Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах

М.В.Фалалеев
mihail@is.isu.ru

Abstract

Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах с вырожденным оператором при старшей производной уже много лет вызывают к себе пристальный интерес. Это обусловлено, во-первых, тем, что целый ряд начально-краевых задач прикладного характера допускают редукцию к ним, а, во-вторых, этот объект сам по себе очень интересен для исследования. Поэтому к настоящему времени сформировалось несколько подходов к исследованию данной проблемы. Не ставя себе цели дать полный обзор всех имеющихся направлений, отметим глубокие результаты связанные с построением *непрерывных* решений, полученные в разное время Крейном С.Г. [13], Сидоровым Н.А. [3], Ивановым В.К., Мельниковой И.В. [14] и др. К последним наиболее глубоким в данном направлении работам относятся результаты Свиридюка Г.А. [5] по теории полугрупп с ядрами. Однако хорошо известно, что дифференциальные уравнения с нетеровым оператором при главной части имеют классические (непрерывные) решения лишь при жестких условиях согласования начальных данных и свободной функции [3]. Поэтому представляется интересным построение решений таких уравнений в классе распределений. Повидимому первые строгие результаты в этом направлении были получены для интегро-дифференциальных уравнений в электротехнике [10]. В работах Завалищина С.Т., например [4], дан способ построения обобщенных решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений с вырожденной матрицей при производной. Этот метод нашел широкое применение в теории и приложениях [11]. К сожалению он не допускает прямого обобщения на дифференциальные уравнения с частными производными. Поэтому возникает потребность разработать метод построения обобщенных решений непосредственно для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В связи с этим в работе [3] строились псевдорешения дифференциальных уравнений при условии, что оператор B (при производной) не имеет $A-$ присоединенных элементов [8]. В работах [2 ,15] рассмотрен случай, когда оператор $(B - \lambda A)$ непрерывно обратим в некоторой окрестности

$0 <\mid \lambda \mid < \epsilon$, были построены решения задач Коши в классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем. Полное же решение вопроса о построении обобщенных решений дифференциальных уравнений с вырождением на основе [2] возможно с помощью построения фундаментального оператора дифференциального выражения. В данной работе построены фундаментальные операторы для сингулярных дифференциальных операторов 1, 2 и N-го порядков, для интегрального оператора типа свертки, а также в замкнутой форме построены решения соответствующих дифференциальных уравнений в классе распределений.

1 Некоторые вспомогательные сведения об обобщенных функциях конечного порядка.

Пусть R^n $n-$мерное евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_n)-$ точки этого пространства Отнесем к *множеству основных функций* $K^l(R^n)$ [7] все финитные функции класса C^l. Обозначать эти функции будем через $\varphi(x)$. *Носителем* $supp\varphi(x)$ функции $\varphi(x)$ называется замыкание в R^n множества тех точек x, для которых $\varphi(x) \neq 0$. Сходимость в $K^l(R^n)$ определяют следующим образом

Определение 1 *Последовательность функций $\varphi_n(x)$ из $K^l(R^n)$ сходится к функции $\varphi(x) \in K^l(R^n)$, если:*

"а)" существует $R > 0$ такое, что $supp\varphi_n(x) \subset U_R$ $\forall n \in N$, где U_R- шар радиуса R с центром в нуле;

"б)" $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $0 \leq \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \leq l$

$$D^\alpha \varphi_n(x) \Longrightarrow D^\alpha \varphi(x) \;\; при \;\; n \longrightarrow \infty.$$

Линейное множество $K^l(R^n)$ с введенной в нем сходимостью называется *пространством основных функций* $K^l(R^n)$. Отметим, что при $l \geq p$ справедливо включение $K^l(R^n) \subset K^p(R^n)$ и операция дифференцирования $D^\beta \varphi(x)$, при $\mid \beta \mid \leq l$, непрерывна из $K^l(R^n)$ в $K^{l-|\beta|}(R^n)$.

Замечание 1 *Замечание 1. Множество пространств $K^l(R^n)$ по параметру $l = 1, 2, \ldots$ образуют шкалу вложенных пространств [12], которая в дальнейшем будет использована для построения соответствующей шкалы пространств обобщенных функций конечного порядка. Именно в этой естественной шкале затем и строятся обобщенные решения вырожденных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах.*

Обобщенной функцией конечного порядка l называется всякий линейный непрерывный функционал, определенный на основном пространстве $K^l(R^n)$. Совокупность *таких обобщенных функций обозначают* $(K^l)'(R^n)$. *Это линейное полное топологическое пространство со слабой сходимостью. Носитель обобщенной функции, равенство двух обобщенных функций, сингулярная и регулярная обобщенные функции, сумма обобщенных функций, произведение обобщенной функции на число определяются обычным образом [7, 1 с. 89, 92-98].*

Пусть $a(x) \in C^l(R^n)$ *и* $f(x) \in (K^l)'(R^n)$, *тогда произведением обобщенной функции* $f(x)$ *и функции* $a(x)$ *называется обобщенная функция определяемая соотношением*

$$(a(x)f(x),\ \varphi(x)) = (f(x),\ a(x)\varphi(x)),\ \ \forall\varphi(x) \in K^l(R^n).$$

Соответственно производной D^α *от обобщенной функции* $f(x) \in (K^l)'(R^n)$ *называется обобщенная функция* $D^\alpha f(x) \in (K^{l+|\alpha|})'(R^n)$ *определяемая равенством*

$$(D^\alpha f(x),\ \varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|}(f(x),\ D^\alpha\varphi(x)),\ \ \forall\varphi(x) \in K^{l+|\alpha|}(R^n).$$

Если $f(x) \in (K^l)'(R^n)$ *и* $g(x) \in (K^p)'(R^n)$, *где* $p \le l$, *то* $f(x) + g(x) \in (K^l)'(R^n)$.

Если $a(x) \in C^{l+1}(R^n)$ *и* $f(x) \in (K^l)'(R^n)$, *то для производной* $\frac{\partial}{\partial x_\imath}(a(x)f(x)) \in (K^{l+1})'(R^n)$ *справедливо представление*

$$\frac{\partial}{\partial x_\imath}(a(x)f(x)) = \frac{\partial a(x)}{\partial x_\imath} \cdot f(x) + a(x) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_\imath}.$$

проверяемое обычными выкладками [6 с.106].

