О роли жордановых наборов в теории вырожденных дифференциально-операторных уравнений

Н.А.Сидоров, О.А.Романова
Иркутский государственный университет

Abstract

Рассмотрены методы редукции дифференциально-операторных уравнений с фредгольмовым оператором при главной части к регулярным задачам. Установлена связь между выбором начальных условий и жордановой структурой операторных коэффициентов уравнения. Доказана теорема существования и единственности задачи Коши. Построены левый и правый регуляризаторы для сингулярного дифференциально-операторного уравнения.

1 Введение

Рассмотрим уравнение

$$L(D)u(x) = f(x), \tag{1}$$

где $L(D) = \sum_{|\alpha|\leq l} B_\alpha D^\alpha$, $x = (t, x')$– точка пространства R^{m+1}, $x' = (x_1, \ldots, x_m)$, $D = (D_t, D_{x_1}, \ldots, D_{x_m})$, $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_m)$, $|\ \alpha\ | = \alpha_0 + \alpha_1 + \cdots \alpha_m$, α_i– целые неотрицательные индексы , $D^\alpha = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^{\alpha_0} \ldots \partial x_m^{\alpha_m}}$, $B_\alpha : D_\alpha \subset E_1 \to E_2$ – замкнутые линейные операторы с плотными областями определения в E_1, $x \in \Omega$, где $\Omega \subset R^{m+1}$, $|\ t\ | \leq T$, E_1, E_2– банаховы пространства, и $f : \Omega \to E_2$– аналитическая функция по x' и достаточно гладкая по t. Задача Коши для уравнения (1), когда $E_1 = E_2 = R^n$ и матрица $B = B_{l0\ldots0}$ не вырождена, достаточно хорошо изучена в работах И.Г.Петровского [2]. В случае, когда оператор B необратим, теория постановки начальных и граничных задач (1) не достаточно развита даже в конечномерном случае.

Пусть $B = B_{l0\ldots0}$ - фредгольмов оператор, $D(B) \subseteq D(B_\alpha)\ \ \forall\alpha$ и $\dim N(B) = n \geq 1$, тогда задача Коши с условиями $D_t^i u|_{t=0} = g_i(x'),\ \ i = 0, \ldots, l-1$ для уравнения (1) не имеет классического решения для произвольной правой части $f(x)$. Предположим, что среди коэффициентов B_α есть оператор $A = B_{l_1 0\ldots0}$, $l_1 < l$, относительно которого B имеет полный A- жорданов набор [1]. В этом случае показано, что естественные постановки начальных задач для уравнения (1) можно получить, раскладывая пространство E_1 на прямую сумму подпространств в соответствии с жордановой структурой операторных коэффициентов B_α и задавая условия отдельно для каждой проекции искомого решения. При разумном выборе прямых разложений, проекции решения должны определяться из регулярных задач.

При исследовании уравнения (1) проведена редукция сингулярного уравнения к регулярным задачам. Получены достаточные условия существования единственного классического решения уравнения (1) с начальными условиями

$$D_t^i u|_{t=0} = g_i(x'), \quad i = 0, 1, \dots, l_1 - 1, \tag{2}$$

$$(I - P) D_t^i u|_{t=0} = g_i(x'), \quad i = l_1, \dots, l - 1, \tag{3}$$

где $g_i(x')$ – аналитические функции со значениями в E_1, $Pg_i(x') = 0, \quad i = l_1, \dots, l - 1$, $P-$ проектор, определяемый ниже формулой (4).

Построены левый и правый регуляризаторы для сингулярного дифференциально-операторного уравнения.

2 Выбор проекторов и редукция начальной задачи к форме Ковалевской

Предположим, что выполняется следующее условие:

Условие 1. Фредгольмов оператор B имеет полный A - жорданов набор ϕ_i^j, B^* имеет полный A^* - жорданов набор ψ_i^j, $\quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,p_i}$, и системы $\gamma_i^{(j)} \equiv A^*\psi_i^{(p_i+1-j)}, z_i^{(j)} \equiv A\phi_i^{(p_i+1-j)}$, где $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,p_i}$, соответственно биортогональны [1] (здесь p_i -длины жордановых цепочек оператора B). Напомним, что условие 1 выполнено, если оператор $B + \lambda A$ непрерывно обратим при $0 <| \lambda |< \epsilon$ [1].

