

# МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ для студентов III-IV курсов

## спецкурс

### Робастные численные методы для решения задач с погранслоями

А.И. Дрегля

ИМЭИ ИГУ

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Общее введение в численные методы для задач возникающих в гидродинамике (задач с погранслоями). Современное состояние науки в данной области. Мотивация данного курса. Составление численного метода.

### 1.1 Расположение и толщина погранслоя

Начнем с простой линейной задачи конвекции-диффузии

$$\varepsilon u''_{\varepsilon}(x) + u'_{\varepsilon}(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega = (0, 1), \quad (1)$$

$$u_{\varepsilon}(0) = 0, \quad u_{\varepsilon}(1) = 50, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  - положительный малый параметр называемый параметром сингулярного возмущения, причем  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

Отметим, что при упоминании о малом параметре мы подразумеваем изучение сингулярно возмущенных задач. Решение сингулярно - возмущенной задачи вида (1) представляет собой гладкую функцию с сингулярной составляющей, называемой функцией погранслоя. Пограничный слой соответствует функции погранслоя. Это подобласть, в которой величиной сингулярной составляющей нельзя пренебречь. Физические свойства, связанные с решением, содержащим функцию погранслоя, отражаются математическими свойствами решения сингулярно возмущенного дифференциального уравнения. Мы рассматриваем сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения с малым параметром  $\varepsilon$  умноженным на некоторый или все элементы, содержащие наивысший порядок производных. Точное решение задачи (1) имеет следующий вид

$$u_\varepsilon(x) = 50 \left( \frac{1 - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right). \quad (3)$$

При малом параметре (например  $\varepsilon = 0.001$ ) решение  $u_\varepsilon$  будет выглядеть как на рис. 1 и совершенно очевидно, что существует пограничный слой около граничной точки  $x = 0$ . Соответственно функция погранслоя - это экспоненциальная функция  $e^{-x/\varepsilon}$ .

В настоящее время существует хорошо развитая аналитическая теория построения асимптотических разложений таких решений. Численные методы решения задач с погранпными слоя стали активно развиваться лишь в последнее время.

Цель курса - продемонстрировать построение эффективного численного метода для решения задач с погранфункцией, при наличии априорных знаний о расположении и толщине погранслоя.

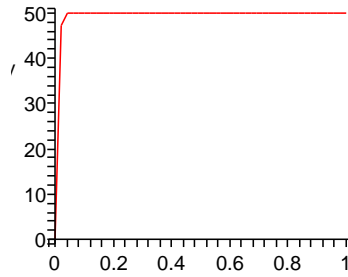


Рис. 1: Решение  $u_{0.01}(x)$  задачи (1) с  $\varepsilon = 0.01$  для  $x \in [0, 1]$

Расположение пограничного слоя часто легко определить, но не так просто найти толщину  $\omega$ . Чтобы продемонстрировать это, возьмем типичную функцию погранслоя  $e^{-x/\varepsilon}$ , график которой представлен на рис. 2. Очевидно, что погранслоем расположен на границе  $x = 0$  и существуют несколько возможных способов определить толщину. К примеру можно положить  $\omega$  наименьшим возможным числом

$$\sup_{x \geq \omega} e^{-x/\varepsilon} \leq 10^{-8}.$$

Такое определение толщины погранслоя соответствует функции погранслоя  $\omega = 8\varepsilon \ln 10 = O(\varepsilon)$ . Более интересным представляется следующее определение  $\omega$

$$\sup_{x \geq \omega} e^{-x/\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

В этом случае толщина погранслоя соответствует функции погранслоя  $\omega = \varepsilon \ln 1/\varepsilon$ . Кроме того,  $\omega$  может быть определено для каждого целого  $k : 0 \leq k \leq 3$  как

$$\sup_{x \geq \omega} \left| \frac{d^k}{dx^k} e^{-x/\varepsilon} \right| \leq \varepsilon.$$

В этом случае толщина погранслоя соответствует функции погранслоя  $\omega = 4\varepsilon \ln 1/\varepsilon$ , которая от предыдущего определения отличается наличием множителя 4.

