overline{2,N}.$$

Из изложенного вытекает

Лемма 1.2.3.1. *Пусть выполнены условия В 1.2.3., С 1.2.3.. Тогда существует вектор-функция* $\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(lnt)t^i$, *такая, что* $||F(\hat{x}(t))||_{E_2} = o(t^N)$, *где оператор* F *определен выше. При этом коэффициенты* $x_i(lnt)$ *являются полиномами от* lnt *возрастающих степеней, не превосходящих суммы индексов* $\sum_j k_j$ *особых фредгольмовых точек* $j \in \{0,1,2,\dots,N\}$ *характеристического оператора* $B(j)$ *. Коэффициенты* $x_i(lnt)$ *зависят от* $\sum_{j=0}^{i} dimN(B(j))k_j$ *произвольных постоянных.*

Замечание 1.2.3.2. Если $B(0)$ -- фредгольмов оператор и $dimN(B(0)) \geq 1$, то коэффициент $x_0(\ln t)$ может оказаться линейной функцией $\ln t$ и вектор-функция $\hat{x}(t)$ будет неограниченно возрастать при $t \to +0$ (кратко, $\hat{x} \in \mathbb{C}_{((0,T];E_1)}$).

1.1.3.3. Теорема существования непрерывных параметрических семейств решений

Так как $0 \le \alpha_i'(0) < 1, \alpha_i(0) = 0, i = \overline{1, n-1}$, то для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется $T' \in (0, T]$ такое, что $\max\limits_{i=\overline{1,n-1}, t \in [0,T']} |\alpha_i'(t)| \le \varepsilon$ и $\sup\limits_{i=\overline{1,n-1}, t \in (0,T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \le \varepsilon$.

Введем условие

D. Пусть оператор $K_n(t,t)$ имеет ограниченный обратный при $t \in [0, T']$ и N^* выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{t \in (0,T')} \varepsilon^{N^*} \sum_{i=1}^{n-1} |\alpha_i^{(1)}(t)| ||K_n^{-1}(t,t)(K_i(t,\alpha_i(t)) -$$

$$K_{i+1}(t,\alpha_i(t)))||_{\mathcal{L}(E_1 \to E_1)} \le q < 1.$$

Лемма 1.2.3.2. *Пусть выполнено условие D. Пусть в классе* $\mathbb{C}_{([0,T'];E_1)}$ *вектор-функций, непрерывных при* $t \in [0, T']$ *существует элемент* $\hat{x}(t)$ *такой, что при* $t \to +0$

$$||F(\hat{x}(t))||_{E_2} = o(t^N), N \ge N^*.$$

Тогда уравнение в классе $\mathbb{C}_{([0,T'];E_1)}$ имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*} u(t), \tag{61}$$

где $u(t)$ определяется единственным образом последовательными приближениями.

Доказательство. Подставляя (61) в исходное уравнение, получим для определения функции $u(t)$ интегро-функциональное уравнение

$$K_n(t,t)u(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)(\frac{\alpha_i(t)}{t})^{N^*}(K_i(t,\alpha_i(t)) - \tag{62}$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t)))u(\alpha_i(t)) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t,s)(\frac{s}{t})^{N^*}u(s)\,ds + F(\hat{x}(t))/t^{N^*} = 0.$$

Введем линейные операторы

$$Lu \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t)\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i'(t)(\frac{\alpha_i(t)}{t})^{N^*}\{K_i(t,\alpha_i(t)) -$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}u(\alpha_i(t)),$$

$$Ku \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t,t)K_i^{(1)}(t,s)(s/t)^{N^*}u(s)\,ds.$$

Тогда система перепишется в компактной форме

$$u + (L+K)u = \gamma(t),$$

где $\gamma(t) = K_n^{-1}(t,t)F(\hat{x}(t))/t^{N^*}$ --- непрерывная вектор-функция. Введем банахово пространство X непрерывных по t вектор-функций $u(t)$ со значениями в банаховом пространстве E_1 с нормой

$$||u||_l = \max_{0\le t\le T'} e^{-lt}||u(t)||_{E_1}, l > 0.$$

В силу неравенств $\sup\limits_{t\in(0,T']}\frac{\alpha_i(t)}{t} \le \varepsilon < 1$ и условия **D** при $\forall l \ge 0$ норма линейного функционального оператора L удовлетворяет оценке

$$||L||_{\mathcal{L}(X\to X)} \le q < 1.$$

Кроме того, для интегрального оператора K при достаточно большом l справедлива оценка

$$||K||_{\mathcal{L}(X\to X)} \le q_1 < 1 - q.$$

Следовательно, при достаточно большом $l > 0$

$$||L+K||_{\mathcal{L}(X\to X)} < 1,$$

т.е. линейный оператор $L+K$ является сжимающим в пространстве X. Поэтому последовательность $\{u_n\}$, где $u_n = -(L+K)u_{n-1} + \gamma(t), u_0 = \gamma(t)$, сходится.

Теорема 1.2.3.2. (Основная теорема)

Пусть выполнены условия B, C. и D, $f(0) = 0$. *Пусть оператор* $B(0)$ *имеет ограниченный обратный. Тогда уравнение () в пространстве* $\mathbb{C}_{([0,T];E_1)}$ *при* $0 \leq t \leq T' \leq T$ *имеет решение*

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*}u(t),$$

зависящее от $\sum_{i=1}^{\nu} r_i k_i$ произвольных постоянных. Более того, элемент $\hat{x}$ строится ввиде логарифмо-степенной суммы (49), затем $u(t)$ вычисляется единственным образом последовательными приближениями и имеет место асимптотическая оценка $||x(t) - \hat{x}(t)||_{E_1} = \mathcal{O}(t^{N^*})$ при $t \to +0$.

Доказательство. На основании леммы 1 в силу условий теоремы возможно построение асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ искомого решения в виде логарифмо-степенного полинома

$$\sum_{i=0}^{N} x_i(\ln t)t^i.$$

При этом по построению коэффициенты $x_i(\ln t)$ будут зависеть от указанного числа произвольных постоянных. В силу леммы 2, применяя подстановку $x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*}u(t)$, непрерывную функцию $u(t)$ можно построить методом последовательных приближений. Теорема доказана.

Как и в теореме 1, параметрическое семейство решений, построенное на интервале $[0, T']$, можно продолжить на весь интервал $[0, T]$, используя метод шагов.

Если $j = 0$ окажется фредгольмовой точкой оператора $B(j)$ и $dimN(B(0)) \geq 1$, то на основании замечания 3 коэффициент $x_0(\ln t)$ в асимптотике $\hat{x}(t)$ может оказаться линейной функций $\ln t$. В этом случае решение $x(t) \in \mathbb{C}_{((0,T];E_1)}$ и неограниченно возрастает при $t \to +0$ (см. пример 3).