Введем проекторы

$$P = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} < ., \gamma_i^{(j)} > \phi_i^{(j)} \equiv (< ., \Upsilon > \Phi), \tag{4}$$

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} < ., \psi_i^{(j)} > z_i^{(j)} \equiv (< ., \Psi > Z), \tag{5}$$

порождающие прямые разложения пространств E_1, E_2

$$E_1 = E_{1k} \oplus E_{1\infty-k}, E_2 = E_{2k} \oplus E_{2\infty-k},$$

где $k = p_1 + \cdots + p_n$ - корневое число.

Тогда любое решение уравнения (1) может быть представлено в следующем виде

$$u(x) = \Gamma v(x) + (C(x), \Phi), \tag{6}$$

где $\Gamma = (B + \sum_{i=1}^{n} < ., \gamma_i^{(1)} > z_i^{(1)})^{-1}$ - ограниченный оператор [1], $v \in E_{2\infty - k}$, $C(x) = (C_{11}(x), \ldots, C_{1p_1}(x), \ldots, C_{n1}(x), \ldots, C_{np_n}(x))^T$,
$\Phi = (\phi_1^{(1)}, \ldots, \phi_1^{(p_1)}, \ldots, \phi_n^{(1)}, \ldots, \phi_n^{(p_n)})^T$, где T обозначает транспонирование.

Неизвестные функции $v(x) : \Omega \subset R^{m+1} \to E_{2\infty-k}$ и $C(x) : \Omega \subset R^{m+1} \to R^k$ на основании начальных условий (2),(3), удовлетворяют следующим условиям:

$$D_t^i v|_{t=0} = \begin{cases} B(I-P)g_i(x'),\ i = 0, \ldots, l_1 - 1, \\ Bg_i(x'),\ i = l_1, \ldots, l-1, \end{cases} \tag{7}$$

$$D_t^i C|_{t=0} = \beta_i(x'),\ i = 0, \ldots, l_1 - 1. \tag{8}$$

Здесь $\beta_i(x')$ - коэффициенты проекций $Pg_i(x'),\ i = 0, \ldots, l_1 - 1.$

Предположим, что выполняется

Условие 2. Операторные коэффициенты B_α в уравнении (1) удовлетворяют на $D(B_\alpha)$ по крайней мере одному из пяти условий:

1. $B_\alpha P = QB_\alpha$, то есть B_α (P,Q) - коммутируют, кратко, $\alpha \in q_0$;
2. $B_\alpha P = 0$, кратко $\alpha \in q_1$;
3. $QB_\alpha = 0$, кратко $\alpha \in q_2$;
4. $(I-Q)B_\alpha = 0$, кратко $\alpha \in q_3$;
5. $B_\alpha(I-P) = 0$, кратко $\alpha \in q_4$;

Введем обозначения $(\Phi, C) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} \phi_i^{(j)} C_i^{(j)}$, где $C \in R^k$. Тогда $< B_\alpha(\Phi, C), \Psi >= \mathcal{A}^{\mathcal{T}}{}_\alpha C$, где $\Psi = (\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_1^{(p_1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(p_n)})^T$.

Согласно условию 1 и результатам [2] $\alpha \in q_0$ тогда и только тогда, когда

$$B_\alpha^* \Psi = \mathcal{A}^{\mathcal{T}}{}_\alpha \Upsilon,\ B_\alpha \Phi = \mathcal{A}_\alpha Z.$$

Операторы $B \equiv B_{l0\ldots0}$, $A \equiv B_{l_1 0 \ldots 0}$ принадлежат множеству q_0, более того матрицы (P,Q) - коммутирования являются симметричными клеточно-диагональными

$$\mathcal{A}_{\mathrm{B}} = diag(B_1, \ldots, B_n), \mathcal{A}_{\mathrm{A}} = (A_1, \ldots, A_n), \tag{9}$$

где

$$B_i = \begin{bmatrix} 0...0 \\ 0...1 \\ ..... \\ 01...0 \end{bmatrix},$$

$$A_i = \begin{bmatrix} 0...1 \\ .... \\ 1...0 \end{bmatrix}, i = \overline{1, n},$$

если $p_i \geq 2$ и

$$\mathcal{A}_{\mathrm{B}} = 0, \;\; \mathcal{A}_{\mathrm{A}} = I, \tag{10}$$

если $p_i = 1$.