Последнее определение хорошо подходит для широкого класса сингулярно возмущенных задач в случае, если нас интересует не только решение, но и свойства

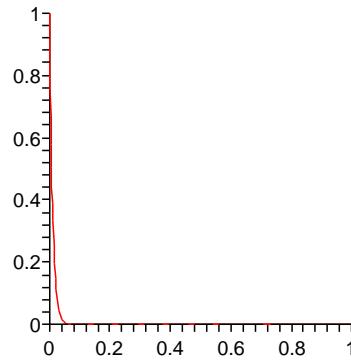


Рис. 2: Обыкновенная функция пограничного слоя  $e^{-x/\epsilon}$

ее производных. Мы отметим, что с таким определением значение функции  $e^{-x/\epsilon}$  и первые 3 производных экспоненциально малы вне пограничного слоя. Также отметим, что для вывода стандартного доказательства теоретических ошибок на границе необходимо, чтобы решение имело три непрерывных производных.

## 1.2 Нормы для функции погранслоя

На рис. 1 заметим, что решение  $u_\epsilon$  задачи (1) за исключением окрестности точки  $x = 0$ , равно постоянной функции  $c(x) \equiv 50$ , см. рис. 3. На первый взгляд не видна разница на графиках, но если увеличить шкалу по оси абсцисс на маленьком отрезке  $[0, 10^{-3}]$  как на графике 4, мы видим совершенно разное поведение в окрестности нуля, потому что при  $x \rightarrow 0$ , одна функция принимает значение равное 50, а другая стремится к нулю. Цель этого сравнения показать, что изучение функций погранслоя очень важно и нельзя полагаться только на графический вид функции. При очень малом  $\epsilon$  пограничный слой в общем не будет распознан и следовательно само существование его не будет обнаружено.

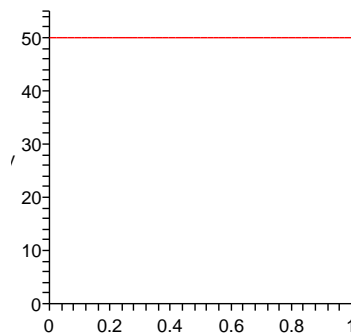


Рис. 3: Постоянная функция  $c(x) = 50$  для  $x \in [0, 1]$ .

Эту трудность можно преодолеть, используя подходящий математический механизм для измерения функции, называемой нормой, которая даст возможность нам различить различные функции. Существует много различных норм, но не все могут быть использованы для определения пограничных слоев.

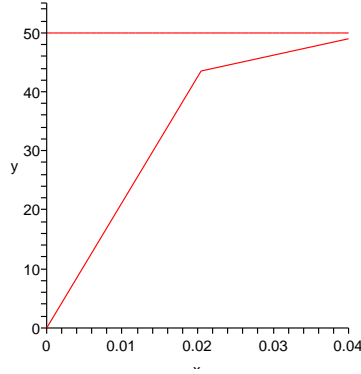


Рис. 4: Решение  $u_{0.01}(x)$  задачи (1) с  $\varepsilon = 0.01$  для  $x \in [0, 0.04]$  и постоянной функцией  $c(x) = 50$  для  $x \in [0, 0.04]$ .

Вначале рассмотрим норму в  $L_1$ , которая определена для любой функции  $f$  на отрезке  $[0, 1]$  следующим образом

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx.$$

В этой норме разница между решением  $u_\varepsilon$  задачи (1) и функцией константой 50 будет следующей

$$\|u_\varepsilon - 50\|_1 = \left\| 50 \frac{e^{-1/\varepsilon} - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right\|_1 = 50 \left( \varepsilon - \frac{e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right).$$

Таким образом, для  $\varepsilon = 0.001$  мы имеем  $\|u_{0.001} - 50\|_1 \cong 0.05$ . Отсюда следует, что норма в  $L_1$  обнаружила небольшую разницу между функциями  $u_{0.001}$  и 50. Мы приходим к выводу, что  $L_1$  не является эффективным механизмом определения разности решения  $u_\varepsilon$  для различных значений  $\varepsilon$ . Например, разница между  $u_{0.001}$  и  $u_{0.000001}$  в норме  $L_1$

$$\|u_{0.001} - u_{0.000001}\|_1 \cong 50(10^{-3} - 10^{-6}) \cong 0.05.$$

Более того, эта норма не подходит для определения разницы между решениями сингулярно - возмущенных задач для одного и того же дифференциального уравнения с различными граничными условиями. Например, рассмотрим следующую задачу

$$\varepsilon \widehat{u}_\varepsilon''(x) + \widehat{u}_\varepsilon'(x) = 0 \quad \forall x \in (0, 1), \quad (4)$$

$$\widehat{u}_\varepsilon(0) = 100, \quad \widehat{u}_\varepsilon(1) = 50, \quad (5)$$

