Министерство образования и науки Российской Федерации
ГОУ ВПО «Иркутский государственный университет»

М. В. Фалалеев

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Учебно-методическое пособие

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО ИРКУТСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
2011

УДК 517.982.4
ББК 22.162
Ф19

Печатается по решению редакционно-издательского совета
Иркутского государственного университета

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, профессор Н. А. Сидоров, д-р физ.-мат. наук, зав. отделением нелинейных динамических систем и дифференциальных уравнений ИДСТУ СО РАН А. А. Щеглова

Ф19 **Фалалеев М. В.**

Обобщенные функции и действия над ними : учеб.-метод. пособие / М. В. Фалалеев. — 2-е изд., испр. и доп. — Иркутск : Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2011. — 108 с.

ISBN 978-5-9624-0503-2

В учебно-методическом пособии изложены основные понятия теории обобщенных функций и правила действий над ними. Отсутствуют доказательства основных теорем (с ними можно ознакомиться, например, по руководствам из списка литературы), но приведены решения большого количества задач по всем разделам, затронутым в книге. Включены вопросы и задачи для самостоятельного решения. Первое издание — 1996 г.

Предназначено для студентов старших курсов университетов, обучающихся по направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», магистрантов и аспирантов.

Библиогр. 17 назв. Ил. 4.

УДК 517.982.4
ББК 22.162

ISBN 978-5-9624-0503-2

Оглавление

1 Основное пространство $\mathcal{D}$

Основному множеству $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ принадлежат *все финитные функции класса* $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$. Напомним, что *финитными* называют функции, которые обращаются в нуль вне некоторого шара конечного радиуса. Класс $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ состоит из функций непрерывных (по совокупности переменных [13, § 19]) вместе *со всеми* своими (частными) производными на $\mathbf{R}^n$. Условимся обозначать элементы множества $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ через $\varphi(x)$. *Носителем* функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ называют замыкание в $\mathbf{R}^n$ множества тех точек $x \in \mathbf{R}^n$, для которых $\varphi(x) \neq 0$. Для носителя функции $\varphi(x)$ используют обозначение $\operatorname{supp}\varphi(x)$. Соответственно, *нулевым множеством* функции $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ называют дополнение носителя $\operatorname{supp}\varphi(x)$ до всего пространства $\mathbf{R}^n$ и обозначают $\mathcal{O}_{\varphi(x)}$. Носитель любой функции из $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ является замкнутым множеством, а нулевое множество — открытым, причем

$$\operatorname{supp}\varphi(x) \cup \mathcal{O}_{\varphi(x)} = \mathbf{R}^n.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\varphi(x)$ содержится внутри некоторого шара конечного радиуса, т. е. является ограниченным множеством, то $\operatorname{supp}\varphi(x)$ — компактное множество [13, § 18].

Если $\varphi(x)$, $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ — две различные функции и α, $\beta \in \mathbf{R}$ — произвольные вещественные числа, то функция

$$\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x),$$

во-первых, принадлежит классу $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ как сумма двух функций из $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ и, во-вторых, финитна, ибо обращается в нуль вне множества $\operatorname{supp}\varphi(x) \cup \operatorname{supp}\psi(x)$, поэтому пространство $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ является линейным множеством.

Сходимость в $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ определяется следующим образом.

Определение. *Последовательность* $\varphi_k(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ *сходится к функции* $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, *если:*

а) $\exists R > 0$ *такое, что* $\forall k \in \mathbf{N}$

$$\operatorname{supp} \varphi_k(x) \subset U_R;$$

б) $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ *на* $\mathbf{R}^n$

$$D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows D^\alpha \varphi(x) \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Здесь использованы обозначения:

U_R — открытый шар в $\mathbf{R}^n$ с центром в начале координат и радиусом R;

$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — n-мерный вектор, координаты α_i которого — целые неотрицательные числа;

D^α — мультииндекс

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n} \varphi(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}};$$

стрелки $\rightrightarrows$ означают равномерную сходимость функциональной последовательности, в данном случае на всем пространстве $\mathbf{R}^n$ [13, § 36] (фактически на U_R).

Линейное множество $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ после введения в нем сходимости становится топологическим пространством и называется *пространством основных функций* $\mathcal{D}$.

Нетривиальный пример основной функции доставляет «шапочка», а именно:

$$\omega_r(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{r^2}{r^2 - |x|^2}\right), & |x| < r; \\ 0, & |x| \geq r. \end{cases}$$

Здесь $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

$\operatorname{supp} \omega(x) = \overline{U_r}$ — замыкание шара U_r в $\mathbf{R}^n$.

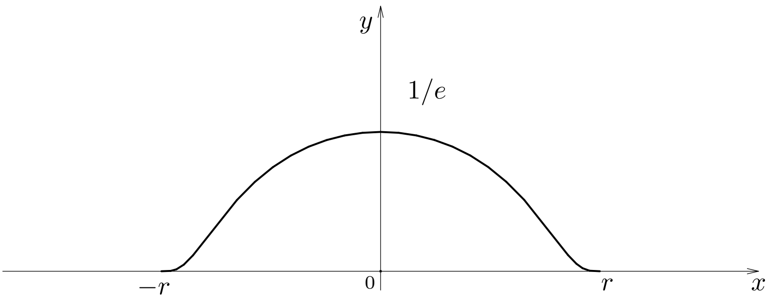

Рис. 1

Эскиз графика $\omega(x)$ (при $n = 1$) представлен на рис. 1.

Другие многочисленные примеры основных функций предоставляет следующая

Теорема [6, с. 69]. *Если E — компакт в $\mathbf{R}^n$, F — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $E \subset F$, то существует $\varphi(x) \in \mathcal{D}$ такая, что $0 \le \varphi(x) \le 1$ при $x \in F \setminus E$ и*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin F. \end{cases}$$

Эскиз графика такой функции (при $n = 1$) приведен на рис. 2.

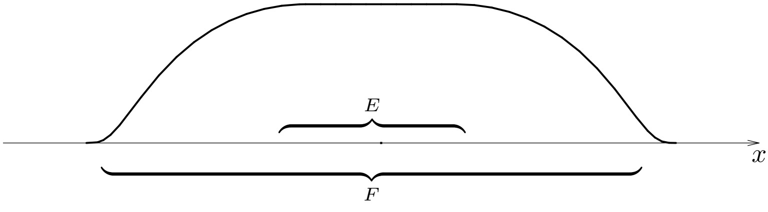

Рис. 2

Таким образом, запас основных функций $\mathcal{D}$ достаточно велик.

Дополнительное расширение этому множеству придает следующая очевидная

Лемма. *Если* $a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ *(не обязательно финитная) и* $\varphi(x) \in \mathcal{D}$, *то* $a(x) \cdot \varphi(x) \in \mathcal{D}$.

Пример [5, задача № 6.1]. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x), \quad \varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(kx), \quad \varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$$

сходящиеся в $\mathcal{D}$?

Поскольку $\varphi(x)$ и все ее производные непрерывны на $\operatorname{supp}\varphi(x)$, а функции, непрерывные на компакте, достигают на нем свои максимальное и минимальное значения [13, с. 333], то $\forall\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\exists\, M_\alpha > 0$ такая, что $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$|D^\alpha\varphi(x)| \leq M_\alpha,$$

поэтому

$$\frac{|D^\alpha\varphi(x)|}{k} \leq \frac{M_\alpha}{k} \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

т. е. $D^\alpha\varphi_k(x) \rightrightarrows 0$ на $\mathbf{R}^n$ при $k \to \infty$ [13, с. 598]. Итак, последовательность $\dfrac{1}{k}\varphi(x)$ сходится в $\mathcal{D}$ к тождественно нулевой функции.