Пример 1.2.3.3.

Уравнение

$$\int_0^{t/2}\int_0^1 K(y,y_1)x(s,y_1)\,dy_1ds+\int_{t/2}^t\left(\int_0^1 K(y,y_1)x(s,y_1)\,dy_1-\right.$$

$\left.2x(s,y)\right)ds=g(y)t$, где $0<t<\infty, 0<y<1$, 1 --- собственное число непрерывного симметрического ядра $K(y,y_1)$ ранга r, $\{\phi_1(y),\dots,\phi_r(y)\}$ --- соответствующая ортонормированная на отрезке $[0,1]$ система собственных функций, $g(y)\in\mathbb{C}_{[0,1]}$, удовлетворяет условиям теоремы 2. При этом $j=0$ оказывается простой особой фредгольмовой точкой соответствующего характеристического оператора $B(j)$. Уравнению удовлетворяет параметрическое семейство решений

$$x(t,y)=-\frac{\ln t}{\ln 2}\sum_{i=1}^r\int_0^1 \phi_i(y)\phi_i(y_1)f(y_1)\,dy_1+c_1\phi_1(y)+\dots+$$

$c_r\phi_r(y)+x_0(y)$,

где $c_1,\dots,c_r$ --- произвольные постоянные, $x_0(y)$ --- частное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода

$$x(y)=\int_0^1 K(y,y_1)x(y_1)dy_1-f(y)+\sum_{i=1}^r\phi_i(y)\int_0^1\phi_i(y_1)f(y_1)dy_1.$$

Усиление теоремы 1.2.3.2

Пусть числа $\{j_1,\dots,j_v\}\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ и являютя фредгольмовыми точками характеристического оператора $B(j)$. Построим обобщенные жордановы наборы в смысле характеристического оператора $B(j)$ в этих точках. Тогда теорему 1.2.3.2 можно усилить. Действительно, пусть j^* --- особая фредгольмова точка оператора $B(j)$. Пусть построены элементы $\{\phi_i^{(l)}\}, i=\overline{1,r}, l=\overline{1,p_i}$, удовлетворяющие равенствам:

$$B(j^*)\phi_i^{(1)}=0,$$

$$B(j^*)\phi_i^{(2)} + B^{(1)}(j^*)\binom{p_{i+1}}{p}\phi_i^{(1)} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots \tag{63}$$

$$B(j^*)\phi_i^{(l+1)} + B^{(l)}(j^*)\binom{p_i+1}{p_i+1-l}\phi_i^{(1)} + \cdots +$$

$$B^{(1)}(j^*)\binom{p_i+1-l+1}{p_i+1-l}\phi_i^{(l)} = 0,$$

$$i = \overline{1,r}, l = \overline{1,p_i-1}.$$

Пусть при этом

$$\det[< B^{(p_i)}(j^*)\phi_i^{(1)} + B^{(p_i-1)}(j^*)\phi_i^{(2)} + \cdots + B^{(1)}(j^*)\phi_i^{(p_i)}, \psi_j >]_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0, \tag{64}$$

где $\{\phi_i\}_1^r$ --- базис в $N(B'(j^*))$. Тогда по аналогии с известной теорией жордановых наборов линейных операторов [19, п.30] будем говорить, что оператор $B(j)$ в точке j^* имеет полный $B(j^*)$ --- жорданов набор (кратко ПЖН) $(\phi_i^{(l)})_{i=\overline{1,r},l=\overline{1,p_i}}$. При этом числа p_i назовем длинами жордановых цепочек

$$\overset{\leftarrow \quad p_i \quad \rightarrow}{(\phi_i^{(1)}, \ldots, \phi_i^{(p_i)})}, i = \overline{1,r}.$$

Отметим, что ПЖН существует в точке j^*, если j^* --- особая фредгольмова точка индекса p в смысле определения 1.2.3.3. В этом случае $B^{(l)}(j^*)\phi_i^{(1)} = 0, i = \overline{1,r}, l = \overline{0,p-1}$, жордановы цепочки

$$\overset{\leftarrow \quad p \quad \rightarrow}{(\psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(1)})}, i = \overline{1,r}$$

--- стационарны, т.е. имеют одинаковую длину p, примет вид

$$\det[< B^{(p)}\phi_i^{(1)}, \psi_j >]_{i,j=\overline{1,r}} \neq 0.$$

При этом будет выполнено и условие С, используемое в теореме 1.2.3.2, то есть мы придем к результату теоремы 1.2.3.2. Вместо условия **С** введем более слабое условие:

С1 . Характеристический оператор $B(j)$ в массиве $(0,1,\dots,N^*)$ имеет ровно ν особых фредгольмовых точек $(j_1,\dots,j_\nu)$ с полными обобщенными жордановыми наборами, все остальные числа этого массива регулярны.

Отметим, что в условии С1 жордановы цепочки могут быть нестационарны. Если условие С1 выполняется, то требуемое в лемме 1.2.3.1 асимптотическое приближение $\hat{x}$ искомого параметрического семейства решения уравнения можно построить. Действительно, пусть оператор $B(0)$ --- фредгольмов, $\{\phi_i^{(1)}\}_{i=1}^r$ --- базис в $N(B(0)),\{\phi_i^{(l)}\}_{i=\overline{1,r},l=\overline{1,p_i}}$ --- соотвествующий ПЖН, где положено $j^*=0$. Тогда первый коэффициент $x_0(z)$ искомого приближения $\hat{x}$, удовлетворяющий указанному разностному уравнению строится в виде полинома

$$x_0(z)=\sum_{i=1}^r c_i\sum_{l=1}^{p_i}\phi_i^{(l)}z^{p_i+1-l}+x_0, \tag{65}$$

где постоянные $c_1,\dots,c_r$ и $x_0\in E_1$ подлежат определению. Подставляя, получим для определения элемента x_0 линейное уравнение

$$B(0)x_0+\sum_{i=1}^r c_i(B^{(p_i)}(0)\phi_i^{(1)}+B^{(p_i-1)}(0)\phi_i^{(2)}+\dots+B^{(1)}(0)\phi_i^{(p_i)})=f'(0). \tag{66}$$

В силу указанного неравенства при $j^*=0$ вектор $(c_1,\dots,c_r)'$ определим из условия разрешимости уравнени. Затем с помощью регуляризатора В.А. Треногина построим решение x_0 неоднородного уравнения с точностью до базиса $(\phi_1,\dots,\phi_r)$ в $N(B(0))$ Аналогичным образом, в силу условия С1 можно вычислить остальные коэффициенты $x_2(z),\dots,x_N(z)$ асимптотического приближения $\hat{x}(z)$.