Нетрудно проверить, что для проекторов P, Q, которые определяются формулами (4),(5), выполняется равенство $\Gamma Q = P\Gamma$. Пространства E_{2k}, $E_{2\infty-k}$ являются инвариантными подпространствами оператора Γ. Так как оператор Γ ограничен, $D(B) \subseteq D(B_\alpha)$ и $\overline{D(B_\alpha)} = E_1$, то $B_\alpha\Gamma \in L(E_1 \to E_2)$.

Таким образом, подставляя (6) в уравнение (1) и затем проектируя на подпространство $E_{2\infty-k}$, мы получим уравнение

$$D_t^l v + (I-Q) \sum_{|\alpha|\leq l,\; \alpha\in(q_0,q_1,q_2)\setminus(l0...0)} B_\alpha \Gamma D^\alpha v = (I-Q)(f - \sum_{|\alpha|\leq l, \alpha\in(q_2,q_4)} B_\alpha(D^\alpha C, \Phi)) \tag{11}$$

с условием (7).

Для того, чтобы определить вектор-функцию $C(x)$, мы проектируем уравнение (1), где u определяется формулой (6), на E_{2k}, в результате получим систему

$$\sum_{|\alpha|\leq l, \alpha\in(q_0,q_3,q_4)} M_\alpha D^\alpha C = b(x, v) \tag{12}$$

с начальным условием (8). В системе (12)

$$M_\alpha = \| < B_\alpha \phi_l^s, \psi_i^{(j)} > \|, \;\; i, l = 1, \ldots n, \; j = 1, \ldots, p_i, s = 1, \ldots, p_l, -$$

матрицы размерности $k \times k$, $b(x, v)-$ вектор коэффициентов проекции

$$Q(f - \sum_{|\alpha|\leq l, \alpha\in(q_1,q_3)} B_\alpha \Gamma D^\alpha v).$$

Таким образом начальная задача (1), (2), (3) редуцируется к задачам (11), (7) и (12), (8).

Напомним, что если $\alpha \in q_0$, то $M_\alpha = \mathcal{A}_\alpha^T$. При $k = n$ из формул (10) следует, что

$$M_{l0...0} = 0, \; M_{l_1 0...0} = I,$$

и при $k > n$ матрицы $M_{l0...0}$, $M_{l_1 0...0}$ определяются формулами (9).

Теорема 1 *Пусть выполнены условия 1,2 и функция $f(x)$ является аналитической по x' и достаточно гладкой по t. Кроме того,*

1. $(q_2, q_4) \subset q_0$ *или* $(q_1, q_3) \subset q_0$;

2. $QB_\alpha P = 0$ *для всех* $\alpha \in (q_0, q_3, q_4) \setminus (l0\dots0), (l_1 0\dots0)$.

Тогда задача (1), (2), (3) имеет единственное классическое решение (6).

Доказательство 1 *Заметим, что при* $\alpha \in q_0$ *и при всех* $C \quad (I-Q)B_\alpha(D^\alpha C, \Phi) = 0$, *а также выполняется равенство* $QB_\alpha \Gamma v = 0$, *где* $Qv = 0$. *Тогда согласно условию 1 правая часть уравнения (11) независит от вектор - функции C(x) или правая часть уравнения (12) независит от v(x).*