Пусть $f(x) \in (K^l)'(R^n)$ *и* $g(y) \in (K^p)'(R^m)$, *тогда прямым произведением этих обобщенных функций называется функция* $f(x) \cdot g(y) \in (K^{l+p})'(R^{n+m})$ *определяемая равенством*

$$(f(x) \cdot g(y),\ \varphi(x,\ y)) = (f(x),\ (g(y),\ \varphi(x,\ y))),\ \ \forall\varphi(x,\ y) \in K^{l+p}(R^{n+m}).$$

Корректность этого определения следует из следующей леммы, которая доказывается точно также, как соответствующее утверждение в [6 с.126-129].

Лемма 1 *Для любых* $g(y) \in (K^p)'(R^m)$ *и* $\varphi(x,\ y) \in K^{l+p}(R^{n+m})$ *справедливы следующие утверждения:*

"а)" $\psi(x) = (g(y),\ \varphi(x,\ y)) \in K^l(R^n)$;

"б)" $\forall\alpha$ *таких, что* $|\ \alpha\ |\le l\ \ D^\alpha\psi(x) = (g(y),\ D^\alpha_x\varphi(x,\ y))$;

"в)" если $\varphi_k(x,\ y) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *в* $K^{l+p}(R^{n+m})$, *то* $\psi_k(x) = (g(y),\ \varphi_k(x,\ y)) \to 0$ *при* $k \to \infty$ *в* $K^l(R^n)$.

Введенная операция прямого произведения обладает свойствами линейности и непрерывности по каждому множителю, ассоциативности, коммутативности, которые доказываются так же, как в [6 с.130-131]. Аналогично [6 с.131-132] можно доказать формулы дифференцирования и умножения прямого произведения.

Пусть пара обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$ из $(K^l)'(R^n)$ таковы, что их прямое произведение $f(x)\cdot g(y)$ допускает продолжение на функции вида $\varphi(x+y)$, где $\varphi(x)\in K^{2l}(R^n)$, в следующем смысле: какова бы ни была последовательность функций $\eta_k(x,\ y)\in K^{2l}(R^{2n})$ сходящаяся к 1 в R^{2n} [6 с.133], существует предел числовой последовательности

$$\lim_{k\to\infty}(f(x)\cdot g(y),\ \eta_k(x,\ y)\varphi(x+y))=(f(x)\cdot g(y),\ \varphi(x+y))$$

и этот предел не зависит от последовательности $\{\eta_k(x,\ y)\}$.

Сверткой $f(x)*g(x)$ таких обобщенных функций называется функционал

$$(f(x)*g(x),\ \varphi(x))=(f(x)\cdot g(y),\ \varphi(x+y)),\ \ \forall\varphi(x)\in K^{2l}(R^n).$$

Свертка существует, если одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ финитна или если $f(t),\ g(t)\in(K_+^p)'(R^1)$, т.е. $f(t)$ и $g(t)$ обращаются в нуль при $t<0$. В последнем случае свертка обладает свойством ассоциативности [6 с.141].

2 Обобщенные функции конечного порядка в банаховых пространствах

Пусть $E-$ банахово пространство, E^*- сопряженное банахово пространство. Отнесем к множеству основных функций $K^l(E^*)$ все финитные функции класса C^l со значениями в E^*. Обозначать эти функции будем через $s(t)$. Носителем $\mathrm{supp}\, s(t)$ основной функции $s(t)$ назовем замыкание в R^1 множества тех точек t, для которых $s(t)\neq 0$. Основное множество $K^l(E^*)$ является векторным пространством. Чтобы это пространство было топологическим определим в нем сходимость следующим образом.

Определение 2 *Последовательность функций $s_n(t)$ из $K^l(E^*)$ сходится к функции $s(t)\in K^l(E^*)$ если:*

"а)" существует $R>0$ такое, что $\mathrm{supp}\, s_n(t)\subset[-R;\ R]\ \ \forall n\in N$;

"б)" $\forall\alpha=0,1,\ldots,l\ \ \ \parallel s_n^{(\alpha)}(t)-s^{(\alpha)}(t)\parallel\Longrightarrow 0$ равномерно по $t\in[-R;\ R]$ при $n\to\infty$.

Множество $K^l(E^*)$ с введенной в нем сходимостью назовем основным пространством. Отметим, что $K^l(E^*)\subset K^p(E^*)$ при $l\geq p$, операция дифференцирования $\frac{d}{dt}$, при $\alpha=1,\ldots,l$, непрерывна из $K^l(E^*)$ в $K^{l-\alpha}(E^*)$. Обобщенной функцией конечного порядка l называется всякий линейный непрерывный функционал на $K^l(E^*)$. Сходимость во множестве обобщенных функций определим как слабую. Носитель, равенство двух обобщенных функций, сложение и умножение на число обобщенных функций определим обычным образом. Локально интегрируемая по Бохнеру *функция $u(t)$ со значениями в E порождает регулярную обобщенную функцию по следующему правилу*

$$(u(t),\ s(t)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} < u(t),\ s(t) > dt,\ \ \forall s(t) \in K^l(E^*).$$

Все остальные обобщенные функции назовем сингулярными.

Из всего множества обобщенных функций $(K^l)'(E)$ выделим специальный класс $(K^l_+)'(E)$ обобщенных функций, носители которых ограничены слева нулем. Таковыми будут, например, функции вида $u(t)g(t)$, где $u(t) \in C^l(E),\ g(t) \in (K^l_+)'(R^1)$ или $u(t) \in C^l_+(E),\ g(t) \in (K^l)'(R^1)$, действующие по правилу

$$(u(t)g(t),\ s(t)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (g(t),\ < u(t),\ s(t) >),\ \ \forall s(t) \in K^l(E^*).$$

Очевидно справедливо включение $(K^l_+)'(E) \supset (K^p_+)'(E)$ при $l \geq p$.

3 Обобщенные оператор-функции и их свертки с обобщенными функциями конечного порядка в банаховых пространствах.