.

1.1.4. Численное решение уравнения Вольтерра с кусочно-гладким ядром

Рассмотрим численное решение уравнения Вольтерра с разрывным ядром в случае двух слагаемых. А именно, рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра вида

$$\int_0^{\alpha(t)} K_1(t,s)x(s)ds + \int_{\alpha(t)}^t K_2(t,s)x(s)ds = f(t), t \in [0,T], \qquad (67)$$

где $0 < \alpha(t) < t \ \forall t \in (0,T]$, $\alpha(0) = 0$, функции $K_1(t,s)$, $K_2(t,s)$, $f(t)$ --- непрерывные и достаточно гладкие, $f(0) = 0$, $K_2(t,t) \neq 0 \ \forall t \in [0,T]$.

Специфика таких уравнений требует, в частности, адаптации численных процедур, используемых для решения классических интегральных уравнений. Основная цель данного раздела - выяснение применимости разработанных ранее квадратурных методов для численного решения.

Для начала исследуем метод правых прямоугольников. Введем сетку узлов $t_i = t_0 + ih$, $i = \overline{1,n}$, $t_0 = 0$, $nh = T$, и, аппроксимируя интегралы суммами, в очевидных обозначениях запишем сеточный аналог:

$$h\sum_{j=1}^{l-1} K_1(t_i,t_j)x^h(t_j) + (\alpha(t_i) - t_{l-1})K_1(t_i,\alpha(t_i))x^h(\alpha(t_i)) + \qquad (68)$$

$$+(t_l - \alpha(t_i))K_2(t_i,t_l)x^h(t_l) + h\sum_{j=l+1}^{i} K_2(t_i,t_j)x^h(t_j) = f(t_i) \quad i = \overline{1,n},$$

где $l = \left[\frac{\alpha(t_i)}{h}\right] + 1$. Появление слагаемых, не входящих под знак суммы, обусловлено тем, что значение $a(t_i)$ в общем случае не попадает в узел сетки. Для $n = 1$, получаем:

$$(\alpha(t_1) - t_0)K_1(t_1,\alpha(t_1))x^h(\alpha(t_1)) +$$

$$+(t_1-\alpha(t_1))K_2(t_1,t_1)x^h(t_1)=f(t_1). \tag{69}$$

Заметим, что уже для $n=1$ приходится решать одно уравнение с двумя неизвестными: $x^h(\alpha(t_1))$ и $x^h(t_1)$. Аналогичная проблема возникает на каждом шаге (кроме частных случаев, когда $\alpha(t_i)$ попадает в узел сетки). Для решения этой проблемы можно использовать различные варианты. Например, для нахождения $x^h(\alpha(t_1))$ использовать комбинацию методов правых и левых прямоугольников:

$$x^h(\alpha(t_1))=\frac{f(t_1)}{(\alpha(t_1)-t_0)K_1(t_1,\alpha(t_1))+(t_1-\alpha(t_1))K_2(t_1,\alpha(t_1))} \tag{70}$$

и подставить найденное $x^h(\alpha(t_1))$ в (107).

Можно использовать знание о решении уравнения (105) в нуле:

$$x(0)=\frac{f'(0)}{\alpha'(0)[K_1(0,0)-K_2(0,0)]+K_2(0,0)}, \tag{71}$$

а $x^h(\alpha(t_1))$ искать с помощью метода левых прямоугольников. В остальных $x^h(\alpha(t_i))$ целесообразнее применение процедур интерполяции или экстраполяции.

Численные расчеты на тестовых примерах показывают линейную сходимость адаптированных методов. Отметим, что в приведенных тестовых примерах характеристическое уравнение $B(j)=0$ не имеет корней в множестве $\mathbb{N}\cup\{0\}$, условия теоремы ms_teorem2 выполнены и уравнения имеют единственные непрерывные решения.

$$\int_0^{\frac{t}{3}}(1+t-s)x(s)ds-\int_{\frac{t}{3}}^{t}x(s)ds=\frac{t^4}{108}-\frac{25t^3}{81},\ t\in[0,2],$$

точное решение $\bar{x}(t)=t^2$.

В табл. 1.2.4.1 приведены погрешности $\varepsilon_1=\max\limits_{1\le i\le n}|\bar{x}(t_i)-x_1^h(t_i)|$ и $\varepsilon_2=\max\limits_{0\le i\le n}|\bar{x}(t_i)-x_2^h(t_i)|$, где x_1^h --- решение, полученное с помощью (108) в

$a(t_1)$, а x_2^h --- с использованием (109), (108) и экстраполяцией в первом узле.

Таб. 1.2.4.1. Погрешности численного решения для тестового примера.

h	ε_1	ε_2
$1/32$	0,068433	0,066695
$1/64$	0,034362	0,034189
$1/128$	0,017433	0,017371
$1/256$	0,008662	0,008652

Видно, что методы имеют линейную сходимость и не дают преимущества друг перед другом.

1.1.5. Построение обобщенных решений интегральных уравнений Вольтерра первого рода с кусочно-гладкими ядрами

Действуя по аналогии с предыдущими главами ведем в плоскости s, t треугольную область $D = \{s, t; 0 < s < t < T\}$ и зададим непрерывные функции $s = \alpha_i(t), i = \overline{1, n}$, имеющие непрерывные производные при $t \in (0, T)$. Предполагается, что $\alpha_i(0) = 0$, $0 < \alpha_1(t) < \cdots < \alpha_{n-1}(t) < t$ при $t \in (0, T)$, $0 < \alpha_1'(0) < \cdots < \alpha_{n-1}'(0) < 1$, причем кривые $s = \alpha_i(t), i = \overline{0, n}$, где $\alpha_0(t) = 0, \alpha_n(t) = t$, разбивают область D на непересекающиеся секторы $D_1 = \{s, t: 0 \leq s < \alpha_1(t)\}$, $D_i = \{s, t: \alpha_{i-1}(t) < s < \alpha_i(t), i = \overline{2, n}\}$, $\overline{D} = \overline{\bigcup_1^n D_i}$. Введем непрерывные функции $K_i(t, s)$, определенные и дифференцируемые по t при $t, s \in D_i$, $i = \overline{1, n}$.