Рассмотрим вторую последовательность. Не теряя общности и исключительно для ясности изложения, исследуем случай $n = 1$ и $\varphi(x) = \omega_r(x)$ — «шапочка». Так как $\omega_r(x) \neq 0$ при $|x| < r$, то $\omega_r(kx) \neq 0$ при $|kx| < r$ или $|x| < \dfrac{r}{k}$, таким образом, шар $U_r = [-r; r]$ содержит носители всех функций из второй последовательности. Это означает выполнение требования а) из определения сходимости в $\mathcal{D}$. Поскольку $\max\omega_r(kx) = \dfrac{1}{e}$, то $\dfrac{1}{k}\omega(kx) \rightrightarrows 0$. Однако $\varphi'_k(x) = \omega'_r(kx)$, и эта функциональная последовательность поточечно сходится к нулю, но не сходится равномерно. То же самое можно сказать про любую из последовательностей $\varphi_k^{(m)}(x) = k^{m-1}\omega_r^{(m)}(kx)$. Итак, для второй последовательности не выполняется требование б) из определения сходимости в $\mathcal{D}$, т. е. эта последовательность не сходится в $\mathcal{D}$.

Так же, как в предыдущем случае, ограничимся случаем $n = 1$ и $\varphi(x) = \omega_r(x)$. Сразу замечаем, что $\omega_r\left(\frac{x}{k}\right) \neq 0$ при $\left|\frac{x}{k}\right| < r$ или $|x| < kr$, т. е. $\operatorname{supp}\varphi_k(x) = [-kr; kr]$, итак, не существует шара конечного радиуса U_R, содержащего носители всех членов третьей последовательности. Требование а) из определения сходимости в $\mathcal{D}$ нарушено, и поэтому третья последовательность не сходится в $\mathcal{D}$. Однако $\forall m \in \mathbf{N} \quad \varphi_k^{(m)}(x) = \frac{1}{k^{m+1}}\omega_r^{(m)}\left(\frac{x}{k}\right) \rightrightarrows 0$ на $\mathbf{R}$, и требование б) из определения сходимости в $\mathcal{D}$ выполнено.

2 Основное пространство $\mathcal{S}$

Основному множеству $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ принадлежат *все функции класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, стремящиеся к нулю при $x \to \infty$ вместе со всеми своими производными любого порядка быстрее любой степени* $\frac{1}{|x|}$.

Согласно этому определению, если $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, то $\forall\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\forall\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ $x^\beta D^\alpha\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$, здесь $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_n^{\beta_n}$, D^α — мультииндекс. Из определения также вытекает абсолютная интегрируемость на $\mathbf{R}^n$ как $\varphi(x)$, так и $x^\beta D^\alpha\varphi(x)$ $\forall\alpha$, β.

Таковой является, например, функция $e^{-|x|^2}$. Функции $e^{|x|}$ и $e^{-|x|}$ не принадлежат $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, так как первая не стремится к нулю при $x \to \infty$, а вторая не дифференцируема в нуле. Множество $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ содержит в себе $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и получено расширением $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ путем уточнения поведения на бесконечности основных функций, которое менее ограничительно, чем в случае пространства $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Так же как $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ — линейное множество.

Сходимость в $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ определяется следующим образом.

Определение. *Последовательность $\varphi_k(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ сходится к функции $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, если для любых $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и*

$\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows x^\beta D^\alpha \varphi(x) \quad \textit{на} \quad \mathbf{R}^n \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

Линейное множество $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ после введения в нем сходимости становится топологическим пространством и называется *основным пространством* $\mathcal{S}$. Отметим, что $\mathcal{D}$ *плотно* в $\mathcal{S}$.

Утверждение [5, задача № 6.9]. *Если последовательность* $\varphi_k(x)$ *сходится к* $\varphi(x)$ *в* $\mathcal{D}$, *то* $\varphi_k(x)$ *сходится к* $\varphi(x)$ *в* $\mathcal{S}$.

Действительно, если $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

$$D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows D^\alpha \varphi(x) \quad \text{на} \quad U_R \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то

$$\max_{U_R} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Поскольку $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\forall \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ справедливы неравенства

$$\max_{R^n} |x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) - x^\beta D^\alpha \varphi(x)| = \max_{U_R} |x^\beta| \cdot |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha \varphi(x)| \le$$

$$\le \max_{U_R} |x^\beta| \cdot \max_{U_R} |D^\alpha \varphi_k(x) - D^\alpha(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то это означает, что

$$x^\beta D^\alpha \varphi_k(x) \rightrightarrows x^\beta D^\alpha \varphi(x) \quad \text{на} \quad \mathbf{R}^n,$$

т. е. $\varphi_k(x)$ сходится к $\varphi(x)$ в $\mathcal{S}$. Утверждение доказано. ■

Умножение на бесконечно дифференцируемую функцию в пространстве $\mathcal{S}$ уже не столь безобидная операция, как в $\mathcal{D}$. Например, если $\varphi(x) = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$ и $a(x) = e^{|x|^2} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $a(x)\varphi(x) = 1 \notin \mathcal{S}$, так как константа, являясь функцией класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, не стремится к нулю на бесконечности. Однако, как явствует из следующего примера, при некоторых дополнительных ограничениях на $a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ такое умножение не выводит из пространства $\mathcal{S}$.

Пример 1 [5, задача № 6.11]. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, $P(x)$ — полином, тогда $\varphi(x) \cdot P(x) \in \mathcal{S}$.

Действительно, $\varphi(x) \cdot P(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ как произведение бесконечно дифференцируемых функций. Пусть

$$P(x) = \sum_{\gamma:|\gamma|\leq m} c_\gamma x^\gamma, \quad \text{где} \quad |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n,$$

тогда $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\forall \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

$$x^\beta D^\alpha(\varphi(x) \cdot P(x)) = \sum_{\delta:\delta\leq\alpha} Q_\delta(x) \cdot D^\delta \varphi(x),$$

где $Q_\delta(x)$ — некоторый многочлен от x. Согласно определению пространства $\mathcal{S}$ $Q_\delta(x) \cdot D^\delta\varphi(x) \to 0$ при $x \to \infty$, это и означает, что $\varphi(x) \cdot P(x) \in \mathcal{S}$.

Замечание. На самом деле имеет место более общее утверждение. А именно, если функция $a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ растет на бесконечности вместе со всеми своими производными не быстрее полинома, т. е. $|D^\alpha a(x)| \leq c_\alpha(1 + |x|)^{m_\alpha}$, то $\forall \varphi(x) \in \mathcal{S}$ $a(x)\varphi(x) \in \mathcal{S}$. Этот класс функций принято обозначать θ_M.

Пример 2 [5, задача № 6.12]. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^1)$, причем $\varphi(x) = 0$ при $x < a$ и $\varphi(x)$ ограничена вместе со всеми своими производными. Доказать, что функция $\varphi(x)e^{-\sigma x} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$ при $\sigma > 0$.

Действительно, $\varphi(x)e^{-\sigma x} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^1)$ как произведение функций класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^1)$. Далее $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}$

$$x^\beta \cdot (\varphi(x)e^{-\sigma x})^{(\alpha)} = \sum_{i=0}^{\alpha} (-\sigma)^{\alpha-i} C_\alpha^i \cdot \varphi^{(i)}(x) \cdot x^\beta e^{-\sigma x}.$$

Поскольку $\forall i \in \mathbf{N}$ $\exists d_i > 0$ такое, что $|\varphi^{(i)}(x)| \leq d_i$, то

$$\left| x^\beta (\varphi(x)e^{-\sigma x})^{(\alpha)} \right| \leq A \cdot |x|^\beta e^{-\sigma x}.$$

Здесь

$$A = \sum_{i=0}^{\alpha} d_i \sigma^{\alpha-i} C_\alpha^i > 0,$$

это значит, что

$$x^\beta(\varphi(x)e^{-\sigma x})^{(\alpha)} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to \infty,$$

т. е. $\varphi(x)e^{-\sigma x} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$.