Пусть E_1, E_2- банаховы пространства, $\mathcal{K}(t) \in \mathcal{L}(E_1; E_2)-$ сильно непрерывная оператор-функция класса C^l, причем $\mathcal{K}^*(t) \in \mathcal{L}(E_2^*; E_1^*)$ существует при почти всех $t,\ f(t) \in (K^l_+)'(R^1)$, тогда формальный символ $\mathcal{K}(t)f(t)$ назовем обобщенной оператор-функцией порядка l. Сверткой обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(t)f(t)$ и обобщенной функции $v(t) \in (K^l_+)'(E_1)$ назовем обобщенную функцию $\mathcal{K}(t)f(t) * v(t) \in (K^{2l}_+)(E_2)$, действующую по формуле

$$(\mathcal{K}(t)f(t) * v(t),\ s(t)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (f(t),\ (v(\tau),\ \mathcal{K}^*(t)s(t+\tau))),\ \ \forall s(t) \in K^{2l}(E_2^*).$$

В частности, если $v(t) = u(t)g(t)$, где $u(t) \in C^l(E_1),\ g(t) \in (K^l_+)'(R^1),\ u(t) \in D(\mathcal{K}(\cdot))$, то

$$(\mathcal{K}(t)f(t) * u(t)g(t),\ s(t)) = (f(t),\ (u(\tau)g(\tau),\ \mathcal{K}^*(t)s(t+\tau))) =$$

$$= (f(t),\ (g(\tau),\ < \mathcal{K}(t)u(\tau),\ s(t+\tau) >)).$$

Отсюда получаем следующие равенства:

$$\mathcal{K}(t)\theta(t) * u(t)\theta(t) = (\int_0^t \mathcal{K}(t-\tau)u(\tau)d\tau)\theta(t),\ \ u(t) \in D(\mathcal{K}(\cdot));$$

$$\mathcal{K}(t)\theta(t) * a\delta^{(\imath)}(t) = \mathcal{K}^{(\imath)}(t)a\theta(t) + \mathcal{K}^{(\imath-1)}(0)a\delta(t) + \mathcal{K}^{(\imath-2)}(0)a\delta'(t) + \ldots + \mathcal{K}(0)a\delta^{(\imath-1)}(t),\ \ \imath \leq l;$$

$$A\delta^{(\imath)}(t)*u(t)\theta(t)=Au^{(\imath)}(t)\theta(t)+Au^{(\imath-1)}(0)\delta(t)+$$

$$+Au^{(\imath-2)}(0)\delta'(t)+\ldots+Au(0)\delta^{(\imath-1)}(t),\ \ \imath\leq l,\ \ u(t)\in D(A);$$

$$Bf(t)*ag(t)=Ba(f(t)*g(t)),\ \ a\in D(B);$$

$$(\mathcal{K}(t)f(t)*u(t)g(t))'=(\mathcal{K}'(t)f(t)+\mathcal{K}(t)f'(t))*u(t)g(t)=$$

$$=\mathcal{K}(t)f(t)*(u(t)g(t))'=\mathcal{K}(t)f(t)*(u'(t)g(t)+u(t)g'(t)),$$

если $l\geq 1,\ g(t),\ f(t)\in (K^l_+)'(R^1)$, *а* $\mathcal{K}(t)\in C^{l+1}$, $u(t)\in C^l(E_1)$ *или* $\mathcal{K}(t)\in C^l$, $u(t)\in C^{l+1}(E_1)$ *соответственно и* $u(t)\in D(\mathcal{K}(\cdot))$;

$$\mathcal{H}(t)\theta(t)*\mathcal{K}(t)\theta(t)*u(t)=(\mathcal{H}(t)*\mathcal{K}(t))\theta(t)*u(t),\ \ R(\mathcal{K}(\cdot))\subset D(\mathcal{H})(\cdot);$$

$$A\delta^{(\imath)}(t)*\mathcal{K}(t)f(t)*u(t)=(A\mathcal{K}(t)f(t))^{(\imath)}*u(t),\ \ R(\mathcal{K}(\cdot))\subset D(A);$$

$$\mathcal{K}(t)f(t)*A\delta^{(\imath)}(t)*u(t)=(\mathcal{K}(t)Af(t))^{(\imath)}*u(t),\ \ R(A)\subset D(\mathcal{K})(\cdot).$$

Замечание 2 *Аналогичное определение свертки, когда* $f(t)\equiv 1-$ *регулярная обобщенная функция и в качестве основного пространства выбрано* $K(E^*)$, *вводилось в работе [1].*

4 Фундаментальные оператор-функции дифференциальных операторов с постоянными операторными коэффициентами

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\mathcal{L}(\frac{d}{dt})=\frac{d^n}{dt^n}+A_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\ldots+A_1\frac{d}{dt}+A_0,$$

где $A_\imath-$ *замкнутые линейные операторы,* $\overline{\bigcap_{\imath=1}^n D(A_\imath)}=E$. *Если* $u(t)\in C^n(E)$, *то задачу Коши*

$$\mathcal{L}(\frac{d}{dt})u=f(t),\ \ u^{(\imath)}(0)=u_\imath,\ \ \imath=0,1,\cdots,n-1,$$

где $f(t) \in C(E)$, можно переписать в обобщенных функциях [6 с.221] как сверточное уравнение относительно $u(t) \in (K^l_+)'(E)$

$$\mathcal{L}(\delta(t)) * u(t) = (I\delta^{(n)}(t) + A_{n-1}\delta^{(n-1)}(t) + \ldots + A_1\delta'(t) + A_0\delta(t)) * u(t) = g(t),$$

где $g(t) \in (K^{n+l}_+)'(E),\ l \geq 0$.

Аналогично интегральное уравнение Вольтерра 1 рода с ядром $k(t)$ типа свертки также допускает сверточное представление относительно $u(t) \in (K^l_+)'(E)$

$$(I\delta(t) - k(t)\theta(t)) * u(t) = h(t),$$

$h(t) \in (K^l_+)'(E),\ l \geq 0.$

Фундаментальной оператор-функцией порядка p дифференциального оператора $\mathcal{L}(\frac{d}{dt})$ n-го порядка на классе $(K^l_+)'(E)$ называется такая обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}(t)$ порядка p, что $\forall u(t) \in (K^l_+)'(E)$ на основном пространстве $K^{l+p+n}(E^*)$ справедливо равенство

$$\mathcal{L}(\delta(t)) * \mathcal{E}(t) * u(t) = u(t).$$

Пример 1 *Для оператора $(I\delta'(t) - A\delta(t))$ с ограниченным оператором A фундаментальной оператор-функцией на классе $(K^0_+)'(E)$ является обобщенная оператор-функция 0-го порядка $\mathcal{E}(t) = e^{At}\theta(t)$.*