Введем интегральный оператор

$$\int_0^t K(t, s) u(s) ds \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i(t, s) x(s) ds \qquad (111)$$

с кусочно-непрерывным ядром

$$K(t, s) = \begin{cases} K_1(t, s), & t, s \in D_1, \\ \cdots & \cdots\cdots \\ K_n(t, s), & t, s \in D_n. \end{cases} \qquad (112)$$

Рассмотрим уравнение

$$\int_0^t K(t, s) u(s) ds = f(t), 0 < t < T \leq \infty, \qquad (113)$$

где функция $f(t)$ имеет непрерывную производную при $t \in (0, T), f(0) \neq 0$. Уравнение (113) назовем уравнением Вольтерра I рода с кусочно-непре-рывным ядром. Требуется построить в классе обобщенных функций решение уравнения (113). Отметим, что в силу условия $f(0) \neq 0$ уравнение (113) не имеет классических решений. Дифференцирование уравнения (113) приводит к интегро-функциональным уравнениям и его решение в общем случае не единственно, как показано в предыдущих частях настоящего методического пособия. Поэтому построение решений уравнения (113) в общем случае не может быть проведено только классическими методами теории вольтерровых уравнений. В данном разделе уравнение (113) рассматривается с использованием элементарных результатов интегральных, разностных уравнений, функционального анализа, распределений Соболева-Шварца и теории уравнений с функционально возмущенным аргументом нейтрального типа.

1.1.5.1. Определение регулярной компоненты решения

Продолжив $f(t)$ на отрицательную полуось нулем и продифференцировав уравнение (113), получим эквивалентное функционально-интегральное уравнение

$$F(u) \stackrel{\text{def}}{=} K_n(t,t)u(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)\{K_i(t,\alpha_i(t)) - \tag{114}$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}u(\alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t,s)u(s)\,ds = f^{(1)}(t) + f(0)\delta(t),$$

где $\alpha_0 = 0, \alpha_n(t) = t$. Далее везде будем предполагать, что $K_1(0,0) \neq 0, K_n(t,t) \neq 0$, при $t \in [0,T]$. Введем функциональный оператор

$$Au \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} K_n^{-1}(t,t)\alpha_i'(t)\{K_i(t,\alpha_i(t)) - K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}u(\alpha_i(t))$$

и интегральный оператор $Ku \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t,t)K_i^{(1)}(t,s)u(s)ds$.

С учетом этих обозначений уравнение (114) приводится к виду

$$u(t) + Au + Ku = K_n^{-1}(t,t)f^{(1)}(t) + K_n^{-1}(0,0)f(0)\delta(t). \tag{115}$$

Будем искать решение вида $u(t) = a\delta(t) + x(t)$, где $a - \text{const}$,

$x(t) \in C_{(0,T)}$. Легко проверить справедливость тождеств:

$$\int_0^{\alpha_1(t)} \frac{\partial K_1(t,s)}{\partial t}\delta(s)ds = \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t},$$

$$\int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \frac{\partial K_i(t,s)}{\partial t}\delta(s)ds = 0$$

при $i = \overline{2,n}$. Действительно, первое тождество выполняется, т.к. $\alpha_1(t) > 0$, $\frac{\partial K_1(t,s)}{\partial t}\delta(s) = \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\delta(s)$, $\int_0^{\alpha_1(t)} \delta(s)ds = \theta(\alpha_i(t)) = 1$ при $t > 0$, где θ --- функция Хевисайда. Второе тождество тоже становится очевидным, если учесть, что при $i = \overline{2,n}$ $supp\,\delta(s) \cap D_i = 0$, $\int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} \delta(s)ds = \theta(\alpha_i(t)) - \theta(\alpha_{i-1}(t)) = 0$, т.к. $0 < \alpha_1(t) < \alpha_2(t) < \cdots < \alpha_n(t) = t$. Напомним еще тождество $\delta(\alpha_i(t)) = \frac{\delta(t)}{|\alpha_i'(0)|}$. В силу отмеченных тождеств замена $u = a\delta(t) + x(t)$ приводит уравнение (115) к виду $K_n^{-1}(0,0)K_1(0,0)a\delta(t) + K_n^{-1}(t,t)\frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}a + x(t) + Ax + Kx = K_n^{-1}(t,t)f^{(1)}(t) + K_n^{-1}(0,0)f(0)\delta(t)$. Приравнивая в последнем равенстве коэффициенты при $\delta(t)$, получим $a = \frac{f(0)}{K_1(0,0)}$. Регулярную часть остается определить из уравнения

$$x(t) + Ax + Kx = \overline{f}(x), \tag{116}$$

где $\overline{f}(t) = K_n^{-1}(t,t)\{f^{(1)}(t) - \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\frac{f(0)}{K_1(0,0)}\}$. Отметим, что в силу операторного тождества

$$K_n(t,t)(I + A + K)x = F(x)$$

уравнение (116) можно переписать в виде

$$F(x) = f'(t) - \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\frac{f(0)}{K_1(0,0)}. \tag{117}$$

1.1.5.2. Достаточные условия существования единственного обобщенного решения уравнения (113)

Так как $K_1(0,0) \neq 0$, то однородное уравнение (114) имеет только тривиальное решение среди сингулярных функций

$$u_{sing} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_0^m c_i \delta^{(i)}(t)$$

с точечным носителем в нуле. Поэтому существование и единственность обобщенного решения уравнения (114) вида

$$u(t) = u_{sing} + x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T)}$ эквивалентно доказательству существование единственного решения в классе $\mathbb{C}_{(0,T)}$ уравнения (116). Введем функцию

$$A(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i^{(1)}(t) |K_n^{-1}(t,t)| |K_i(t, \alpha_i(t)) - K_{i+1}(t, \alpha_i(t))|. \qquad (*)$$

Пусть выполнены условия

A.

$$A(0) < 1, \sup_{0<s<t<T} |K_n^{-1}(t,t) K(t,s)| \leq c < \infty.$$

Условие (А) выполняется, если производные $\alpha_i^{(1)}(0)$ достаточно малы. Здесь и далее ядро $K(t,s)$ в области $\bigcup_1^n D_i$ определено формулой (112). Его производная по t в обычном смысле при $t,s \in \bigcup_1^n D_i$ определяется формулой

$$K^{(1)}(t,s) = \begin{cases} K_1^{(1)}(t,s), & t,s \in D_1, \\ \dots & \dots \dots \\ K_n^{(1)}(t,s), & t,s \in D_n. \end{cases}$$

Теорема **1.2.5.1.** (Достаточные условия существования и единственности обобщенного решения). Пусть выполнены условия А, все ядра $K_i(t,s)$ в представлении (112) непрерывны, а по t имеют и непрерывные производные, функция $f(t)$ имеет непрерывную производную, $f(0) \neq 0$. Пусть $K_1(0,0) \neq 0$. Тогда уравнение (113) имеет единственное обобщенное решение

$$u(t) = \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\delta(t) + x(t),$$

где $x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T)}$ При этом $x(t)$ можно найти методом шагов, сочетая его с методом последовательных приближений.