решением которой будет

$$\widehat{u}_\varepsilon(x) = 100 - u_\varepsilon(x).$$

Совершенно очевидно, что  $\widehat{u}_\varepsilon$  и  $u_\varepsilon$  различного типа, так как  $u_\varepsilon$  монотонно возрастающая функция, а  $\widehat{u}_\varepsilon$  - монотонно убывающая, но разность в норме  $L_1$  мала, т.е.

$$\|\widehat{u}_{0.001} - u_{0.001}\|_1 = 2\|50 - u_{0.001}\|_1 \cong 0.1$$

Таким образом наш вывод следующий: норма в  $L_1$  не подходит для изучения задач с погранслоями.

Рассмотрим вторую норму  $L_2$ , которая определена для любой функции  $f$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(x)|^2 dx}.$$

В этой норме разность между функцией  $u_\varepsilon$  и функцией константой 50 будет

$$\|u_\varepsilon - 50\|_2 = \left\| 50 \frac{e^{-1/\varepsilon} - e^{-x/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right\|_2 \cong 35\sqrt{\varepsilon}$$

То есть, когда  $\varepsilon = 0.000001$ , мы получаем  $\|u_{0.000001} - 50\|_2 \cong 0.0035$ , что тоже не оправдывает наши ожидания. Более того,  $\|u_{0.001} - u_{0.000001}\|_2 \cong 1$ , причем  $\|u_{0.001}\|_2 \cong \|u_{0.000001}\|_2 \cong 50$ . Это показывает, что в этой норме относительная разность между двумя функциями всего 2% несмотря на то, что две функции совершенно неодинаково ведут себя в окрестности нуля. Отсюда следует вывод, что норма в  $L_2$  также не является подходящей нормой.

Следует заметить, что неудовлетворительное поведение норм  $L_1$ ,  $L_2$  появляется за счет усреднения на всем интервале и поэтому частное значение не обнаруживается.

Таким образом, нам необходима норма, не содержащая усреднений. Наиболее подходящей будет норма в  $L_\infty$  или максимальная норма, которая определяется

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)|.$$

В этой норме для всех значений  $\varepsilon$  мы имеем

$$\|u_\varepsilon - 50\|_\infty = 50,$$

а разность между двумя предыдущими функциями будет следующей

$$\|u_{0.001} - u_{0.000001}\|_\infty \cong 49.6.$$

Из этого примера видно, что разность функции при сколь угодно малом  $\varepsilon$  обнаружена. Этим экспериментом показано, что самая подходящая норма - это максимальная норма для изучения задач с пограничными слоями.

И наконец, для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка будем рассматривать типичную энергетическую норму, определяемую следующим образом

$$|||v|||^2 \equiv \varepsilon \|v'\|_2^2 + \|v\|_2^2. \quad (6)$$

Внимание нужно использовать энергетическую норму так как показано в следующем примере. Рассмотрим задачу реакции диффузии

$$\varepsilon u_\varepsilon'' - u_\varepsilon = f(x), \quad x \in \Omega = (0, 1), \quad u_\varepsilon(0) = 1, \quad u_\varepsilon(1) = 1, \quad (7)$$

для этой задачи метод конечных элементов хорошо изучен, так как дифференциальное уравнение самосопряженное. В самом деле, в работе (Багаева и Шайдурова (1998)) показано, что для задачи реакции-диффузии решаемой стандартным конечно-разностным методом с кусочно-равномерной линейной базис-функцией на равномерной сетке мы получаем  $\varepsilon$  равномерную оценку погрешности

$$|||\bar{U}_\varepsilon - u_\varepsilon||| \leq CN^{-1/2},$$

где  $\bar{U}$  - конечно-элементная аппроксимация,  $C$  - постоянная независимая от  $\varepsilon$  и  $N$  - это количество базис функций. На первый взгляд метод конечных элементов дает удовлетворительную численную аппроксимацию для решения функции  $u_\varepsilon$  для (7) при любом сколь угодно малом  $\varepsilon$ . Но на самом деле поскольку мы выбираем количество интервалов равномерной сетки зависимым от  $\varepsilon$ , то пограничный слой для этой задачи не может быть описан методом конечных элементов. Действительно, функция пограничного слоя в решении  $u_\varepsilon$  для (7) будет  $e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}$  и  $e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}$  и в энергетической норме мы имеем

$$|||e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}||| = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad |||e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}||| = O(\sqrt{\varepsilon})$$