Действительно, $\forall u(t) \in (K^0_+)'(E)$ имеем в соответствии со свойствами тройной свертки

$$(I\delta'(t) - A\delta(t)) * e^{At}\theta(t) * u(t) = I\delta'(t) * e^{At}\theta(t) * u(t) - A\delta(t) * e^{At}\theta(t) * u(t) =$$

$$= (Ae^{At}\theta(t) + I\delta(t)) * u(t) - Ae^{At}\theta(t) * u(t) = I\delta(t) * u(t) = u(t).$$

Пример 2 *Для оператора $(I\delta''(t) - A\delta(t))$, если A ограничен, фундаментальной оператор-функцией на классе $(K^0_+)'(E)$ является обобщенная оператор-функция 0-го порядка $\mathcal{E}(t) = \frac{\sin\sqrt{A}t}{\sqrt{A}}\theta(t)$.*

Пример 3 *Для оператора $(I\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ с ограниченным оператором A фундаментальной оператор-функцией на классе $(K^0_+)'(E)$ является обобщенная оператор-функция 0-го порядка $\mathcal{E}(t) = \mathcal{U}(At)\theta(t),$ где $\mathcal{U}(t) \equiv \sum_{i=1}^{\infty} A^{i-1}\frac{t^{iN-1}}{(iN-1)!}$.*

Пример 4 *Рассмотрим дифференциальный оператор $\mathcal{L}_2 \equiv I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)$ где A_1, A_0- ограниченные операторы, $D(A_0) = D(A_1) = E$. Пусть $P(t) = \exp(\frac{A_1}{2}t),\ K = (\frac{A_1}{2})^2 + A_0,\ \mathcal{R}(t)-$ резольвента ядра $tP(t)K$, тогда оператор-функция $\mathcal{E}(t) = (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * tP(t)\theta(t)$ является фундаментальной на классе $(K^0_+)'(E)$ для дифференциального оператора $\mathcal{L}_2$.*

Действительно, поскольку $\mathcal{R}(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\begin{cases} \mathcal{R}''(t) = A_1\mathcal{R}'(t) + A_0\mathcal{R}(t), \\ \mathcal{R}(0) = 0, \mathcal{R}'(0) = K, \end{cases}$$

то $\forall u(t) \in (K_+^0)'(E)$ *имеем*

$$(I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)) * \mathcal{E}(t) * u(t) =$$

$$= (I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * tP(t)\theta(t) * u(t) =$$

$$= (I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) + \mathcal{R}''(t)\theta(t) + \mathcal{R}'(0)\delta(t) + \mathcal{R}(0)\delta'(t) -$$

$$-A_1\mathcal{R}'(t)\theta(t) - A_1\mathcal{R}(0)\delta(t) - A_0\mathcal{R}(t)\theta(t)) * tP(t)\theta(t) * u(t) =$$

$$= (I\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t) + (\mathcal{R}''(t) - A_1\mathcal{R}'(t) - A_0\mathcal{R}(t))\theta(t) + K\delta(t)) * tP(t)\theta(t) * u(t) =$$

$$= (I\delta''(t) - A_1\delta'(t) + (\frac{A_1}{2})^2\delta(t)) * tP(t)\theta(t) * u(t) =$$

$$= ((A_1P(t) + (\frac{A_1}{2})^2 tP(t))\theta(t) + I\delta(t) - (A_1P(t) + \frac{A_1^2}{2}tP(t))\theta(t) +$$

$$+(\frac{A_1}{2})^2 tP(t)\theta(t)) * u(t) = I\delta(t) * u(t) = u(t).$$

Пример 5 *Для сверточного интегрального оператора $(I\delta(t) - k(t)\theta(t))$ фундаментальной оператор-функцией является обобщенная оператор-функция 0-го порядка $\mathcal{E}(t) = I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)$, здесь $\mathcal{R}(t)$ резольвента ядра $k(t)$,*

$$\mathcal{R}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{k(t) * k(t) * \ldots * k(t)}_{n-\text{раз}}.$$

Действительно $\forall u(t) \in (K_+^0)'(E)$ *имеем*

$$(I\delta(t) - k(t)\theta(t)) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * u(t) = u(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t) * u(t) -$$

$$-k(t)\theta(t) * u(t) - (k(t) * \mathcal{R}(t))\theta(t) * u(t) = u(t).$$

Теорема 1 *Если* $\mathcal{E}(t)-$ *фундаментальная оператор-функция порядка* p *дифференциального оператора* $\mathcal{L}(\frac{d}{dt})$ *на классе* $(K_+^l)'(E)$ *и существует свертка* $\mathcal{E}(t)$ *с обобщенной функцией* $g(t) \in (K_+^l)'(E)$, *то обобщенная функция*
$u(t) = \mathcal{E}(t) * g(t) \in (K_+^{l+p})'(E)$ *на основном пространстве* $K^{l+p+n}(E^*)$ *удовлетворяет сверточному уравнению*

$$\mathcal{L}(\delta(t)) * u(t) = g(t).$$

Замечание 3 *Аналогичное утверждение справедливо и для сверточного интегрального оператора.*

5 Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов

Справедлива следующая

Теорема 2 *Если* A, B *- замкнутые линейные операторы из* E_1 *в* E_2,
$D(B) \subset D(A), \overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1,$ B *- фредгольмов,* $\overline{R(B)} = R(B),$ B *имеет полный* A *- жорданов набор* $\{\varphi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\}$ $[8\ .424 - 426]$, *тогда дифференциальный оператор первого порядка* $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ *на классе* $(K_+^l)'(E_2)$ $\forall l \in N$ *имеет фундаментальную оператор-функцию порядка* $(p-1)$ *вида*

$$\mathcal{E}_1(t) = \Gamma e^{A\Gamma t}[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \psi_i^{(j)} > A\varphi_i^{(p_i+1-j)}]\theta(t) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=0}^{p_i-1}\{\sum_{j=1}^{p_i-k} < \cdot, \psi_i^{(j)} > \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\}\delta^{(k)}(t)]$$

где $p = \max(p_i, i = \overline{1,n}),$ $\{\psi_i^{(j)},\ i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,p_i}\},$ A^* *- жорданов набор оператора* B^*, $\Gamma-$ *оператор Шмидта [8 с.340].*