Доказательство.

Т.к. сингулярная часть решения уже определена, то рассмотрим уравнение (116), которому удовлетворяет регулярная составляющая $x(t)$.

Зафиксировав $q < 1$ выберем $h_1 > 0$ так, чтобы $\sup\limits_{0 \le t \le h_1} |A(t)| = q < 1$. В силу условия А. такое $h_1 > 0$ найдется. Положим $0 < h < min\{h_1, \frac{1-q}{c}\}$, где постоянная c определена в условии А. Разобьем интервал $[0, T]$ на промежутки

$$[0, h], [h, h + \varepsilon h], [h + \varepsilon h, h + 2\varepsilon h], \dots. \tag{118}$$

Обозначим через $x_0(t)$ сужение искомого решения $x(t)$ на интервал $[0, h]$, а через $x_m(t)$ --- его сужения на интервалы

$$I_m = [(1 + (m-1)\varepsilon)h, (1 + m\varepsilon)h], m = 1,2, \dots.$$

Выберем ε из промежутка (0,1] так, чтобы при $t \in I_m$ ``возмущенные'' аргументы $\alpha_i(t) \in \bigcup_{k=1}^{m-1} I_k, i = \overline{1, n-1}$. Если $0 < \alpha_i^{(1)}(t) < \frac{1}{1+\varepsilon}$ при $t \in [0, T), i = \overline{1, n-1}$, то указанное выше включение выполняется на промежутке $[0, T)$. Это включение дает возможность при построении решения $x(t)$ применить известный в теории функционально-дифференциальных уравнений метод шагов.

Для вычисления элемента $x_0(t) \in \mathbb{C}_{[0,h]}$ построим последовательность $\{x_0^n(t)\}$:

$$x_0^n(t) = -Ax_0^{n-1} - Kx_0^{n-1} + \overline{f}(t),$$

$$x_0^0(t) = \overline{f}(t), t \in [0, h].$$

В силу выбора h имеем оценку $||A + K||_{\mathcal{L}(\mathbb{C}_{(0,h)} \to \mathbb{C}_{(0,h)})} < 1$. Поэтому при $t \in [0, h]$ существует единственное решение $x_0(t)$ уравнения (116). Последовательность $x_0^n(t)$ равномерно сходится к нему. Продолжим процесс построения искомого решения при $t \geq h$, т.е. на промежутках $I_n, n = 1,2, \ldots$. Для определенности пусть далее $\varepsilon = 1$.

Вычислив элемент $x_0(t) \in \mathbb{C}_{[0,h]}$ будем искать элемент $x_1(t)$ в пространстве $\mathbb{C}_{(h,2h)}$ непрерывных вектор-функций. Найдем $x_1(t)$ из интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$x(t) + \int_h^t K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x(s)\,ds =$$

$$\overline{f}(t) - Ax_0 - \int_0^h K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x_0(s)\,ds$$

последовательными приближениями. При этом $x_0(h) = x_1(h)$.

Введем непрерывную функцию

$$\overline{x}_1(t) = \begin{cases} x_0(t), & 0 \leq t \leq h, \\ x_1(t), & h \leq t \leq 2h, \end{cases} \qquad (119)$$

являющуюся сужением искомого непрерывного решения $x(t)$ на интервал $[0,2h]$. Тогда элемент $x_2(t) \in \mathbb{C}_{(2h,3h)}$ можно будет вычислить последовательными приближениями из интегрального уравнения Вольтерра II рода

$$x(t) + \int_{2h}^t K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)x(s)\,ds =$$

$$= \overline{f}(t) - A\overline{x}_1 - \int_0^{2h} K_n^{-1}(t,t)K_t'(t,s)\overline{x}_1(s)\,ds.$$

Продолжая этот процесс, за N шагов ($N \geq \frac{T}{h}$) построим искомое решение

$x(t) \in \mathbb{C}_{(0,T)}$ уравнения (113).

Построение асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ регулярной части параметрических семейств обобщенного решения уравнения (113)

Рассмотрим уравнение (117), которому удовлетворяет регулярная часть обобщенного решения. Пусть выполнено условие

B. Существуют полиномы $\mathcal{P}_i = \sum_{\nu+\mu=1}^{N} K_{i\nu\mu} t^\nu s^\mu, i = \overline{1,n}$,

$f^N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} f_\nu t^\nu$, $\alpha_i^N(t) = \sum_{\nu=1}^{N} \alpha_{i\nu} t^\nu, i = \overline{1,n-1}$, где $0 < \alpha_{11} < \alpha_{21} < \cdots < \alpha_{n-1,1} < 1$, такие, что при $t \to +0$, $s \to +0$ справедливы оценки $|K_i(t,s) - \mathcal{P}_i(t,s)| = \mathcal{O}((t+s)^{N+1}), i = \overline{1,n}$, $|f(t) - f^N(t)| = \mathcal{O}(t^{N+1})$, $|\alpha_i(t) - \alpha_i^N(t)| = \mathcal{O}(t^{N+1}), i = \overline{1,n-1}$.

Разложения по степеням t, s, представленные в условии **B**, далее будем называть ``полиномами Тейлора'' соответствующих функций. Введем функцию

$$B(j) = K_n(0,0) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j}(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)),$$

зависящую от целочисленного аргумента j, $j \in \mathbb{N} \cup 0$. Функцию $B(j)$, отвечающую главной ``функциональной'' части уравнения (117), назовем *характеристической функцией* уравнения (117). Рассмотрим построение асимптотического решения уравнения (117), то есть асимптотики регулярной части искомого решения. Здесь мы не предполагаем, что однородное уравнение, отвечающее (113), имеет только тривиальное решение. Поэтому теперь решение интегро-функционального уравнения (117) может быть не единственным. Следуя методологи первого раздела, будем искать асимптотическое приближение частного решения неоднородного уравнения

(117) в виде полинома

$$\hat{x}(t) = \sum_{j=0}^{N} x_j(\ln t)t^j. \quad (120)$$

Покажем, что коэффициенты x_j в общем нерегулярном случае зависят от $\ln t$ и свободных параметров. Это согласуется с возможностью существования нетривиальных решений у однородного уравнения.

При вычислении коэффициентов x_j возможны регулярный и нерегулярный случаи. Число j^* --- *регулярная точка* характеристической функции $B(j)$, если $B(j^*) \neq 0$ и *нерегулярная точка* в противном случае.