Это говорит о том, что в энергетической норме пограничный слой не обнаружен при малом  $\varepsilon$ . С другой стороны, в максимальной норме мы имеем

$$\|e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}\|_\infty = \|e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}\|_\infty = 1.$$

Это означает, что функция пограничного слоя обнаружена в максимальной норме для любого сколь угодно малого  $\varepsilon$ . В других задачах в энергетической норме фиксируется функция пограничного слоя. Например, для задачи конвекции-диффузии (??) функция пограничного слоя будет  $e^{-x/\varepsilon}$ , то есть

$$|||e^{-x/\varepsilon}||| = O(1).$$

Рассмотрим двумерную задачу конвекции - диффузии

$$\varepsilon u_{xx}(x, y) + \varepsilon u_{x,y} + u_x(x, y) + u_y(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in (0, 1) \times (0, 1)$$

соответственно функции погранслоя будут  $e^{-x/\varepsilon}$ ,  $e^{-y/\varepsilon}$  и тогда энергетическая норма будет определена формулой

$$|||v|||^2 \equiv \varepsilon \|v_x\|_2^2 + \varepsilon \|v_y\|_2^2 + \|v\|_2^2. \quad (8)$$

В данной задаче функции погранслоя  $e^{-x/\varepsilon}$ ,  $e^{-y/\varepsilon}$  будут определены в этой норме, но для малых  $\varepsilon$  угловые функции погранслоя  $e^{-x/\varepsilon}$ ,  $e^{-y/\varepsilon}$

$$|||e^{-x/\varepsilon}e^{-y/\varepsilon}||| = O(\sqrt{\varepsilon})$$

С другой стороны, функции погранслоя и углового погранслоя обнаружены в максимальной норме для любого сколь угодно малого  $\varepsilon$ .

$$\|e^{-x/\varepsilon}e^{-y/\varepsilon}\|_\infty = 1$$

Примеры, приведенные выше, показывают, что в случае, когда мы используем норму энергий, нам нужно предварительно знать сможем ли мы зафиксировать функцию пограничного слоя в норме энергий для решения задачи.

### 1.3 Численные методы

Поскольку точное решение нестандартной задачи заключается в решении сингулярно возмущенного дифференциального уравнения, решение которого нам неизвестно, то нам приходится искать приближенное решение. Область, в которой может потребоваться найти решение, может быть всей областью  $\bar{\Omega}$  существующего аналитического решения или дискретное множество точек или узлов  $\bar{\Omega}^N \subset \bar{\Omega}$ , где дискретный параметр численного метода, который, например, может соответствовать числу узлов в конечно-разностном методе или числу узлов в конечно-элементном методе.

Чтобы точно распознать пограничный слой численным методом, важно, чтобы приближенное решение было определено в каждой точке области точного решения. В случае, если численное решение определено только в узлах сетки, к примеру в узлах сетки конечно-разностного метода, мы растягиваем решение на всю область, используя простую интерполяцию такую, как кусочно-линейная интерполяция. Мы остановили свой выбор на таком простом процессе, так как эта техника будет использоваться для решения более сложных многомерных задач. И по этой же причине возьмем только стандартный метод конечных элементов, то есть не будем позволять добавлять конечно-элементные подмножества не конечномерными полиномиальными базис функциями.

Из предыдущих разделов совершенно очевидно, что мы должны вычислять ошибки в максимальной норме, то есть мы должны использовать глобально максимальную норму, либо дискретную с максимальным количеством узлов в дискретном множестве  $\bar{\Omega}^N$  или всю область  $\bar{\Omega}$  соответственно.