Пример 3 [5, задача № 6.10]. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{S}$. Выяснить, есть ли среди последовательностей

$$\varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(x), \quad \varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi(kx), \quad \varphi_k(x) = \frac{1}{k}\varphi\left(\frac{x}{k}\right)$$

сходящиеся в $\mathcal{S}$?

Поскольку $\varphi(x) \in \mathcal{S}$, то $\forall \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\forall \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ $\exists\, C_{\alpha\beta} > 0$ такая, что $\forall x \in \mathbf{R}^n$

$$|x^\beta D^\alpha \varphi(x)| \le C_{\alpha\beta},$$

но это означает равномерную сходимость

$$\frac{1}{k}x^\beta D^\alpha \varphi(x) \rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad \mathbf{R}^n,$$

т. е. первая последовательность сходится к тождественно нулевой функции в $\mathcal{S}$. Эти же рассуждения позволяют сделать вывод о том, что третья последовательность также сходится к нулю в $\mathcal{S}$.

Вторая последовательность расходится в $\mathcal{S}$, если $\varphi(x) \not\equiv 0$, и сходится к нулю, если $\varphi(x) \equiv 0$.

Пример 4 (преобразование Фурье). Как было отмечено в начале параграфа, любая функция $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ (равно как и $x^\beta D^\alpha \varphi(x)$ $\forall \alpha, \beta$) абсолютно интегрируема на $\mathbf{R}^n$, а значит на пространстве $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ определена операция *преобразования Фурье*, действующая по правилу

$$F[\varphi(x)](\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x)e^{i(\xi,x)}\,dx \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

Очевидны оценки

$$|F[x^\beta \varphi(x)](\xi)| \le \int\limits_{\mathbf{R}^n} |x^\beta \varphi(x)|\,dx \quad \forall \beta,$$

из которых (по признаку Вейерштрасса) получаем равномерную сходимость по $\xi \in \mathbf{R}^n$ несобственного интеграла $F[x^\beta \varphi(x)](\xi)$ и его непрерывную зависимость от ξ, т. е. включение $F[x^\beta \varphi(x)](\xi) \in C(\mathbf{R}^n)$. Из этих же оценок вытекает выполнение условий теоремы о дифференцировании по параметру несобственных интегралов (причем любое число раз) и

$$D_\xi^\alpha F[\varphi(x)](\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} (ix)^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx = F[(ix)^\alpha \varphi(x)](\xi),$$

откуда следует включение $F[\varphi(x)](\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Интегрированием по частям получаем равенство

$$F[D^\alpha \varphi(x)](\xi) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} D^\alpha \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx =$$

$$= (-i\xi)^\alpha \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(x) e^{i(\xi,x)}\, dx = (-i\xi)^\alpha F[\varphi(x)](\xi).$$

Наконец, $\forall \alpha$ и $\forall \beta$ равномерно по $\xi \in \mathbf{R}^n$ справедлива оценка

$$\left|\xi^\beta D_\xi^\alpha F[\varphi(x)](\xi)\right| = \left| i^{|\beta|} \cdot (-i\xi)^\beta \cdot F[(ix)^\alpha \varphi(x)](\xi)\right| =$$

$$= \left| i^{|\beta|+|\alpha|} F[D^\beta (x^\alpha \varphi(x))](\xi)\right| \leq \int\limits_{\mathbf{R}^n} |D^\beta (x^\alpha \varphi(x))|\, dx,$$

означающая включение $F[\varphi(x)](\xi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, т. е. преобразование Фурье переводит основное пространство $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ в себя (чего нельзя сказать о пространстве $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$).

Обратным преобразованием Фурье называется преобразование

$$F^{-1}[\psi(\xi)](x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \psi(\xi) e^{-i(\xi,x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(\xi)](-x) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbf{R}^n} \psi(-\xi) e^{i(\xi,x)}\, d\xi = \frac{1}{(2\pi)^n} F[\psi(-\xi)](x).$$

В заключение отметим, что преобразование Фурье преобразует основное пространство $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ в себя взаимнооднозначно и непрерывно.

3 Понятие обобщенной функции. Регулярные и сингулярные обобщенные функции

Пусть Φ — какое-либо из основных пространств $\mathcal{D}$ или $\mathcal{S}$.

Определение. *Обобщенной функцией (распределением) на Φ называется всякий линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве основных функций Φ.*

Значение функционала f (обобщенной функции, распределения) на основной функции $\varphi(x) \in \Phi$ записывают $(f, \varphi(x))$. Обобщенную функцию f также формально записывают в виде $f(x)$, подразумевая под x аргумент основных функций, на которые действует функционал f.

Расшифруем определение обобщенной функции.

1) Обобщенная функция f есть *функционал* на Φ [15, с. 170; 12, с. 124], т. е. всякой функции $\varphi(x) \in \Phi$ ставится в соответствие единственное *число* (вещественное или комплексное)

$$f : \varphi(x) \to (f, \varphi(x)) \in \mathbf{R} \quad \text{или} \quad \mathbf{C}.$$

2) Обобщенная функция является *линейным* функционалом, т. е. $\forall \varphi(x),\ \psi(x) \in \Phi$ и $\forall \lambda,\ \mu \in \mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$)

$$(f, \lambda\varphi(x) + \mu\psi(x)) = \lambda(f, \varphi(x)) + \mu(f, \psi(x)).$$

3) Обобщенная функция является *непрерывным* линейным функционалом [12, с. 174], т. е. если $\varphi_k(x) \to \varphi(x)$ в смысле пространства Φ, то

$$(f, \varphi_k(x)) \to (f, \varphi(x)).$$

Множество обобщенных функций на Φ обозначают Φ'. При этом множество $\mathcal{D}'$ называют *множеством обобщенных функций бесконечного порядка*, а множество $\mathcal{S}'$ — *множеством обобщенных функ-*

ций медленного роста. Так как $\mathcal{D} \subset \mathcal{S}$, то $\mathcal{D}' \supset \mathcal{S}'$. Поскольку $\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{S}$, то обобщенные функции медленного роста могут быть получены *продолжением некоторых* обобщенных функций бесконечного порядка с $\mathcal{D}$ на $\mathcal{S}$.

Приведем несколько примеров обобщенных функций.

Пример 1 (регулярные обобщенные функции). Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая функция в $\mathbf{R}^n$, т. е. для любого множества $G \subset \mathbf{R}^n$ конечного объема (измеримого множества [12, с. 257; 14, с. 114]

$$\int\limits_G f(x)\,dx < +\infty,$$

тогда она порождает обобщенную функцию на $\mathcal{D}$ следующим соотношением $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$(f, \varphi(x)) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{R^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi} f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{3.1}$$

Проверим, что отображение, задаваемое этим соотношением, действительно является обобщенной функцией.

Поскольку $\varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $\varphi(x) \in \mathcal{C}^\infty(\operatorname{supp}\varphi)$ и, значит, $\varphi(x)$ интегрируема на $\operatorname{supp}\varphi(x)$ [14, с. 141]. Функция $f(x)$ также интегрируема на $\operatorname{supp}\varphi(x)$. Поэтому произведение $f(x)\cdot\varphi(x)$ — также интегрируемая функция на $\operatorname{supp}\varphi(x)$ [14, с. 147], т. е. формула (3.1) задает функционал на $\mathcal{D}$.