Регулярый случай: характеристическая функция $\boldsymbol{B(j) \neq 0}$ при $\boldsymbol{j} \in$ $\boldsymbol{(0, 1, \dots, N)}$, где $\boldsymbol{N}$ достаточно велико

В этом случае коэффициенты x_j будут постоянными, то есть не зависят от $\ln t$. Действительно, подставляя разложение (120) в уравнение (117), методом неопределенных коэффициентов с учетом условия (B), приходим к рекуррентной последовательности линейных алгебраических уравнений относительно x_j:

$$B(0)x_0 = f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} - \frac{f(0)}{K_1(0,0)} \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\Big|_{t=0}, \quad (121)$$

$$B(j)x_j = M_j\big(x_0, \dots, x_{j-1}\big), j = 1, \dots, N. \quad (122)$$

Правая часть M_j выражается определенным образом через решения $x_0, \dots, x_{j-1}$ предыдущих уравнений и коэффициенты ``полиномов Тейлора'' из условия (B).

Так как в регулярном случае $B(j) \neq 0$, то коэффициенты $x_0, \dots, x_N$

определяются единственным образом и асимптотика (120) будет построена.

Нерегулярый случай: характеристическая функция $\boldsymbol{B(j)}$ в массиве $\boldsymbol{(0, 1, \dots, N)}$ имеет нули

Покажем, что в нерегулярном случае коэффициенты x_j будут полиномами по степеням $\ln t$ и зависят от произвольных постоянных. Порядок полиномов и число произвольных постоянных связаны с кратностями целочисленных решений уравнения $B(j) = 0$.

Действительно, т.к. коэффициент x_0 в нерегулярном случае может зависеть от $\ln t$, то на основании метода неопределенных коэффициентов x_0 следует искать как решение разностного уравнения

$$K_n(0,0)x_0(z) + \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(0)\big(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)\big)x_0(z + a_i) = \qquad (123)$$

$$= f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\frac{K_1(t,0)}{\partial t}|_{t=0},$$

где $a_i = \ln\alpha'(0), z = \ln t.$ Здесь возможны три случая:

Случай 1 $(B(0) \neq 0)$.

В этом случае коэффициент x_0 от z не зависит и определится единственным образом из уравнения (121).

Случай 2 $(B(0) = 0)$.

Пусть $j = 0$ --- простой нуль функции $B(j)$, то есть $B(0) = 0, B'(0) \neq 0.$ Тогда коэффициент $x_0(z)$ будем искать из разностного уравнения (123) в виде линейной функции

$$x_0(z) = x_{01}z + x_{02}. \tag{124}$$

Подставляя (124) в (123), получим для определения коэффициентов x_{01}, x_{02} два уравнения:

$$B(0)x_{01} = 0, \tag{125}$$

$$B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)x_{01} = f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}|_{t=0}, \tag{126}$$

где $B(0) = 0, B^{(1)}(0) \neq 0$. Поэтому коэффицент $x_0(z)$ линеен относительно z и зависит от произвольной постоянной. Итак, в случае 2

$$x_0(z) = (f^{(1)}(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\frac{\partial K_1(0,0)}{\partial t})\frac{1}{B^{(1)}(0)}z + c,$$

где с --- const.

Случай 3. Пусть $j = 0$ --- корень уравнения $B(j) = 0$ кратности $k + 1$, то есть $B(0) = B'(0) = \cdots B^{(k)}(0) = 0, B^{(k+1)}(0) \neq 0, \quad k \geq 1$. Решение $x_0(z)$ разностного уравнения (122) будем искать в виде полинома

$$x_0(z) = x_{01}z^{k+1} + x_{02}z^k + \cdots + x_{0k+1}z + x_{0k+2}. \tag{127}$$

Подставляя полином (127) в уравнение (123), учитывая тождество

$$\frac{d^k}{dj^k}B(j) = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^{1+j}a_i^k(K_i(0,0) - K_{i+1}(0,0)),$$

где $a_i = \ln\alpha_i'(0)$ и приравнивая коэффициенты при степенях

$$z^{k+1}, z^k, \ldots, z, z^0$$

нулю, получим рекуррентную последовательность линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0k+2}$:

$$\begin{cases} B(0)x_{01} = 0, \\ B(0)x_{02} + B^{(1)}(0)\binom{k+1}{k}x_{01} = 0, \\ B(0)x_{0l+1} + B^{(l)}(0)\binom{k+1}{k+1-l}x_{01} + B^{(l-1)}(0)\binom{k}{k+1-l}x_{02} + \cdots \\ \ldots + B^{(1)}(0)\binom{k+1-l+1}{k+1-l}x_{ol} = 0, l = 1, \ldots, k, \end{cases}$$

(128)

$$B(0)x_{0k+2} + B^{(k+1)}(0)x_{01} + B^{(k)}(0)x_{02} + \cdots B^{(1)}(0)x_{0k+1} =$$

(129)

$$= f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}|_{t=0}.$$

В рассматриваемом случае $B(0) = B'(0) = \cdots = B^{(k)}(0) = 0, B^{(k+1)}(0) \neq 0$. Поэтому в полиноме (127) следует положить $x_{01} = \frac{1}{B^{(k+1)}(0)}(f'(0) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\frac{\partial K_1(0,0)}{\partial t})$. Уравнения системы (128) превращаются в тождества $B(0)x_{0j} = 0, j = \overline{1, k+1}$, т.к. $B(0) = 0$. Поэтому коэффициенты $x_{02}, \ldots, x_{0k+2}$ полинома (127) остаются произвольными постоянными.

Далее применяя метод неопределенных коэффициентов с учетом тождества

$$\int t^j \ln^k t\, dt = t^{j+1} \sum_{s=0}^{k} (-1)^s \frac{k(k-1)\ldots(k-(s-1))}{(j+1)^{s+1}} \ln^{k-s} t,$$

построим разностные уравнения для определения коэффициента $x_1(z)$ ($z = \ln t$) и последующих коэффициентов асимптотического приближения (120). Действительно,

$$L(x)|_{x=x_0(z)+x_1(z)t} \stackrel{\text{def}}{=} [K_n(0,0)x_1(z) + \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i'(0))^2 (K_i(0,0) -$$

(130)

$$-K_{i+1}(0,0))x_1(z + a_i) + P_1(x_0(z))]t + r(t), \quad r(t) = o(t).$$

Здесь $P_1(x_0(z))$ --- определенный полином от z, степень которого по доказанному равна кратности решения $j=0$ уравнения $B(j)=0$. Из соотношения (130) в силу оценки $r(t)=o(t)$ при $t\to 0$ следует, что коэффициент $x_1(z)$ должен удовлетворять разностному уравнению

$$K_n(0{,}0)x_1(z)+\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha'(0))^2(K_i(0{,}0)-K_{i+1}(0{,}0))x_1(z+a_i)+ \quad (131)$$

$$+P_1(x_0(z))=0.$$

Если $B(1)\neq 0$, то уравнение (131) имеет решение $x_1(z)$ в виде полинома того же порядка, что и кратность решения $j=0$ уравнения $B(j)=0$. Если $j=1$ --- тоже является решением уравнения $B(j)=0$, то решение $x_1(z)$ строится в виде полинома степени k_0+k_1, где k_0 и k_1 --- кратности решений $j=0$ и $j=1$ уравнения $B(j)=0$ соответственно. Коэффициент $x_1(z)$ будет зависеть от k_0+k_1 произвольных постоянных.