Так как необходимо, чтобы наш численный метод генерировал решения из всей области  $\bar{\Omega}$ , то самой подходящей нормой будет глобально максимальная. Мы относимся к численной аппроксимации с малыми ошибками в глобально максимальной норме такой как к глобальной с двойной точностью.

При неравномерной сетке для численного метода очень важно измерить величину ошибок для численных аппроксимаций в показателях обратной степени дискретного параметра  $N$ . Следовательно важным измерением будет и толщина погранслоя в показателях  $N$ . В связи с этим, мы определим толщину погранслоя следующим образом: пусть у нас функция погранслоя  $f(x)$  и дискретная функция измерения  $g(N)$  такая что  $g(N) \rightarrow 0$   $N \rightarrow \infty$ . Дискретный аналог толщины пограничной функции обозначается  $W(N)$  и измеряется, как наименьшая величина  $W$  между функцией погранслоя  $f(x)$  и дискретной функцией  $g(N)$

$$\sup_{x \geq W} |f(x)| \leq g(N).$$

К примеру, если возьмем функцию погранслоя  $f(x) = e^{-x/\varepsilon}$  и эталонную функцию  $g(N) = N^{-1}$  то толщина пограничного слоя будет  $W = \varepsilon \ln N$ , в случае, если взять  $g(N) = N^{-2}$  толщина пограничного слоя будет  $W = 2\varepsilon \ln N$ . Общее представление о вычислении толщины погранслоя будет использоваться для построения подходящей неравномерной сетки для погранслоя.

При использовании метода конечных разностей или конечных элементов для решения сингулярно возмущенной задачи с решением в пограничном слое сразу возникает вопрос о выборе сетки  $\bar{\Omega}^N$ . Так как мы будем использовать только простой интерполянт для метода конечных разностей и только кусочно-заданную полино-

миальную базис-функцию для метода конечных элементов, мы должны поместить некоторые узлы сетки внутри погранслоя. Это гарантирует узловую аккуратность численного метода. Некоторая информация о точном решении в пограничном слое содержится в численном решении. В одномерном случае самая простая сетка - это равномерная сетка  $\bar{\Omega}_u^N = \{x_i\}_0^N$  с  $N + 1$  равноотстоящими узлами сетки, то есть  $x_{i+1} - x_i = 1/N$  для всех  $i$ . Но для равномерной сетки не один из узлов сетки не попадает в пограничный слой пока  $N$  порядка  $1/\varepsilon$ . Следовательно при малом  $\varepsilon$  чрезмерно большое число сеточных узлов требуется, в особенности для задач большей размерности. Отсюда следует, что равномерная сетка как правило не подходит в случае, если аналитическое решение имеет пограничный слой.

Тогда мы должны решить какую именно неравномерную сетку мы должны взять. Самый простой и эффективный выбор кусочно-равномерной сетки, часть которой входит в пограничный слой. Эта сетка составлена из двух равномерных сеток: мелкая равномерная сетка - это сетка в пограничном слое и крупная равномерная сетка - вне пограничного слоя. Расположение точки перехода между мелкой и крупной сеткой определяется зависимостью от сингулярно возмущенного параметра  $\varepsilon$  и дискретного параметра  $N$ . Правильным распределением узлов сетки будет равное или сравнимое количество узлов сетки в мелкой и крупной сетке. Также для задач с большей размерностью самым подходящим распределением узлов сетки вдоль направления нормали к пограничному слою является сравнимым числом с имеющимися узлами сетки внутри и снаружи пограничного слоя.