Уравнение (11) разрешимо относительно $D_t^l v$, *то есть имеет форму Ковалевской с ограниченными операторными коэффициентами. На основании условия 2 система (12) имеет следующий вид*

$$M_{l0\dots0} D_t^l C + M_{l_1 0\dots0} D_t^{l_1} C = b(x, v) \tag{13}$$

Если $k = n$, *то* $M_{l0\dots0} = 0, \;\; M_{l_1 0\dots0} = I$ *и система (13) имеет порядок* l_1. *Если* $k > n$, *то система (13) расщепляется на n независимых подсистем:*

$$\frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}} C_{ip_i} = b_{ip_i}(x, v), \frac{\partial^{l_1}}{\partial t^{l_1}} C_{ip_i - k} + \frac{\partial^l}{\partial t^l} C_{ip_i - k+1} = b_{ip_i - k}(x, v), i = 1, \dots, n, \;\; k = 1, \dots, p_i - 1. \tag{14}$$

Каждая подсистема из (14) является регулярной, так как представляет собой рекуррентную последовательность дифференциальных уравнений порядка l_1. *Таким образом, система (11),(12) с начальными условиями (7),(8) имеет форму Ковалевской и, следовательно, имеет единственное решение. Определяя v и C из регулярных систем (11),(12) и подставляя их в (6), получим решение уравнения (1).*

Замечание 1 *Пусть операторы* B_α *в условии 2 зависят от* x *при* $\alpha \neq (l0\dots0)$, $(l_1 0\dots0)$. *Тогда коэффициенты в системах (11),(12) также зависят от* x. *Если эти коэффициенты являются аналитическими по* x' *и достаточно гладкими по* t, *то теорема 1 остается справедливой. Как в [3] требуемая гладкость коэффициентов и функции* $f(x)$ *по* t *определяется максимальной длиной* A*- жордановых цепей оператора* B. *Если* $p = \max(p_1, \dots, p_n)$, *то (см. [3]) необходимо существование производных по* t $p-1$ *порядка от функции* $f(x)$ *и от коэффициентов систем (11),(12).*

2.1 ослабление условий 1, 2 в теореме 1

Условия 1, 2 в теореме 1 можно существенно ослабить, сохраняя регулярность систем (11),(12) и, следовательно, результат теоремы 1. Например, при $k = n$ вместо условий 1, 2 можно потребовать выполнения следующих условий

1. $\max_{\alpha \in (q_2, q_4)} \mid \alpha \mid < l$;

2. $QB_\alpha P = 0$ при $\alpha \in (q_0, q_3, q_4)$, $\;l_1 <\mid \alpha \mid \leq l$.

Пусть $k > n$. Так как матрица $M_{l_1 0\ldots 0}$ является ортогональной, то система (12) имеет вид

$$D_t^{l_1} C + M_{l_1 0\ldots 0} \sum_{|\alpha| \leq l, \alpha \neq (l_1 0 \ldots 0)} M_\alpha D^\alpha C = M_{l_1 0\ldots 0} b(x, v). \tag{15}$$

Заметим, что

$$M_{l_1 0\ldots 0} M_{l 0\ldots 0} = (M_1, \ldots, M_n) -$$

клеточно-диагональные матрицы и

$$M_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ..0 \\ \ldots\ldots & & & \\ 0 & 0 & \ldots 0 & 1 \\ 0 & 0 & \ldots 0 & .0 \end{bmatrix}, i = 1, \ldots, n.$$

Запишем единичную матрицу I в блочной форме

$$I = \begin{bmatrix} I_{p_1} \\ \ldots\ldots \\ I_{p_n} \end{bmatrix},$$

где $I_{pi}-$ блоки размерности $p_i \times k$.

Введем матрицу перестановок

$$R_{i_1, \ldots, i_n} = \begin{bmatrix} I_{i1} \\ \ldots\ldots \\ I_{in} \end{bmatrix},$$

где $(i_1, \ldots, i_n)-$ перестановка чисел $(p_1, \ldots, p_n)$. Тогда при $k > n$ вместо условия 2 теоремы 1 можно потребовать

2. Пусть: в (15) коэффициенты $M_{l_1 0\ldots 0} M_\alpha$ при $l_1 <\mid \alpha \mid \leq l$ являются клеточно-диагональными матрицами, где их диагональные блоки - верхне-треугольные матрицы размерности $p_i \times p_i$, на главных диагоналях которых стоят нули. Пусть другие матричные коэффициенты в (15) имеют такой же вид или могут быть сведены к верхне-треугольному виду с помощью умножения слева на матрицу перестановок $R_{i_1, \ldots, i_n}$.