В силу линейности интеграла Римана справедлива следующая цепочка равенств $\forall \varphi(x),\ \psi(x) \in \mathcal{D}$, $\forall \alpha,\ \beta \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$

$$(f, \alpha\varphi(x) + \beta\psi(x)) = \int\limits_{R^n} f(x)\cdot(\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x))\,dx =$$

$$= \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi(x)\cup\operatorname{supp}\psi(x)} f(x)\cdot(\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x))\,dx =$$

$$= \alpha \int\limits_{\operatorname{supp}\varphi(x)} f(x)\cdot\varphi(x)\,dx + \beta \int\limits_{\operatorname{supp}\psi(x)} f(x)\cdot\psi(x)\,dx =$$

$$= \alpha(f, \varphi(x)) + \beta(f, \psi(x)),$$

т. е. формула (3.1) задает линейный функционал на $\mathcal{D}$.

Пусть $\varphi_k(x) \to 0$ в $\mathcal{D}$, тогда существует шар U_R такой, что $\operatorname{supp} \varphi_k(x) \subset U_R$ $\forall k \in \mathbf{N}$ и $\varphi_k(x) \rightrightarrows 0$ на U_R при $k \to \infty$, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \max\limits_{U_R} |\varphi_k(x)| = 0$, поэтому [14, с. 147]

$$|(f, \varphi_k(x))| = \left| \int\limits_{R^n} f(x) \cdot \varphi_k(x)\, dx \right| = \left| \int\limits_{U_R} f(x) \cdot \varphi_k(x)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{U_R} |f(x)| \cdot |\varphi_k(x)|\, dx \leq \int\limits_{U_R} |f(x)| \cdot \max_{U_R} |\varphi_k(x)|\, dx =$$

$$= C \cdot \max_{U_R} |\varphi_k(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

т. е. линейный функционал, задаваемый формулой (3.1), непрерывен на $\mathcal{D}$. Значит, соотношение (3.1) действительно определяет обобщенную функцию класса $\mathcal{D}'$.

Таким образом, всякая локально интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция $f(x)$ порождает по формуле (3.1) обобщенную функцию f. Такие обобщенные функции принято называть *регулярными обобщенными функциями.*

Справедлива следующая

Лемма (дю Буа-Реймон). *Две локально интегрируемые в* $\mathbf{R}^n$ *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *порождают по формуле* (3.1) *одну и ту же обобщенную функцию тогда и только тогда, когда они почти всюду равны.*

Из этой леммы следует, что всякая регулярная обобщенная функция порождается единственной (с точностью до значений на множестве меры нуль) локально интегрируемой в $\mathbf{R}^n$ функцией. Это означает, что между локально интегрируемыми в $\mathbf{R}^n$ функциями и регулярными обобщенными функциями (т. е. обобщенными функциями, действие которых на основные функции из $\mathcal{D}$ можно задать с помощью некоторой локально интегрируемой в $\mathbf{R}^n$ функции по формуле (3.1)) существует взаимнооднозначное соответствие. Поэтому принято отождествлять локально интегрируемую функцию $f(x)$ и порождаемую ею по формуле (3.1) обобщенную функцию. В этом смысле все «обычные», т. е. локально интегрируемые в $\mathbf{R}^n$ функции являются (регулярными) обобщенными функциями.

Все остальные обобщенные функции (т. е. обобщенные функции, действия которых на основные из $\mathcal{D}$ *нельзя* описать с помощью какой-либо локально интегрируемой в $\mathbf{R}^n$ функции по формуле (3.1)) принято называть *сингулярными обобщенными функциями.*

Пример 2 (функция Хевисайда). *Функцией Хевисайда* называют обобщенную функцию $\theta(x)$, действующую по формуле

$$(\theta(x), \varphi(x)) = \int\limits_0^{+\infty} \cdots \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Это регулярная обобщенная функция, и ее действие на элементы пространства $\mathcal{D}$ задается по формуле (3.1) с помощью локально интегрируемой в $\mathbf{R}^n$ функции

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, & x_i \geq 0, \ \ \forall\, i = \overline{1, n}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Эту функцию при $n = 1$ называют функцией единичного скачка.

Пример 3 [5, задача № 8.17]. При $n = 1$ функция e^x, являясь локально интегрируемой в $\mathbf{R}^1$, порождает на $\mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$ обобщенную функцию по формуле (3.1). Однако эта формула не задает обобщенной функции на $\mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$. Действительно, последовательность $\varphi_k(x) = \dfrac{1}{k} \exp\left(-\left(\dfrac{x}{k}\right)^2\right)$ сходится к нулю в $\mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$ (см. § 2, пример 3), но

$$(e^x, \varphi_k(x)) = \frac{1}{k} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(x - \left(\frac{x}{k}\right)^2\right) dx =$$

$$= \exp\left(\frac{k^2}{4}\right)\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\left(\frac{k}{2}-\frac{x}{k}\right)^2\right)d\left(\frac{x}{k}\right) = \sqrt{\pi}\cdot\exp\left(\frac{k^2}{4}\right) \to +\infty.$$

Таким образом, отображение, задаваемое функцией e^x на $\mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$ по формуле (3.1), линейно, но не удовлетворяет требованию 3) из определения обобщенной функции.

Функция $e^x\sin(e^x)$, являясь локально интегрируемой в $\mathbf{R}^1$, порождает по формуле (3.1) обобщенные функции как на $\mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, так и на $\mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$. Действительно, $\forall\varphi(x)\in\mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$

$$(e^x\sin(e^x),\varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^x\sin(e^x)\varphi(x)\,dx =$$

$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,d(\cos(e^x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(e^x)\varphi'(x)\,dx.$$

Линейность этого функционала по $\varphi(x)$ следует из свойства линейности несобственного интеграла. Пусть теперь $\varphi_k(x)\to 0$ в $\mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$, тогда $\varphi_k'(x)\rightrightarrows 0$ на $\mathbf{R}^1$ при $k\to+\infty$. В силу ограниченности функции $\cos(e^x)$

$$\cos(e^x)\cdot\varphi_k'(x)\rightrightarrows 0 \quad \text{на} \quad \mathbf{R}^1 \quad \text{при} \quad k\to+\infty.$$

Следовательно, по теореме об интегрировании равномерно сходящихся функциональных последовательностей

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos(e^x)\varphi_k'(x)\,dx\to 0 \quad \text{при} \quad k\to+\infty,$$

т. е. $e^x\sin(e^x)$ порождает по формуле (3.1) обобщенную функцию на $\mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$.

Пример 4 (дельта-функция Дирака). *Дельта-функцией Дирака* называют обобщенную функцию $\delta(x)$, действующую по формуле

$$(\delta(x),\varphi(x)) = \varphi(0) \quad \forall\varphi(x)\in\mathcal{D}.$$

Это сингулярная обобщенная функция. Покажем это. Допустим противное. Пусть существует локально интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция $f(x)$, такая, что $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$\int\limits_{R^n} f(x)\varphi(x)\,dx = \varphi(0),$$

тогда для «шапочки» $\varphi_\varepsilon(x) = \exp\left(-\dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - |x|^2}\right)$

$$\int\limits_{U_\varepsilon} f(x)\varphi_\varepsilon(x)\,dx = e^{-1}.$$

Переходя в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$, получим

$$0 = e^{-1}.$$

Следовательно, $\delta(x)$ — сингулярная обобщенная функция.