## 1.4 Робастный погранслойный метод

Не так сложно построить численный метод для одного значения сингулярно - возмущенного параметра  $\varepsilon$ , к примеру  $\varepsilon = 10^{-6}$ , но исходный численный метод может не подойти для других значений параметра, к примеру  $10^{-4}$  или  $10^{-10}$ . Мы рассмотрим более сложные задачи, т.е. построим численный метод, который даст равномерно-сходящееся численное решение для всех значений  $\varepsilon$  из полуинтервала  $(0, 1]$ , что потребует равномерное по параметру количество вычислительной работы для вычисления каждого решения численно. Такие численные методы называются равномерными по параметру или  $\varepsilon$ - равномерными методами. Если метод является  $\varepsilon$ - равномерным, то ошибки между точным решением  $u_\varepsilon$  и численным решением  $U_\varepsilon$  удовлетворяют оценке следующего вида: для некоторых целых положительных  $N_0$  все целые  $N \geq N_0$  и все  $\varepsilon \in (0, 1]$  мы имеем  $\|\bar{U}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{\bar{\Omega}} \leq CN^{-p}$ , где  $C$ ,  $N_0$  и  $p$  положительные константы независимые от  $\varepsilon$  и  $N$ . Здесь  $\bar{U}_\varepsilon$  обозначает кусочный линейный интерполянт во всей области  $\bar{\Omega}$  сеточной функции  $U_\varepsilon$  определенной на сетке  $\bar{\Omega}^N$  и  $\|\cdot\|_{\bar{\Omega}}$  обозначает максимальную норму над всей областью  $\bar{\Omega}$ . Отметим, что требуется чтобы оценки содержали в себе каждую точку области, а не только узлы сетки. Отсюда следует, что в каждой точке  $\bar{\Omega}$ ,  $\bar{U}_\varepsilon$  существует  $\varepsilon$ -равномерно сходящаяся аналитическая аппроксимация к точному решению  $u_\varepsilon$ .

На простых примерах можно показать, что для построения робастного метода разрешающего слой, очень важно в вышеуказанных определениях метода равномерного по  $\varepsilon$  использовать максимальную норму с максимально возможным количеством точек из области решений. К примеру, легко построить метод конечных элементов, который будет равномерным по в энергетической норме, но который не сможет определить пограничный слой.

Чтобы избежать трудностей в дальнейшем предлагается, чтобы численные решения были определены в каждой точке области точного решения и максимальная норма была взята над всей областью. Это гарантирует, что мы зафиксируем пограничные слои независимо от их толщины, но при усовершенствовании численных методов все свойства могут оставаться непостоянным. Следовательно, чтобы убедиться что наш метод не только описывает пограничные слои, но и робастный, мы добавим еще одно необходимое условие, а именно монотонность.

Введем четыре основных свойства робастности численного метода относительно пограничного слоя:

1. **Глобальность** (для определенного в каждой точке области точного решения).
2. **Удвоенная точность** (ошибки считаются в глобальной максимальной норме).
3. **Равномерность по параметру** (численное решение сходится равномерно по  $\varepsilon$  и может быть посчитано с равномерной по  $\varepsilon$  вычислительной сложностью).
4. **Монотонность** (дискретный оператор является монотонным оператором).

### Определение 1.1

Пусть  $(P_\varepsilon)$  - семейство задач с сингулярно возмущенными параметрами. Предположим, что каждая задача в  $P_\varepsilon$  имеет единственное решение. Обозначим его  $u_\varepsilon$ , и тогда каждое  $u_\varepsilon$  - это приближение последовательностью численных решений  $\{(U_\varepsilon, \bar{\Omega}^N)\}_{N=1}^\infty$  получается используя монотонный численный метод  $(P_\varepsilon^N)$ , где  $U_\varepsilon$  находится на сетке  $\bar{\Omega}^N$  и  $N$  - дискретный параметр. Пусть  $\bar{U}_\varepsilon$  - кусочный линейный интерполянт над  $\bar{\Omega}^N$  дискретного решения  $U_\varepsilon$ . Тогда  $(P_\varepsilon^N)$  называется робастным методом разрешающим погранслои в численных решениях исчисляемых с  $\varepsilon$ -равномерным количеством вычисляемой работы и сходится  $\varepsilon$ - равномерно, в смысле, что существует положительное целое  $N_0$  и положительные  $C$  и  $p$ , где  $N_0$ ,  $C$  и  $p$  не зависят от  $N$  и  $\varepsilon$  так как для всех  $N \geq N_0$

$$\sup_{0 < \varepsilon \leq 1} \|\bar{U}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{\bar{\Omega}} \leq CN^{-p} \quad (9)$$

В вышеуказанном определении для параметров ошибок  $p$ ,  $C$  называются соответственно  $\varepsilon$  равномерная степень сходимости и  $\varepsilon$  равномерная постоянная ошибка численного метода  $(P_\varepsilon^N)$ .