Тогда система (15) может быть сведена к рекуррентной последовательности дифференциальных уравнений формы Ковалевской порядка l_1 и теорема 1 остается справедливой.

3 Левые и правые регуляризаторы сингулярных операторов в банаховых пространствах

Пусть A и $B-$ линейные операторы из X в $Y, X, Y-$ банаховы пространства, $x(t)-$ абстрактная функция, $t \in R^n$ со значениями в $X(Y)$. Множество таких функций обозначим через $X(t)(Y(t))$. Введем оператор L_t, определенный на X_t и Y_t и перестановочный с операторами B, A, независимыми от t. Примерами такого оператора L_t будут операторы дифференцирования и интегрирования по t, разностные операторы и их комбинации. Отметим, что операторы, разрешенные относительно старших производных, обычно порождают корректные начально-краевые задачи, а операторам, неразрешенным относительно старших производных, как правило отвечают вырожденные задачи (см.параграф 2). Поэтому естественно ввести

Определение 1 *Оператор $L_t - C$, где $C : X \to X(C : Y \to Y)$, разрешенный относительно оператора L_t назовем регулярным.*

Рассмотрим оператор $L_tB - A$, действующий из X_t в Y_t, где $B, A-$ замкнутые линейные операторы из X в Y с плотными областями определения, причем $D(B) \subseteq D(A)$. Если B обратим, то отображение $L_tB - A$ сводится к регулярному умножением на B^{-1}. Если B необратим, то выражение $L_tB - A$ назовем сингулярным оператором. Пусть в выражении $L_tB - A$ оператор B фредгольмов и $\dim N(B) = n \geq 1$. Если при этом $\lambda = 0-$ изолированная особая точка оператор-функции $B - \lambda A$, то оператор $L_tB - A(BL_t - A)$ допускает в определенном смысле регуляризацию. Для построения регуляризаторов в явном виде используем псевдорезольвенту Шмидта $\Gamma = \hat{B}^{-1}$, где $\hat{B} = B + \sum_{i=1}^n <.,A^*\psi_i^{(p_i)}> A\phi_i^{(p_i)}$. На основании условия 1 параграфа 2 и учитывая равенства $\phi_i^{(j)} = \Gamma A\phi_i^{(j-1)}, \quad \psi_i^{(j)} = \Gamma^* A^* \psi_i^{(j-1)}, \quad j = 2, \dots, p_i, \quad i = 1, \dots, n$ нетрудно проверить следующие тождества

$$(\Gamma - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} L_t^j <.,\psi_i^{(p_i+1-j)}> \phi_i)(L_tB - A) = L_t - \Gamma A,$$

$$(L_tB - A)(\Gamma - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} L_t^{p_i+1-j} <.,\psi_i> \phi_i^{(j)}) = L_t - A\Gamma.$$

Таким образом справедлива

Теорема 2 *Пусть выполнено условие 1 параграфа 2. Тогда*

$$(\Gamma - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} L_t^j <.,\psi_i^{(p_i+1-j)}> \phi_i)$$

является левым регуляризатором оператора $L_tB - A$, а оператор

$$\Gamma - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p_i} L_t^{p_i+1-j} <.,\psi_i> \phi_i^{(j)}$$

- его правым регуляризатором.

Отметим, что полученные в данном параграфе результаты можно использовать при решении вырожденных дифференциально-операторных уравнений с фредгольмовым оператором при главной части (см. параграф 2).

References

[1] М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.,1969.

[2] И.Г.Петровский. Задача Коши для систем дифференциальных уравнений с частными производными. Математический сборник, 1937, 5, с.815-870.

[3] Н.А.Сидоров, О.А.Романова, Е.Б.Благодатская. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части //Дифферен.уравнения, 1994, 4, с.729-731.

[4] Н.А.Сидоров. Начальная задача для дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором в главной части //Вестник Челябинского ун-та. Серия математика и механика, 2(5), 1999,с.103-112.

Работа поддержана грантом INTAS - 2000-15.