Обобщением дельта-функции является *простой слой* на поверхности S. Пусть S — кусочно-гладкая поверхность и $\mu(x)$ — непрерывная функция, заданная на S. Тогда обобщенной функцией *простой слой* на поверхности S с плотностью $\mu(x)$ называют функционал $\mu(x)\delta_S(x)$, действующий по правилу

$$(\mu(x)\delta_S(x), \varphi(x)) = \int\limits_S \mu(x)\varphi(x)\,ds \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}.$$

Пример 5 (постоянная). Регулярную обобщенную функцию, действующую по правилу

$$(f, \varphi(x)) = C\int\limits_{R^n} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{R^n} C\cdot\varphi(x)\,dx,$$

называют *постоянной*.

Пример 6 (конечная часть (partie fini) или главное значение (valeur principal) интеграла от $\dfrac{1}{x}$). Такое название закреплено за линейным функционалом $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, действующим по формуле

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = Vp\int\limits_{R^1} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right) \ \forall\varphi(x)\in\mathcal{D}.$$

Линейность этого функционала следует из свойства линейности интеграла, осталось проверить его непрерывность. Пусть $\varphi_k(x)\to 0$ в $\mathcal{D}$ при $k\to\infty$, тогда, во-первых, $\varphi_k(x) = 0$ при $|x| > R\ \forall k\in\mathbf{N}$, во-вторых, $\varphi_k'(x)\rightrightarrows 0$ на $[-R;R]$ при $k\to\infty$, т. е. $\max\limits_{[-R;R]}|\varphi_k'(x)|\to 0$ при $k\to\infty$, поэтому

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x)\right) = Vp\int\limits_{R^1} \frac{\varphi_k(x)}{x}\,dx = Vp\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(x)}{x}\,dx.$$

По теореме Лагранжа о конечных приращениях [13, с. 196] на $[-R;R]$ имеет

$$\varphi_k(x) - \varphi_k(0) = \varphi_k'(x')(x-0) = x\cdot\varphi_k'(x')$$

или

$$\varphi_k(x) = \varphi_k(0) + x\cdot\varphi_k'(x'),$$

отсюда

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x)\right) = Vp\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0) + x\cdot\varphi_k'(x')}{x}\,dx.$$

Рассмотрим первое слагаемое из правой части

$$Vp\int\limits_{-R}^{R} \frac{\varphi_k(0)}{x}dx = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R} \frac{\varphi_k(0)}{x}\,dx\right) =$$

$$= \varphi_k(0)\cdot\lim_{\varepsilon\to 0+}(\ln|-\varepsilon| - \ln|-R| + \ln R - \ln\varepsilon) = 0.$$

Таким образом,

$$\left|\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi_k(x)\right)\right| = \left|Vp\int\limits_{-R}^{R} \frac{x\varphi_k'(x')}{x}\,dx\right| = \left|Vp\int\limits_{-R}^{R} \varphi_k'(x')\,dx\right| =$$

$$= \left| \int\limits_{-R}^{R} \varphi_k'(x')\,dx \right| \le \int\limits_{-R}^{R} |\varphi_k'(x')|\,dx \le 2R \cdot \max_{[-R,R]} |\varphi_k'(x)| \to 0$$

при $k \to \infty$. Итак, линейный функционал $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ является обобщенной функцией на $\mathcal{D}$.

Покажем, что $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ — сингулярная обобщенная функция. Пусть, напротив, существует локально интегрируемая в $\mathbf{R}^1$ функция $f(x)$, такая, что $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}$

$$\int\limits_{R^1} f(x)\varphi(x)\,dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right).$$

Рассмотрим семейство основных функций типа «шапочка»

$$\omega_\varepsilon(x) = C_\varepsilon \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right),$$

здесь постоянную C_ε выбираем так, чтобы

$$\int\limits_{R^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1,$$

т. е.

$$1 = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)\,dx = C_\varepsilon \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right) dx =$$

$$= C_\varepsilon \cdot \varepsilon \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(-\frac{1}{1 - \left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}\right) d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) =$$

$$= C_\varepsilon \cdot \varepsilon \int\limits_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{1}{1 - t^2}\right) dt = C_\varepsilon \cdot \varepsilon \cdot C_1.$$

Таким образом, $C_\varepsilon = \dfrac{1}{C_1 \cdot \varepsilon}$.

Вычислим теперь значения функционала $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ на семействе функций $x \cdot \omega_\varepsilon(x) \in \mathcal{D}$. С одной стороны,

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, x \cdot \omega_\varepsilon(x)\right) = Vp \int\limits_{R^1} \frac{x\omega_\varepsilon(x)}{x}\,dx = \int\limits_{R^1} \omega_\varepsilon(x)\,dx = 1.$$

С другой стороны, в силу неравенства Гельдера [13, с. 467]

$$\left|\int\limits_{R^1} f(x)x\omega_\varepsilon(x)\,dx\right| = C_\varepsilon\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(x)x\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}\right)dx\right| \le$$

$$\le C_\varepsilon\sqrt{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} x^2\exp\left(-\frac{2\cdot\varepsilon^2}{\varepsilon^2-x^2}\right)dx} =$$

$$= \frac{1}{C_1\cdot\varepsilon}\cdot\sqrt{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\varepsilon^3\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2\exp\left(-\frac{2}{1-\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^2}\right)d\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{\varepsilon}}{C_1}\cdot\sqrt{\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f^2(x)\,dx}\cdot\sqrt{\int\limits_{-1}^{1} t^2\exp\left(-\frac{2}{1-t^2}\right)dt} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0+$. Полученное противоречие и означает, что $\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$ — сингулярная обобщенная функция.

Пример 7. Доказать, что функционал $\mathcal{P}\dfrac{\cos kx}{x}$, действующий по правилу

$$\left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi(x)\right) = Vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\cos kx}{x}\varphi(x)\,dx \quad \forall\varphi(x)\in\mathcal{D},$$

является сингулярной обобщенной функцией.

Линейность этого функционала следует из свойства линейности интеграла и операции предельного перехода. Непрерывность этого функционала проверяется точно так же, как в примере 6. Необходимо лишь учесть, что функция $\varphi_k(0)\cdot\dfrac{\cos kx}{x}$ нечетная, поэтому

$$\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\right)\varphi_k(0)\cdot\frac{\cos kx}{x}\,dx = 0,$$

а также ограниченность $\cos kx$.

Докажем сингулярность этого функционала. Предположим обратное, т. е. пусть существует локально интегрируемая в $\mathbf{R}^1$ функция $f(x)$, такая, что

$$\left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi(x)\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Положим в этой формуле $\varphi(x) = x\omega_\varepsilon(x)$, где определение $\omega_\varepsilon(x)$ см. в примере 6, тогда

$$\left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, x\omega_\varepsilon(x)\right) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \cos kx \cdot \omega_\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\cos kx - 1)\,\omega_\varepsilon(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)\,dx = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\cos kx - 1)\omega_\varepsilon(x)\,dx + 1.$$

Поскольку функция $\cos kx$ непрерывна в нуле, то $\forall\Delta > 0\ \exists\, \varepsilon_1(\Delta) > 0$ такое, что $\forall |x| < \varepsilon_1(\Delta)$

$$|\cos kx - 1| < \Delta,$$

отсюда следует, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1(\Delta)$

$$\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (\cos kx - 1)\omega_\varepsilon(x)\,dx\right| \leq \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\cos kx - 1| \cdot \omega_\varepsilon(x)\,dx <$$

$$< \Delta \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \omega_\varepsilon(x)\,dx = \Delta,$$

т. е.

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, x\omega_\varepsilon(x)\right) = 1.$$

Но (см. пример 6)

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,x\omega_\varepsilon(x)\,dx = 0,$$

следовательно, $\mathcal{P}\dfrac{\cos kx}{x}$ — сингулярная обобщенная функция.