Доказательство. *В соответствии с определением необходимо проверить справедливость равенства*

$$(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) = u(t)$$

на основном пространстве $K^{l+p}(E_2^*)$. *Подставим в левую часть этого равенства выражение для* $\mathcal{E}_1(t)$

$$(B\delta'(t) - A\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) = B\delta'(t) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) - A\delta(t) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) =$$

$$= (B\Gamma A\Gamma e^{A\Gamma t}[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \psi_i^{(j)} > A\varphi_i^{(p_i+1-j)}]\theta(t) +$$

$$+B\Gamma[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}]\delta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=0}^{p_i-1}\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\}\delta^{(k+1)}(t)]-$$

$$-A\Gamma e^{A\Gamma t}[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}]\theta(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=0}^{p_i-1}\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\}\delta^{(k)}(t)])*u(t)$$

Поскольку $B\varphi_i^{(1)}=0$, $B\Gamma=I-\sum_{i=1}^{n}<\cdot,\psi_i^{(1)}>z_i$, $z_i=A\varphi_i^{(p_i)}$, *а элементы* $\varphi_i^{(j)}$ *удовлетворяют равенствам* $B\varphi_i^{(j)}=A\varphi_i^{(j-1)}$ [8 .424], *то*

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}_1(t)*u(t)=(-\sum_{i=1}^{n}<A\Gamma e^{A\Gamma t}\cdot,\psi_i^{(1)}>z_i\theta(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}><A\Gamma e^{A\Gamma t}A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_i>z_i\theta(t)+I\delta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}<\cdot,\psi_i^{(1)}>z_i\delta(t)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}><A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_i>z_i\delta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=0}^{p_i-2}\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1}<\cdot,\psi_i^{(j)}>B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\}\delta^{(k+1)}(t)]+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=1}^{p_i-1}\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\}\delta^{(k)}(t)])*u(t)$$

или

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}_1(t)*u(t)=$$

$$=(\sum_{i=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}><A\Gamma e^{A\Gamma t}A\varphi_i^{(p_i+1-j)},\psi_i>-<A\Gamma e^{A\Gamma t}\cdot,\psi_i>\}z_i\theta(t)+$$

$$+I\delta(t)-\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=1}^{p_i-1}\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>(B\varphi_i^{(p_i-k-j+2)}-A\varphi_i^{(p_i-k-j+1)}\delta^{(k)}(t))*u(t)=$$

$$=I\delta(t)*u(t)=u(t).$$

Теорема 1 доказана.

Аналогично доказывается следующая

Теорема 3 *Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциальный оператор* $(B\delta''(t) - A\delta(t))$ *на классе* $(K^l_+)'(E_2)$ *имеет фундаментальную оператор-функцию порядка* $2(p-1)$ *вида*

$$\mathcal{E}_2(t) = \Gamma\frac{\sin(\sqrt{A\Gamma}t)}{\sqrt{A\Gamma}}[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \psi_i^{(j)} > A\varphi_i^{(p_i+1-j)}]\theta(t) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=0}^{p_i-1}\{\sum_{j=1}^{p_i-k} < \cdot, \psi_i^{(j)} > \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\}\delta^{(2k)}(t)].$$

Как следствие этих двух теорем и утверждения 1 получаем

Теорема 4 *Если выполнены условия теоремы 1,* $f(t) \in C(t \geq 0)$ *и принимает значения в* E_2*, то задача Коши*

$$B\dot{x} = Ax + f(t), \;\; x(0) = x_0$$

имеет обобщенное решение класса $(K^{p-2}_+)'(E_1)$ *вида*

$$x_1 = \mathcal{E}_1(t) * (f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t)),$$

а задача Коши

$$B\ddot{x} = Ax + f(t), \;\; x(0) = x_0, \;\; \dot{x}(0) = x_1$$

имеет обобщенное решение класса $(K^{2p-1}_+)'(E_1)$ *вида*

$$x_2 = \mathcal{E}_2(t) * (f(t)\theta(t) + Bx_1\delta(t) + Bx_0\delta'(t)).$$

Замечание 4 *Выполнив все тождественные преобразования, можно убедиться, что обобщенные решения* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *совпадают с построенными в [2] и [15] другим способом. Причем обобщенные функции* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$*, как легко убедиться проанализировав доказательство теорем 1 и 2, являются обобщенными решениями своих задач Коши в классе* $(K^{\infty}_+)'(E_1)$*. Если дополнительно потребовать, чтобы сингулярные составляющие обобщенных решений* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *обратились в нуль, то тогда, во-первых,* $x_1(t)$ *и* $x_2(t)$ *совпадут с непрерывными (классическими) решениями, а, во-вторых, эти дополнительные условия опишут совокупность начальных условий и правых частей* $f(t)$*, при которых такие задачи разрешимы в классе функций* $C^1(t \geq 0)$ *и* $C^2(t \geq 0)$ *соответственно.*

Естественным обобщением теорем 1 и 2 является

Теорема 5 *Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциальный оператор* $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ *на классе* $(K^l_+)'(E_2)$ *имеет фундаментальную оператор-функцию порядка* $N(p-1)$ *вида*

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma\mathcal{U}(A\Gamma t)[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \psi_i^{(j)} > A\varphi_i^{(p_i+1-j)}]\theta(t) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}[\sum_{k=0}^{p_i-1}\{\sum_{j=1}^{p_i-k} < \cdot, \psi_i^{(j)} > \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\}\delta^{(Nk)}(t)].$$

Замечание 5 *Если* $\overline{R(B)} \neq R(B)$*, но при этом* $A-$ *ограниченный оператор, то теоремы остаются справедливыми, необходимо только заменить в теореме 1 оператор-функцию* $\Gamma e^{A\Gamma t}$ *на* $e^{\Gamma A t}\Gamma$*, в теореме 2* $\Gamma\frac{\sin(\sqrt{A\Gamma}t)}{\sqrt{A\Gamma}}$ *на* $\frac{\sin(\sqrt{\Gamma A}t)}{\sqrt{\Gamma A}}\Gamma$*, а в теореме 3* $\Gamma\mathcal{U}(A\Gamma t)$ *на* $\mathcal{U}(\Gamma A t)\Gamma$.