Введем условие

С.

- Пусть уравнение $B(j)=0$ в массиве $(0,1,\dots,N)$ имеет решения $j_1,\dots,j_\nu$ кратностей $k_i, i=\overline{1,\nu}$.

Тогда аналогичным образом можно вычислить остальные коэффициенты $x_2(z),\dots,x_N(z)$ асимптотического приближения $\hat{x}(t)$ решения уравнения (117) из последовательности разностных уравнений вида

$$K_n(0{,}0)x_j(z)+\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha'(0))^{1+j}(K_i(0{,}0)-K_{i+1}(0{,}0))x_j(z+a_i)+$$

$$+\mathcal{P}_j(x_0(z),\dots,x_{j-1}(z)))=0, j=\overline{2,N}.$$

Из изложенного вытекает

Теорема 1.2.5.2. *Пусть выполнены условия B и C. Тогда существует функция* $\hat{x}(t) = \sum_{i=0}^{N} x_i(lnt)t^i$, *такая, что при* $t \to +0$ *невязка решения уравнения (117) удовлетворяет оценке*

$$|F(\hat{x}(t)) - f^{(1)}(t) + K^{(1)}(t,0)\frac{f(0)}{K_1(0,0)}| = o(t^N).$$

При этом коэффициенты $x_i(lnt)$ *являются полиномами от* lnt *возрастающих степеней, не превосходящих суммы кратностей* $\sum_j k_j$ *решений уравнения* $B(j) = 0$ *из массива* $(0,1,\dots,i)$. *Коэффициенты* $x_i(lnt)$ *зависят от* $\sum_{j=0}^{i} k_j$ *произвольных постоянных. Если* $B(j) \neq 0$, *то в сумме* $\sum_{j=0}^{i} k_j$ *соответствующие* k_j *полагаем равными нулю.*

1.1.5.3. Теорема существования непрерывных параметрических семейств обобщенных решений

Так как $0 < \alpha_i'(0) < 1, \alpha_i(0) = 0, i = \overline{1, n-1}$, то для любого $0 < \varepsilon < 1$ найдется $T' \in (0, T]$ такое, что

$$\max_{i=\overline{1,n-1}, t\in[0,T']} |\alpha_i'(t)| \leq \varepsilon$$

и

$$\sup_{i=\overline{1,n-1}, t\in(0,T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \leq \varepsilon.$$

Введем условие

D.

Пусть функция $K_n(t,t) \neq 0$ при $t \in [0, T']$ и N^* выбрано настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\sup_{t\in(0,T')} \varepsilon^{N^*} |A(t)| \leq q < 1,$$

где функция $A(t)$ определена выше формулой $(*)$.

Теорема 1.1.5.3.. Пусть выполнено условие D. Пусть в классе $\mathbb{C}_{(0,T')}$ функций, непрерывных при $t \in (0, T']$ и имеющих предел (возможно бесконечный) при $t \to +0$ существует элемент $\hat{x}(t)$ такой, что при $t \to +0$ невязка решения уравнения (7) удовлетворяет оценке

$$|F(\hat{x}(t)) - f'(t) + K_1'(t,0)\frac{f(0)}{K_1(0,0)}| = o(t^N),$$

причем $N \geq N^*$. Тогда уравнение (117) в классе $\mathbb{C}_{(0,T')}$ имеет решение

$$x(t) = \hat{x}(t) + t^N v(t), \tag{132}$$

где $v(t)$ определяется единственным образом последовательными приближениями.

Доказательство.

Подставляя (132) в уравнение (117) получим для определения функции $v(t)$ интегро-функциональное уравнение

$$v(t) + K_n(t,t)\{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)(\tfrac{\alpha_i(t)}{t})^{N^*}(K_i(t,\alpha_i(t)) - \tag{133}$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t)))v(\alpha_i(t)) + \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_i^{(1)}(t,s)(\tfrac{s}{t})^{N^*} v(s)\, ds\} =$$

$$= \{f'(t) - \frac{\partial K_1(t,0)}{\partial t}\frac{f(0)}{K_1(0,0)} - F(\hat{x}(t))\}(t^{N^*}K_n(t,t))^{-1}.$$

Введем линейные операторы

$$Mu \stackrel{\text{def}}{=} K_n^{-1}(t,t)\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i'(t)(\tfrac{\alpha_i(t)}{t})^{N^*}\{K_i(t,\alpha_i(t)) -$$

$$-K_{i+1}(t,\alpha_i(t))\}v(\alpha_i(t)),$$

$$Kv \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} \int_{\alpha_{i-1}(t)}^{\alpha_i(t)} K_n^{-1}(t,t)K_i^{(1)}(t,s)(s/t)^{N^*} v(s)\, ds.$$

Тогда уравнение (133) перепишется в компактной форме

$$u + (M + K)u = \gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ --- правая часть уравнения (133), являющаяся непрерывной функцией в силу условия леммы 2. Введем банахово пространство X непрерывных по t функций $v(t)$ с нормой

$$||v||_l = \max_{0\le t\le T'} e^{-lt}|v(t)|, l > 0.$$

Тогда в силу неравенств $\sup\limits_{t\in(0,T']} \frac{\alpha_i(t)}{t} \le \varepsilon < 1$ и условия D при $\forall l \ge 0$ норма линейного функционального оператора M удовлетворяет оценке

$$||M||_{\mathcal{L}(X\to X)} \le q < 1.$$

Кроме того, для интегрального оператора K при достаточно большом l справедлива оценка

$$||K||_{\mathcal{L}(X\to X)} \le q_1 < 1 - q.$$

Следовательно, при достаточно большом $l > 0$

$$||M + K||_{\mathcal{L}(X\to X)} < 1,$$

т.е. линейный оператор $M + K$ является сжимающим в пространстве X. Поэтому последовательность $\{v_n\}$, где $v_n = -(M + K)v_{n-1} + \gamma(t), v_0 = \gamma(t)$, сходится.