Задачи для самостоятельного решения

I. Доказать, что функционал, задающий действие дельта-функции Дирака (см. пример 4), является обобщенной функцией на $\mathcal{D}$.

II. Доказать, что следующие функционалы являются сингулярными обобщенными функциями:

1) $$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = Vp\int\limits_{R^1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx;$$

2) $$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^3}, \varphi(x)\right) = Vp\int\limits_{R^1} \frac{\varphi(x)-x\varphi'(0)}{x^3}\,dx;$$

3) $$\left(\mathcal{P}f\,\frac{1}{x^2+y^2}, \varphi(x;y)\right) = \iint\limits_{x^2+y^2<1} \frac{\varphi(x;y)-\varphi(0;0)}{x^2+y^2}\,dxdy + \iint\limits_{x^2+y^2>1} \frac{\varphi(x;y)}{x^2+y^2}\,dxdy;$$

4) $$\left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|}, \varphi(x)\right) = \int\limits_{|x|<1} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{|x|}\,dx + \int\limits_{|x|>1} \frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx.$$

Указание. При доказательстве сингулярности рассмотреть семейства функций $x^2\omega_\varepsilon(x)$, $x^3\omega_\varepsilon(x)$, $(x^2+y^2)\omega_\varepsilon(x,y)$, $-x\omega'_\varepsilon(x)$. В последней задаче учесть также необходимое условие интегрируемости по Риману функции.

4 Понятия носителя обобщенной функции и равенства двух обобщенных функций

Обобщенные функции, вообще говоря, не имеют значений в отдельных точках, так как их области определения состоят не из точек $\mathbf{R}^n$, а из элементов какого-либо основного пространства. Тем не менее, можно говорить об обращении в нуль обобщенной функции в области $G \subset \mathbf{R}^n$ (напомним, что областью в $\mathbf{R}^n$ называется связное открытое множество).

Определение. *Обобщенная функция f обращается в нуль в области G, если*

$$(f, \varphi(x)) = 0 \quad \forall\, \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n) \quad \text{и} \quad \operatorname{supp} \varphi(x) \subset G.$$

Этот факт записывают так:

$$f = 0, \quad x \in G \quad \text{или} \quad f(x) = 0, \quad x \in G.$$

В соответствии с этим определяют равенство двух обобщенных функций f и g следующим образом.

Определение. *Обобщенные функции f и g называются равными в области G, если*

$$f - g = 0, \quad x \in G.$$

При этом пишут $f = g$, $x \in G$. Соответственно, обобщенные функции f и g называются равными, $f = g$, если $\forall\, \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(f, \varphi(x)) = (g, \varphi(x)).$$

Определение. *Объединение всех областей G, где $f = 0$, образует открытое множество $\mathcal{O}_f$, которое называется нулевым множеством обобщенной функции f.*

Определение. *Носителем обобщенной функции f называется дополнение нулевого множества $\mathcal{O}_f$ до $\mathbf{R}^n$ и обозначается через* $\operatorname{supp} f$:

$$\operatorname{supp} f = \mathbf{R}^n \setminus \mathcal{O}_f.$$

Так как $\mathcal{O}_f$ — открытое множество (как объединение открытых множеств), то $\operatorname{supp} f$ — замкнутое множество.

Определение. *Обобщенная функция называется финитной, если* $\operatorname{supp} f$ *— ограниченное множество (т. е. компакт).*

Пример 1. Рассмотрим дельта-функцию Дирака $\delta(x)$. Если $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, то

$$(\delta(x), \varphi(x)) = 0,$$

т. е. $\mathcal{O}_{\delta(x)} \equiv \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ — нулевое множество дельта-функции. Соответственно, $\operatorname{supp}\delta(x) = \{0\}$ — носитель дельта-функции. Дельта-функция Дирака является финитной обобщенной функцией. Аналогичными рассуждениями можно получить, что носителем обобщенной функции типа простого слоя $\mu(x)\delta_S$ является поверхность S, а нулевым множеством — дополнение S до $\mathbf{R}^n$.

Пример 2. Рассмотрим функцию Хевисайда $\theta(x)$ на $\mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$. Если $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset (-\infty; 0)$, то

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \theta(x)\,\varphi(x)\,dx = 0,$$

т. е. $\mathcal{O}_{\theta(x)} \equiv (-\infty; 0)$, тогда $\operatorname{supp}\theta(x) \equiv [0; +\infty)$.

5 Пространства обобщенных функций $\mathcal{D}'$ и $\mathcal{S}'$

Пусть Φ' — одно из множеств $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ или $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, λ, $\mu \in \mathbf{R}(\mathbf{C})$, $f, g \in \Phi'$, тогда определим новую обобщенную функцию $\lambda f + \mu g$ соотношением

$$(\lambda f + \mu g, \varphi(x)) = \lambda(f, \varphi(x)) + \mu(g, \varphi(x)) \quad \forall \varphi(x) \in \Phi.$$

Линейность и непрерывность такого функционала являются простыми следствиями соответствующих свойств обобщенных функций f и g. Таким образом, множество Φ' является линейным множеством.

Введем сходимость в Φ'.

Определение. *Последовательность обобщенных функций $f_k \in \Phi'$ сходится к $f \in \Phi'$, если для любой основной функции $\varphi(x) \in \Phi$ справедливо равенство*

$$\lim_{k\to\infty} (f_k, \varphi(x)) = (f, \varphi(x)).$$

Сходимость такого типа называют *слабой сходимостью* (или *поточечной*). Линейное множество Φ' с введенной в нем сходимостью называют пространством обобщенных функций. Имеет место следующая теорема.

Теорема (о полноте пространства Φ'). *Если последовательность $\{f_k\} \in \Phi'$ такова, что для любой основной функции $\varphi(x) \in \Phi$ числовая последовательность $(f_k, \varphi(x))$ сходится при $k \to \infty$, тогда функционал f на Φ, определенный равенством*

$$(f, \varphi(x)) = \lim_{k\to\infty} (f_k, \varphi(x)), \quad \varphi(x) \in \Phi,$$

также является линейным и непрерывным на Φ, т. е. $f \in \Phi'$.

Пример 1 [5, задача № 6.19 (1)]. Вычислить предел в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ при $\varepsilon \to 0+$ семейства

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\varepsilon}, & |x| \le \varepsilon; \\ 0, & |x| \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Так как $f_\varepsilon(x)$ — локально интегрируемые функции, то $f_\varepsilon(x)$ порождают регулярные обобщенные функции по формуле (3.1) (см. § 3). Для вычисления предела исследуем семейство значений $(f_\varepsilon(x), \varphi(x))$ при $\varepsilon \to 0+$, $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$. Рассмотрим две возможные ситуации: первая — $0 \notin \operatorname{supp} \varphi(x)$, вторая — $0 \in \operatorname{supp} \varphi(x)$.