Пример 6 *Пусть*

$$E_1 = \{u(x) \mid u(x) \in C^2[0;1], \quad u(0) = u(1) = 0\},$$

$$E_2 = C[0;1], \;\; B = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (n\pi)^2, \;\; A = b\frac{\partial}{\partial x}, \;\; n \in N, \;\; b \neq 0,$$

тогда $dimN(B) = dimN(B^*) = 1$,

$$\varphi^{(1)} = \sin n\pi x, \quad \varphi^{(2)} = \frac{b}{2}x\sin n\pi x, \quad \psi^{(1)} = \frac{8}{b^2}\sin n\pi x,$$

$$\psi^{(2)} = -\frac{4}{b}x\sin n\pi x, \quad z = A\varphi^{(2)}, \quad p = 2,$$

$$\Gamma\bullet = \frac{1}{n\pi}\int_0^x \sin n\pi(x-t)\bullet dt + \sin n\pi x \cdot \int_0^1 (\frac{8}{b^2} - t^2 - x^2 - \frac{1}{2(n\pi)^2})\sin n\pi t \bullet dt +$$

$$+\frac{\sin n\pi x}{n\pi}\cdot\int_0^1 (t-1)\cos n\pi t\bullet dt + \frac{x\cos n\pi x}{n\pi}\cdot\int_0^1 \sin n\pi t\bullet dt.$$

Рассмотрим две начально-краевые задачи

$$B\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) = Au(x,t) + f(x,t), \;\; t \geq 0, \;\; x \in [0;1],$$

$$u\mid_{t=0} = \alpha(x), \;\; \alpha(0) = \alpha(1) = 0, \;\; u\mid_{x=0} = u\mid_{x=1} = 0,$$

$$u(x,t) \in C^2\{x \in [0;1]\} \cap C^1\{t \geq 0\}, \;\; f(x,t) \in C\{x \in [0;1]\} \cap C\{t \geq 0\}$$

и

$$B\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = Au(x,t) + f(x,t), \;\; t \geq 0, \;\; x \in [0;1],$$

$$u\mid_{t=0} = \alpha(x), \;\; \alpha(0) = \alpha(1) = 0, \;\; \frac{\partial u}{\partial t}\mid_{t=0} = \beta(x), \quad u\mid_{x=0} = u\mid_{x=1} = 0,$$

$$u(x,t) \in C^2\{x \in [0;1]\} \cap C^2\{t \geq 0\}, \;\; f(x,t) \in C\{x \in [0;1]\} \cap C\{t \geq 0\}$$

Эти две задачи допускают редукцию к задачам Коши из утверждения 2, поэтому в соответствии с полученными формулами можно получить обобщенные или непрерывные (при дополнительных условиях) решения сформулированных задач.

Эти результаты были представлены на всероссийской конференции в Екатеринбурге в 1998 г. [18] и в Новосибирске в 1999 г. на международной конференции [19].

6 Фундаментальные оператор-функции вырожденных интегральных и полных дифференциальных операторов 2-го порядка

В этом пункте нам потребуются некоторые сведения об обобщенных жордановых наборах, которые здесь и приведем.

Пусть выполнено условие

1) $D, k(t)-$ *замкнутые линейные операторы из* E_1 *в* $E_2, \overline{D(B)} = \overline{D(k)} = E_1, D(k)-$ *не зависит от* $t, D(B) \subset D(k), \overline{R(B)} = R(B), k(t)-$ *сильно непрерывна на* $D(k)$ *и достаточно гладкая функция,* $B-$ *фредгольмов.*

Определение 3 *Элемент* $\varphi \in N(B)$ *имеет обобщенную жорданову цепочку длины* p *относительно оператор-функции* $k(t)$, *если существует* p *элементов* $\varphi^{(i)} \in E_1$, *удовлетворяющих соотношениям*

$$\varphi^{(1)} = \varphi,\ B\varphi^{(i)} = l_{i-1}(\varphi),\ i = \overline{2, p},$$

где

$$l_i(\varphi) = \sum_{j=1}^{i} k^{(i-j)}(0)\varphi^{(j)},\ i = \overline{1, p-1},$$

причем при $i = \overline{1, p-1},\ j = \overline{1, n}$

$$\varphi^{(i+1)} = \Gamma l_i(\varphi),\ < l_i(\varphi), \phi_j >= 0$$

и хотя бы одно из чисел $< l_p(\varphi), \phi_j >,\ j = \overline{1, n}$ *отлично от нуля.*

Пусть $\{\gamma_i,\ i = \overline{1, n}\} \in E_2-$ *система биортогональных элементов к базису* $\phi_i,\ i = \overline{1, n}$ *ядра* $N(B^*)$ *[8]. В предположении, что пара* $\{\varphi_i,\ \gamma_i\},\ i = \overline{1, n}$ *является биканонической [16, 17] построим для элементов базиса ядра* $N(B)$ *обобщенные жордановы цепочки*

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i,\ \varphi_i^{(k)} \in E_1,\ i = \overline{1, n},\ k = \overline{1, p_i},\ p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_n.$$

Справедливы соотношения

$$B\varphi_i^{(1)} = 0,\ B\varphi_i^{(k)} = l_{k-1}(\varphi_i),\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p_i};$$

$$\varphi_i^{(k)} = \Gamma l_{k-1}(\varphi_i),\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{2,p_i};$$

$$< l_k(\varphi_i), \phi_j >= 0,\ i,j = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p_i - 1};$$

$$< l_{p_i}(\varphi_i), \phi_j >= \delta_{ij},\ i,j = \overline{1,n};$$

$$< l_{p_i+k}(\varphi_i), \phi_j >= 0,\ j \neq i,\ j > i.$$

Совокупность элементов $\varphi_i^{(k)} \in E_1,\ i = \overline{1,n}\ j = \overline{1,p_i}$ *называется полным обобщенным жордановым набором оператора* B *относительно оператор-функции* $k(t)$.

Замечание 6 *В этом случае [18] оператор* B^* *имеет полный обобщенный жорданов набор* $\{\phi_i^{(k)}\}$ *относительно оператор-функции* $k^*(t)$, *при этом*

$$\phi_i^{(1)} = \phi_i,\ \phi_i^{(k)} \in E_2^*,\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{1,p_i};$$

$$B^*\phi_i^{(1)} = 0,\ B^*\phi_i^{(k)} = l_{k-1}^*(\phi_i),\ i = \overline{1,n},\ k = \overline{2,p_i};$$

$$\phi_i^{(k)} = \Gamma^* l_{k-1}^*(\phi_i),\ i = \overline{1,n} k = \overline{2,p_i},$$

здесь $l_i^*(\phi_i) = \sum_{j=1}^{i} k^{*(i-j)}(0)\phi^{(j)}$.