Для задачи конвекции-диффузии (1) можно показать, что степень порядка  $k$  решения для всех  $k \geq 0$  удовлетворяет оценке

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} u_\varepsilon(x) \right| \leq C(1 + \varepsilon^{-k} e^{-x/\varepsilon}) \quad x \in \bar{\Omega}$$

где  $C$  не зависит от  $\varepsilon$ .

## 1.5 Некоторые обозначения

Введем следующие обозначения для конечно-разностных операторов. Пусть  $V$  будет сеточной функцией для одномерной задачи, правая, левая и центральные разностные операторы будут соответственно  $D^+$ ,  $D^-$ ,  $D^0$

$$D^+V(x_i) \equiv \frac{V(x_{i+1}) - V(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad (10)$$

$$D^-V(x_i) \equiv \frac{V(x_i) - V(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \quad (11)$$

$$D^0V(x_i) \equiv \frac{V(x_{i+1}) - V(x_{i-1})}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (12)$$

и центральный разностный оператор второго порядка  $\delta^2$  определяется

$$\delta^2V(x_i) \equiv \frac{2(D^+V(x_i) - D^-V(x_i))}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (13)$$

Соответствующие конечно-разностные операторы в частных производных в двумерном случае определяются:

$$D_x^+V(x_i, y_j) = \frac{V(x_{i+1}, y_j) - V(x_i, y_j)}{x_{i+1} - x_i} \quad (14)$$

$$D_x^-V(x_i, y_j) = \frac{V(x_i, y_j) - V(x_{i-1}, y_j)}{x_i - x_{i-1}} \quad (15)$$

$$D_x^0V(x_i, y_j) = \frac{V(x_{i+1}, y_j) - V(x_{i-1}, y_j)}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (16)$$

$$\delta_x^2V(x_i, y_j) \equiv \frac{2(D_x^+V(x_i, y_j) - D_x^-V(x_i, y_j))}{x_{i+1} - x_{i-1}} \quad (17)$$

аналогично определяются  $D_y^+$ ,  $D_y^-$ ,  $D_y^0$ , и  $\delta_y^2$ .

Пусть  $u_\varepsilon$  является решением  $(P_\varepsilon)$  и  $U_\varepsilon$  решением  $(P_\varepsilon^N)$ . Тогда на произвольно выбранной сетке  $\bar{\Omega}^N = \{x_i\}_{i=0}^N$  точная ошибка  $E_{\varepsilon, exact}^N$  в каждом узле сетки определяется

$$E_{\varepsilon, exact}^N = \|U_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{\bar{\Omega}^N} \quad (18)$$

и соответственно точные ошибки равномерные по  $\varepsilon$  в узлах сетки определяются

$$E_{exact}^N = \max_{\varepsilon} E_{\varepsilon, exact}^N \quad (19)$$

Подобным образом, вычисляем глобальную точную ошибку  $\bar{E}_{\varepsilon, exact}^N$  и глобальную точную ошибку равномерную по  $\varepsilon$ ,  $\bar{E}_{exact}^N$

$$\bar{E}_{\varepsilon, exact}^N = \|\bar{U}_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{\bar{\Omega}} \quad (20)$$

$$\bar{E}_{exact}^N = \max_{\varepsilon} \bar{E}_{\varepsilon, exact}^N. \quad (21)$$

## Список литературы

- [1] Vleggaar, Laminar boundary-layer behaviour on continuous, accelerating surfaces, Chem. Eng. Science 32, 1517 (1977)
- [2] M.B. Glauert, M.J. Lighthill, The axisymmetric boundary layer on a long thin cylinder, Proc. R. Soc. London A320 (1955) 188-203.
- [3] B.S. Sakiadis, Boundary-layer behavior on continuous solid surfaces: III. The boundary layer on a continuous cylindrical surface, AIChE Journal 7(3) (1961) 467-472.
- [4] D.E. Bourne, D.G. Elliston, Heat transfer through the axially symmetric boundary layer on a moving circular fibre, Int. J. Heat Mass Transfer 13 (1970) 583-593.
- [5] D.E. Bourne, H. Dixon, The cooling of fibres in the formation process, Int. J. Heat Mass Transfer 24 (1971) 1323-1332
- [6] Matthew Sweetland, John H. Lienhard V Evaporative cooling of continuously drawn glass fibres by water sprays, Int. J. Heat Mass Transfer 43 (2000) 777-790