Пусть $0 \notin \operatorname{supp} \varphi(x)$, тогда $\exists\ \varepsilon_1 > 0$ такое, что $\forall\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ $\operatorname{supp} \varphi(x) \cap [-\varepsilon; \varepsilon] = \emptyset$, поэтому при $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$

$$(f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = 0 = \varphi(0).$$

Пусть $0 \in \operatorname{supp} \varphi(x)$, тогда $\forall \varepsilon > 0$ $\operatorname{supp} \varphi(x) \cap [-\varepsilon; \varepsilon] \ne \emptyset$, в этом случае

$$(f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx +$$

$$+ \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x)\varphi(0)\,dx = \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx + \varphi(0).$$

Поскольку $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, то $\varphi(x)$ непрерывна в нуле, т. е. $\forall \eta > 0\ \exists\, \varepsilon_\eta > 0$ такое, что $\forall\, |x| < \varepsilon_\eta$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta.$$

Поэтому при $0 < \varepsilon < \varepsilon_\eta$

$$0 \le \left| \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \right| \le$$

$$\leq \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |f_\varepsilon(x)| \cdot |\varphi(x) - \varphi(0)| \, dx \leq \eta \cdot \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_\varepsilon(x) \, dx = \eta,$$

т. е. $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} (f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Сравнивая полученный результат с определением сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$, заключаем, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$

$$f_\varepsilon(x) \to \delta(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+ .$$

Пример 2 [5, задача № 6.19 (2)]. Вычислить предел в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ при $\varepsilon \to 0+$ семейства

$$f_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon}{\pi(x^2 + \varepsilon^2)}.$$

Так же, как в предыдущем примере, рассмотрим две ситуации, предварительно заметив, что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) \, dx = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\frac{x}{\varepsilon})}{1 + (\frac{x}{\varepsilon})^2} = 1.$$

Пусть $0 \notin \operatorname{supp} \varphi(x)$, тогда

$$0 \leq |(f_\varepsilon(x), \varphi(x))| = \left| \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x) \varphi(x) \, dx \right| \leq \int\limits_{\operatorname{supp} \varphi(x)} |f_\varepsilon(x)| \cdot |\varphi(x)| \, dx \leq$$

$$\leq \max_{\operatorname{supp} \varphi(x)} |\varphi(x)| \cdot \int\limits_{\operatorname{supp} \varphi(x)} f_\varepsilon(x) \, dx \stackrel{\varepsilon \to 0+}{\longrightarrow} 0 = \varphi(0).$$

В справедливости последнего утверждения можно легко убедиться, если нарисовать эскиз графика функции $f_\varepsilon(x)$, затем на оси Ox отметить $\operatorname{supp} \varphi(x)$ (при этом $0 \notin \operatorname{supp} \varphi(x)$), а также не упустить из внимания исходное равенство.

Пусть $0 \in \operatorname{supp}\varphi(x)$, тогда $\forall \eta > 0\ \exists \varepsilon_\eta > 0$ такое, что $\forall\ |x| < \varepsilon_\eta$ справедливо неравенство

$$|\varphi(x) - \varphi(0)| < \eta,$$

поэтому при $0 < \Delta < \varepsilon_\eta$

$$(f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(0)\,dx +$$

$$+\left(\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} + \int\limits_{R^1\setminus[-\Delta;\Delta]}\right) f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx.$$

Рассуждая, как в случае $0 \notin \operatorname{supp}\varphi(x)$, можно получить, что при $\varepsilon \to 0+$

$$\int\limits_{R^1\setminus[-\Delta;\Delta]} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \to 0.$$

Кроме того,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon(x)\varphi(0)\,dx = \varphi(0)$$

и

$$\left|\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} f_\varepsilon(x)(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx\right| \le \eta \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} f_\varepsilon(x)\,dx \le \eta,$$

поэтому

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} (f_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Итак, доказано $f_\varepsilon(x) \to \delta(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ при $\varepsilon \to 0+$.

Пример 3 [5, задача № 6.22]. Найти предел последовательности $\mathcal{P}\dfrac{\cos kx}{x}$ при $k \to +\infty$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$.

Определение обобщенной функции $\mathcal{P}\dfrac{\cos kx}{x}$ смотреть в примере 7 § 3. Применяя теорему Лагранжа о конечных приращениях, как в примере 6 § 3, получаем

$$\left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\cos kx}{x}(\varphi(0) + x\varphi'(x'))\,dx\right\} =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\left(\int\limits_{-R}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{\cos kx}{x}(\varphi(0) + x\cdot\varphi'(x'))\,dx\right\},$$

здесь $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset [-R; R]$. В силу нечетности функции $\dfrac{\cos kx}{x}$, имеем равенство

$$\left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi(x)\right) = \int\limits_{-R}^{R} \varphi'(x')\cos kx\,dx,$$

откуда в силу леммы Римана вытекает равенство

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\mathcal{P}\frac{\cos kx}{x}, \varphi(x)\right) = 0,$$

т. е. последовательность $\mathcal{P}\dfrac{\cos kx}{x}$ при $k \to +\infty$ сходится в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ к тождественно нулевой обобщенной функции.

Пример 4 [5, задача № 6.15 (2)]. Пусть S_R — сфера с центром в начале координат и радиуса R в $\mathbf{R}^n$, рассмотрим семейство обобщенных функций типа простого слоя δ_{S_R}, действующих по формуле

$$(\delta_{S_R}, \varphi(x)) = \int\limits_{S_R} \varphi(x)\,ds.$$

Если $\varphi(x)$ — основная функция из $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\operatorname{supp}\varphi(x) \subset U_L$, то при $R > L$

$$(\delta_{S_R}, \varphi(x)) = 0,$$

поэтому в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ при $R \to +\infty$

$$\delta_{S_R} \to 0.$$

Пример 5. Доказать, что в $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^1)$ $e^{-ax}\theta(x) \to \theta(x)$, при $a \to 0+$.

Действительно, $\forall\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$ по теореме Лагранжа о среднем получаем

$$(e^{-ax}\theta(x) - \theta(x), \varphi(x)) = \int\limits_0^{+\infty} (e^{-ax} - 1)\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} -a \cdot e^{-a\xi(x)} \cdot x \cdot \varphi(x)\,dx = -a \int\limits_0^{+\infty} e^{-a\xi(x)} \cdot x \cdot \varphi(x)\,dx \to 0$$

при $a \to 0+$, так как

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-a\xi(x)} \cdot x \cdot \varphi(x)\,dx \right| \le \int\limits_0^{+\infty} x \cdot |\varphi(x)|\,dx \le K_{\varphi(x)}.$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Доказать, что следующие семейства функций сходятся в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ при $\varepsilon \to 0+$ к $\delta(x)$:

1) $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi\varepsilon}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4\varepsilon}\right)$; 2) $\dfrac{1}{\pi x} \sin \dfrac{x}{\varepsilon}$;

3) $\dfrac{\varepsilon}{\pi x^2} \sin^2 \dfrac{x}{\varepsilon}$; 4) $\omega_\varepsilon(x)$ (см. пример 6 § 3);

5) $\dfrac{1}{\varepsilon} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\theta(x)$; 6) $\dfrac{x}{\varepsilon^2} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\theta(x)$;

7) $\dfrac{x^2}{2\varepsilon^3} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\theta(x)$; 8) $\dfrac{x^n}{n!\varepsilon^{n+1}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\theta(x)$, $n \ge 3$.

Указание. При доказательстве могут быть полезны следующие равенства:

1) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} e^{-xt^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}$ [8, задача № 3830];

2) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\beta t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}\operatorname{sign}\beta$ [8, задача № 3812];

3) $\displaystyle\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha t}{t}\right)^2 dt = \frac{\pi}{2}|\alpha|$ [8, задача № 3817].

II. Пусть $\psi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $\psi(x) \geq 0$, $\displaystyle\int\limits_{R^n} \psi(x)\,dx = 1$. Доказать, что $\varepsilon^{-n}\psi\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to 0+$ в $\mathcal{D}'(R^n)$.

Указание. При доказательстве продублировать все рассуждения примера 1 настоящего пункта.

Замечание. Семейства функций из примеров 1, 2 и из задач 1, 2 принято называть *дельтообразными* семействами.