Элементы φ_i *и* ϕ_j *при* $i = j$ *имеют цепочки одинаковой длины, при этом*

$$z_i = l_{p_i}(\varphi_i),\ \gamma_i = l_{p_i}^*(\phi_i),\ i = \overline{1,n}.$$

Пусть $\mathcal{R}(t)$ *резольвента ядра* $k(t)\Gamma$. *Введем проекторы* $\mathcal{Q}_i =< \bullet, \phi_i > z_i,\ i = \overline{1,n},\ \mathcal{Q} = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Q}_i$.

Лемма 2 *Если существует полный обобщенный жорданов набор оператора* B *относительно оператор-функции* $k(t)$, *то*

$$\mathcal{R}^{(k)}(0) z_i = l_{k+1}(\varphi_i),\ i = \overline{1,n},\ k \geq 0;$$

$$\mathcal{Q}\mathcal{R}^{(k)}(0)\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i\mathcal{R}^{(k)}(0)\mathcal{Q} = \begin{cases} 0, & k < p_i - 1 \\ \mathcal{Q}_i, & k = p_i - 1. \end{cases}$$

Доказательство. *При* $k = 0$

$$\mathcal{R}(0)z_i = k(0)\Gamma z_i = k(0)\varphi_i^{(1)} = l_1(\varphi_i).$$

Далле индукцией по k *получаем, если* $k > 0$, *то*

$$\mathcal{R}^{(k)}(0)z_i = (k^{(k)}(0)\Gamma + \sum_{j=0}^{k-1} k^{(k-1-j)}(0)\Gamma\mathcal{R}^{(j)}(0))z_i =$$

$$= k^{(k)}(0)\varphi_i^{(1)} + \sum_{j=0}^{k-1} k^{(k-1-j)}(0)\varphi_i^{(j+2)} = l_{k+1}(\varphi_i).$$

Отсюда

$$\mathcal{Q}\mathcal{R}^{(k)}(0)\mathcal{Q}_i = (\sum_{j=1}^{n} < \bullet, \phi_j > z_j) l_{k+1}(\varphi_i) < \bullet, \phi_i >= \sum_{j=1}^{n} < l_{k+1}(\varphi_i), \phi_j > z_j < \bullet, \phi_i >$$

и в силу биканоничности пары $\{\varphi_i, \gamma_i\}$ *получаем требуемое равенство. Аналогично доказывается другое равенство.*

Лемма 2 доказана.

Теорема 6 *Если операторы* B *и* $k(t)$ *удовлетворяют условию 1), оператор* B *имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции* $k(t)$, *то сверточный интегральный оператор* $(B\delta(t) - k(t)\theta(t))$ *имеет на классе* $(K_+^l)'(E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию порядка* p *вида*

$$\mathcal{E}(t) = (\Gamma\delta(t) + \Gamma\mathcal{R}(t)\theta(t)) * (I\delta(t) + \mathcal{N}(t)\theta(t)) *$$

$$* \{(I - \mathcal{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \bullet, \phi_i^{(j)} > z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t)\},$$

здесь $p = \max(p_i,\ i = \overline{1,n})$, $\mathcal{N}(t)-$ *резольвента ядра* $\sum_{i=1}^{n}(-\mathcal{Q}_i\mathcal{R}^{(p_i)}(t)\theta(t))$.

Доказательство. *Введем обозначение*

$$F(t) = (I\delta(t) + \mathcal{N}(t)\theta(t)) * \{(I - \mathcal{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \bullet, \phi_i^{(j)} > z_i \delta^{(p_i+1-j)}(t)\},$$

тогда $\forall u(t) \in (K_+^l)'(E_2)$

$$(B\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \mathcal{E}(t) * u(t) =$$

$$= (B\delta(t) - k(t)\theta(t)) * \Gamma\delta(t) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t) =$$

$$= ((I - \mathcal{Q})\delta(t) - k(t)\Gamma\theta(t)) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t) =$$

$$= ((I\delta(t) - k(t)\Gamma\theta(t)) - \mathcal{Q}\delta(t)) * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t) =$$
$$= (I\delta(t) - \mathcal{Q}\delta(t) - \mathcal{Q}\mathcal{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t) =$$
$$= ((I - \mathcal{Q})\delta(t) - \mathcal{Q}\mathcal{R}(t)\theta(t)) * F(t) * u(t).$$

Поскольку

$$(I - \mathcal{Q})\delta(t) * F(t) * u(t) = (I - \mathcal{Q})\delta(t) * u(t),$$

докажем равенство

$$-\mathcal{Q}\mathcal{R}(t)\theta(t) * F(t) * u(t) = \mathcal{Q}\delta(t) * u(t).$$

Предварительно для $F(t)$ *получим иное представление, т.к.* $\mathcal{Q}_i\mathcal{R}^{(p_i-1)}(0)(I - \mathcal{Q}) = 0$, *то*

$$F(t) = (I\delta(t) + \mathcal{N}(t)\theta(t)) * \{(I - \mathcal{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \bullet, \phi_i^{(j)} > z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t)\} =$$
$$= (I\delta(t) + \mathcal{N}(t)\theta(t)) * \{(I - \mathcal{Q})\delta(t) -$$
$$- \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i\delta^{(p_i)}(t) + \sum_{j=1}^{p_i} \mathcal{Q}_i\mathcal{R}^{(j-1)}(0)(I - \mathcal{Q})\delta^{(p_i-j)}(t)\} =$$
$$= (I - \mathcal{Q})\delta(t) - (I\delta(t) + \mathcal{N}(t)\theta(t)) * \sum_{i=1}^{n} \mathcal{Q}_i\mathcal{R}^{(p_i)}(t)\theta(t) * (I - \mathcal{Q})\delta(t) -$$
$$-(I\delta(t) + \mathcal{N}(t)\theta(t)) * \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i\delta^{(p_i)}(t) + \sum_{j=1}^{p_i} \mathcal{Q}_i\mathcal{R}^{(j-1)}(0)(I - \mathcal{Q})\delta^{(p_i-j)}(t)) =$$
$$= (I - \mathcal{Q})\delta(t) - (I\delta(t) + \mathcal{N}(t)\theta(t)) * \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i\delta(t) + \mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I - \mathcal{Q})\theta(t))^{(p_i)}.$$