Пусть выполнены условия B, C и D, $f(0) \ne 0$, $K_1(0,0) \ne 0$. Тогда уравнение (113) при $0 < t \le T' \le T$ имеет решение

$$x(t) = \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\delta(t) + \hat{x}(t) + t^{N^*}v(t),$$

зависящее от $\sum_{i=1}^{\nu} k_i$ произвольных постоянных, где числа k_i определяются в условии C. Более того, функция $\hat{x}$ строится в виде логарифмо-степенной суммы (120), затем $v(t)$ вычисляется единственным образом последовательными приближениями и имеет место асимптотическая оценка $|x(t) - \frac{f(0)}{K_1(0,0)}\delta(t) - \hat{x}(t)| = \mathcal{O}(t^{N^*})$ при $t \to +0$.

На основании Леммы 1.2.5.1 в силу условий теоремы возможно построение асимптотического приближения регулярной части $\hat{x}(t)$ искомого решения в виде логарифмо-степенного полинома

$$\sum_{i=0}^{N} x_i(\ln t)t^i.$$

При этом по построению коэффициенты $x_i(\ln t)$ будут зависеть от указанного числа произвольных постоянных. В силу леммы 1.2.5.2, применяя подстановку $x(t) = \hat{x}(t) + t^{N^*}u(t)$, непрерывную функцию $u(t)$ можно построить методом последовательных приближений. Теорема доказана.

Как и в Теореме 1.2.5.1 построенное на интервале $[0, T']$ параметрическое семейство решений можно продолжить на весь интервал $[0, T]$, используя метод шагов.

В простых случаях, решая эквивалентное уравнение (114), решение интегрального уравнения (113) можно построить в замкнутом виде.

$$\int_0^{t/2} x(s)ds + 2\int_{t/2}^{t} x(s)ds = 2 + t, t > 0.$$

Здесь эквивалентное уравнение (114) имеет вид $\frac{1}{2}x(\frac{1}{2}) + 2x(t) = 2\delta(t) + 1$. Искомое решение имеет вид $x(t) = 2\delta(t) + 2/3$.

$$\int_0^{t/2} x(s)ds - \int_{t/2}^{t} x(s)ds = 1 + t, t > 0.$$

Здесь эквивалентное уравнение (114) имеет вид $x(\frac{1}{2}) - x(t) = \delta(t) + 1$. Оно имеет c--параметрическое семейство обобщенных решений $x(t) = \delta(t) + c - \frac{\ln t}{\ln 2}$, c - const.

Литература

1. *Hans-Gunter Schwarz.* Modernisation of existing and new construction of power plants in Germany: results of an optimisation model // Energy Economics. 2005. № 27. P. 113-137.

2. *Глушков В.М.* Об одном классе динамических макроэкономических моделей // Управляющие системы и машины. 1977. № 2. С. 3-6.

3. *Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М.* Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, 1983. 350 с.

4. *Яценко Ю.П.* Интегральные модели систем с управляемой памятью. Киев: Наук. думка, 1991. 218 с.

5. *Апарцин А.С., Маркова Е.В., Труфанов В.В.* Интегральные модели развития электроэнергетических систем. Иркутск, 2002. 36 с. (Препринт /ИСЭМ СО РАН; № 1)

6. *Апарцин А.С., Маркова Е.В., Труфанов В.В.* К определению оптимальных стратегий долгосрочного развития электроэнергетических систем на базе интегральных моделей В.М. Глушкова // Proceeding of the Second International Conference "Tools for mathematical modelling", June 14-19, 1999. Изд-во СПбГТУ, 1999. С. 118-123.

7. *Апарцин А.С., Маркова Е.В., Труфанов В.В.* Анализ оптимальных

стратегий технического перевооружения электроэнергетических систем // Тр. XII Байкальской Междунар. конф. "Методы оптимизации и их приложения". Иркутск, 2001. Т.4. С. 25-30.

8. *Karaulova I.V., Markova E.V.* On one optimal control problem in the Glushkov type integral models // Proceedings of Forth International Conference "Inverse Problems: Identification, Design and Control", July 2-6, 2003, Moscow.CD-proceedings.

9. *Караулова И.В., Маркова Е.В., Труфанов В.В., Хамисов О.В.* О моделировании развития электроэнергетических систем с помощью интегральных моделей // Сб. науч. трудов "Методы исследования и моделирования технических, социальных и природных систем". Новосибирск: Наука, 2003. С. 85-100.

10. *Караулова И.В., Маркова Е.В.* Об интегральной модели развития электроэнергетических систем // Труды Байкальской всероссийской конференции "Информационные и математические технологии". Иркутск: ИСЭМ СО РАН, 2004. С. 90-96.

11. *Апарцин А.С., Караулова И.В., Маркова Е.В., Труфанов В.В.* Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество, 2005. № 10. С. 69-75.

12. *Karaulova I.V., Markova E.V.* Optimal Control Problem of Development of an Electric Power System // Automation and Remote Control. 2008. Vol. 69, iss.4. Pages 637-644.

13. *Ivanov D.V., Karaulova I.V., Markova E.V., Trufanov V.V., Khamisov O.V.* Control and Power Grid Development: Numerical Solutions // Automation and Remote Control. 2004. Vol. 65, iss. 3. Pages 472-482(11).

14. *Sidorov D.* Volterra Equations of the First kind with Discontinuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Control // Studia Informatica Universalis. 2011. Vol.9, № 3. Pages 135--146.

15. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2007. 488 с.

16. *Эльсгольц Л.А.* Качественные методы в математическом анализе. М.: ГИТТЛ, 1955. 300 с.

17. *Sidorov D.* Volterra Equations of the First kind with Discontinuous Kernels in the Theory of Evolving Systems Control // Studia Informatica Universalis. 2011. Vol.9, № 3. P. 135--146.

18. *Сидоров Д.Н.* О разрешимости уравнений Вольтерра I рода с кусочно-непрерывными ядрами в классе обобщенных функций // Известия ИГУ. Серия ``Математика''. 2012. Т. 5, № 1. С. 80--95.

19. *Архипов Б.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* Лекции по математическому анализу. М: Высшая школа, 1999. 695 с.

20. *Маркова Е.В., Сидоров Д.Н.* Интегральные уравнения Вольтерра

первого рода с кусочно-непрерывными ядрами в теории моделирования развивающихся систем // Известия ИГУ. Серия ``Математика''. 2012. № 2. С. 31-45.

21. *Apartsyn A.S.* Nonclassical Linear Volterra Equations of the First Kind // Monograph, VSP, Utrecht-Boston, 2003. 168 p.