Поэтому

$$-\mathcal{Q}\mathcal{R}(t)\theta(t) * F(t) * u(t) =$$
$$= -\mathcal{Q}\mathcal{R}(t)\theta(t) * \{(I - \mathcal{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i\delta(t) + \mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I - \mathcal{Q})\theta(t))^{(p_i)} -$$
$$-\mathcal{N}(t)\theta(t) * \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i\delta(t) + \mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I - \mathcal{Q})\theta(t))^{(p_i)}\} * u(t) =$$
$$= \{-\mathcal{Q}\mathcal{R}(t)(I - \mathcal{Q})\theta(t) + \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}\mathcal{R}(t)\mathcal{Q}_i\theta(t))^{(p_i)} * (I\delta(t) + \mathcal{R}(t)(I - \mathcal{Q})\theta(t)) +$$
$$+\mathcal{Q}\mathcal{R}(t)\theta(t) * \mathcal{N}(t)\theta(t) * \sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i\delta(t) + \mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I - \mathcal{Q})\theta(t))^{(p_i)}\} * u(t).$$

В силу леммы 2

$$-\mathcal{QR}(t)\theta(t)*F(t)*u(t)=\{-\mathcal{QR}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{QR}^{(p_i)}(t)\mathcal{Q}_i\theta(t)+\mathcal{Q}_i\delta(t))*(I\delta(t)+\mathcal{R}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t))+$$

$$+\mathcal{QR}(t)\theta(t)*\mathcal{N}(t)\theta(t)*\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i\delta(t)+\mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t))^{(p_i)}\}*u(t)=$$

$$=\{-\mathcal{QR}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t)+\sum_{i=1}^{n}\mathcal{QR}^{(p_i)}(t)\theta(t)*(\mathcal{Q}_i\delta(t)+\mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t))+$$

$$+\mathcal{Q}\delta(t)+\mathcal{QR}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t)+$$

$$+\mathcal{QR}(t)\theta(t)*\mathcal{N}(t)\theta(t)*\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{Q}_i\delta(t)+\mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t))^{(p_i)}\}*u(t)=$$

$$=\{\mathcal{Q}\delta(t)+\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{QR}^{(p_i)}(t)\theta(t)+(\mathcal{QR}(t)\theta(t))^{(p_i)}*\mathcal{N}(t)\theta(t))*$$

$$*(\mathcal{Q}_i\delta(t)+\mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t))\}*u(t).$$

Дальнейшее доказательство проведем для случая $p_1\le p_2\le\ldots\le p_n=p$, более общий случай отличается от этого существенным "техническим" усложнением выкладок без каких-либо идейных новшеств

$$\{\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{QR}^{(p_i)}(t)\theta(t)+(\mathcal{QR}(t)\theta(t))^{(p_i)}*\mathcal{N}(t)\theta(t))*$$

$$*[\mathcal{Q}_i\delta(t)+\mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t)]\}*u(t)=$$

$$=\{\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{QR}^{(p)}(t)\theta(t)+\mathcal{QR}^{(p)}(t)\theta(t)*\mathcal{N}(t)\theta(t)-$$

$$-(\mathcal{QR}^{(p-1)}(0)\delta(t)+\mathcal{QR}^{(p-2)}(0)\delta'(t)+\ldots+\mathcal{QR}(0)\delta^{(p-1)}(t))*$$

$$*\sum_{j=1}^{n}\mathcal{Q}_j\mathcal{R}^{(p)}(t)\theta(t)*(I\delta(t)+\mathcal{N}(t)\theta(t)))*[\mathcal{Q}_i\delta(t)+\mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t)]\}*u(t)=$$

$$=\{\sum_{i=1}^{n}(\mathcal{QR}^{(p)}(t)\theta(t)-\mathcal{QR}^{(p)}(t)\theta(t))*(I\delta(t)+\mathcal{N}(t)\theta(t))*$$

$$*[\mathcal{Q}_i\delta(t)+\mathcal{Q}_i\mathcal{R}(t)(I-\mathcal{Q})\theta(t)]\}*u(t)=0.$$

Теорема 4 доказана.

Пусть выполнено условие

2) $B,\ A_1,\ A_0-$ замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{D(B)}=\overline{D(A_1)}=\overline{D(A_0)}=E_1,\ D(B)\subset D(A_0)\cap D(A_1),\ \overline{R(B)}=R(B),\ B-$ фредгольмов.

Введем обозначения

$$P_1(t) = \exp(\frac{A_1\Gamma}{2}t), \quad K_1 = (\frac{A_1\Gamma}{2})^2 + A_0\Gamma,$$

$\mathcal{R}_1(t)-$ *резольвента ядра* $tP_1(t)K_1$,

$$\mathcal{M}(t) = (tP_1(t))'' + K_1 tP_1(t) + \int_0^t \mathcal{R}_1''(t-s)sP_1(s)ds.$$

Методом математической индукции доказывается следующая (аналогичная лемме 2)

Лемма 3 *Если существует полный обобщенный жорданов набор оператора B относительно оператор-функции $k(t) = A_1t + A_0$, то*

$$\mathcal{M}^{(k)}(0)z_i = l_{k+1}(\varphi_i),\ i = \overline{1,n},\ k \geq 0;$$
$$\mathcal{Q}\mathcal{M}^{(k)}(0)\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_i\mathcal{M}^{(k)}(0)\mathcal{Q} = \begin{cases} 0, & k < p_i - 1 \\ \mathcal{Q}_i, & k = p_i - 1. \end{cases}$$

Дублированием всех рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 4, доказывается

Теорема 7 *Если выполнено условие 2), оператор B имеет полный обобщенный жорданов набор относительно оператор-функции $k(t) = A_1t + A_0$, то дифференциальный оператор $B\delta''(t) - A_1\delta'(t) - A_0\delta(t)$ имеет на классе $(K_+^l)'(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию порядка p вида*

$$\mathcal{E}(t) = (\Gamma\delta(t) + \Gamma\mathcal{R}_1(t)\theta(t)) * tP_1(t)\theta(t) * (I\delta(t) + \mathcal{N}_1(t)\theta(t)) *$$
$$*\{(I - \mathcal{Q})\delta(t) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \bullet, \phi_i^{(j)} > z_i\delta^{(p_i+1-j)}(t)\},$$

где $p = \max(p_i,\ i = \overline{1,n})$, $\mathcal{N}_1(t)-$ *резольвента ядра* $\sum_{i=1}^{n}(-\mathcal{Q}_i\mathcal{M}^{(p_i)}(t)\theta(t))$.