6 Линейные преобразования переменных в обобщенных функциях

Пусть $f(x)$ — локально интегрируемая в $\mathbf{R}^n$ функция и

$$x = Ay + b, \quad \det A \neq 0$$

— невырожденное линейное преобразование пространства $\mathbf{R}^n$ на себя, тогда $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(f(Ay+b), \varphi(y)) = \int\limits_{R^n} f(Ay+b)\cdot\varphi(y)\,dy = \left\{\begin{array}{c} x = Ay+b \\ y = A^{-1}(x-b) \\ dy = \dfrac{dx}{|\det A|} \end{array}\right\} =$$

$$= \int\limits_{R^n} f(x)\varphi(A^{-1}(x-b))\frac{dx}{|\det A|} = \frac{1}{|\det A|}\left(f(x), \varphi\left(A^{-1}(x-b)\right)\right).$$

Это равенство и принимают за определение обобщенной функции $f(Ay+b)$ для любой $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Определение. *Если* $\det A \neq 0$, *то* $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(f(Ay+b), \varphi(y)) = \frac{1}{|\det A|}(f(x), \varphi(A^{-1}(x-b))).$$

В частности, если линейное преобразование является *сдвигом*, т. е. $A = E$, $b \neq 0$, то

$$(f(y+b), \varphi(y)) = (f(x), \varphi(x-b));$$

если линейное преобразование является преобразованием *подобия*, т. е. $A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$, $a_{ii} \neq 0$, $b \neq 0$, то

$$(f(Ay+b), \varphi(y)) = \frac{1}{|a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}|}(f(x), \varphi(A^{-1}x)) =$$

$$= \frac{1}{|a_{11}| \cdot |a_{22}| \cdot \ldots \cdot |a_{nn}|}\left(f(x_1, x_2, \ldots x_n), \varphi\left(\frac{x_1}{a_{11}}, \frac{x_2}{a_{22}}, \ldots, \frac{x_n}{a_{nn}}\right)\right).$$

При $a_{11} = a_{22} = \ldots = a_{nn} = -1$, $b = 0$ мы имеем дело с *преобразованием симметрии обобщенных функций*, в этом случае

$$(f(-x), \varphi(x)) = (f(x), \varphi(-x)).$$

Пример 1 [5, задача № 6.28]. Доказать, что

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|^n}\delta(x), \quad a \neq 0.$$

Действительно, $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ имеем

$$(\delta(ax), \varphi(x)) = (\delta(ax_1, ax_2, \ldots, ax_n), \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)) =$$

$$= \frac{1}{|a| \cdot |a| \cdot \ldots \cdot |a|}\left(\delta(x_1, x_2, \ldots x_n), \varphi\left(\frac{x_1}{a}, \frac{x_2}{a}, \ldots, \frac{x_n}{a}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{|a|^n}\varphi(0) = \frac{1}{|a|^n}(\delta(x), \varphi(x)) = \left(\frac{1}{|a|^n}\delta(x), \varphi(x)\right).$$

Сравнивая начало и конец этой цепочки равенств, получаем требуемое тождество.

Пример 2 [5, задача № 6.15 (1)]. Доказать, что $\delta(x-\nu) \to 0$ при $\nu \to +\infty$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$.

Согласно определениям сходимости в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ и замены переменных в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ получаем, что $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$

$$(\delta(x-\nu), \varphi(x)) = (\delta(x), \varphi(x+\nu)) = \varphi(\nu).$$

Так как $\varphi(x)$ финитна, то $\varphi(x) \equiv 0$ при $|x| > R$ для некоторого $R > 0$. Следовательно, существует $N \in \mathbf{N}$, $N > R$ такое, что $\forall \nu > N$ $\varphi(\nu) = 0$, т. е. начиная с некоторого номера числовая последовательность $\varphi(\nu)$ становится тождественно нулевой, а значит

$$\lim_{\nu \to \infty} (\delta(x-\nu), \varphi(x)) = 0 \quad \forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1),$$

что и доказывает требуемое утверждение.

Пример 3 [5, задача № 6.23]. Доказать, что ряд

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(x-k)$$

1) сходится в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ $\forall a_k \in C$;

2) сходится в $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^1)$, если $|a_k| \le C(1+|k|)^m,\ m \in \mathbf{N}$.

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \delta(x-k), \varphi(x)\right) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \varphi(k),$$

согласно предыдущему примеру, правая часть этого равенства содержит *конечное* число слагаемых, поэтому первое утверждение доказано.

Если $\varphi(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^1)$, то при $x \to \infty$

$$|\varphi(x)| < \frac{1}{|x|^n} \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

(см. § 2), поэтому

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k| \cdot |\varphi(k)| \le \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C \frac{(1+|k|)^m}{|k|^n}$$

и при $n \geq m+2$ справа получаем сходящиеся числовые ряды, что и доказывает второе утверждение.

7 Умножение обобщенных функций

Пусть $f(x)$ локально интегрируема в $\mathbf{R}^n$ и $a(x)$ — функция класса $\mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, тогда произведение $a(x)f(x)$ также локально интегрируемо в $\mathbf{R}^n$, а значит порождает регулярную обобщенную функцию, действующую по формуле (3.1), т. е. $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = \int\limits_{R^n} a(x)f(x)\varphi(x)\,dx.$$

Но $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$ и $\forall a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$ произведение $a(x)\varphi(x)$ принадлежит $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$. Применим к этой основной функции обобщенную функцию $f(x)$

$$(f(x), a(x)\varphi(x)) = \int\limits_{R^n} f(x)a(x)\varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, для локально интегрируемой функции $f(x)$ справедливо равенство

$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), a(x)\varphi(x)) \quad \forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n),$$

которое и принимают за определение произведения произвольной обобщенной функции $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и бесконечно дифференцируемой функции $a(x)$.

Определение. *Если* $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, *тогда* $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(a(x)f(x), \varphi(x)) = (f(x), a(x)\varphi(x)).$$

Отметим, что это определение непригодно в случае $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$. Действительно, если $a(x) = \exp|x|^2$, то $a(x)\cdot\exp(-|x|^2) \equiv 1 \notin \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, и формула из определения теряет смысл для $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$.

Пример 1 [5, задача № 6.26 (1)]. Доказать, что $\forall a(x) \in \mathcal{C}^{\infty}(\mathbf{R}^n)$

$$a(x)\delta(x) = a(0)\delta(x).$$

Действительно, $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(a(x)\delta(x), \varphi(x)) = (\delta(x), a(x)\varphi(x)) = a(0)\varphi(0) =$$

$$= a(0)(\delta(x), \varphi(x)) = (a(0)\delta(x), \varphi(x)).$$

В частности, $x\delta(x) = 0$ при $x \in \mathbf{R}^1$.

Пример 2. Доказать, что

$$x\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, тогда

$$\left(x\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, x\varphi(x)\right) = Vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cdot \varphi(x) - 0 \cdot \varphi(0)}{x^2}\, dx =$$

$$= Vp\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x}\, dx = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right).$$

Пример 3 [5, задача № 6.21]. Вычислить пределы в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ при $t \to +\infty$

$$\frac{e^{ixt}}{x - i0}, \quad \frac{e^{ixt}}{x + i0}.$$

Здесь введены две новые обобщенные функции, действующие по правилу

$$\left(\frac{1}{x \pm i0}, \varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon \to 0+} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x \pm i \cdot \varepsilon}\, dx.$$

Для этих обобщенных функций справедливы следующие представления, называемые формулами Сохоцкого [6, с. 77]

$$\frac{1}{x \pm i0} = \mp i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x},$$

из которых можно сделать вывод, что две новые обобщенные функции являются сингулярными.

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, тогда

$$\left(\frac{e^{ixt}}{x-i0}, \varphi(x)\right) = \left(e^{ixt}\left(i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}\right), \varphi(x)\right) =$$

$$= \left(i\pi\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{x}, e^{ixt}\varphi(x)\right) = i\pi\varphi(0) + \left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, e^{ixt}\varphi(x)\right)$$

$$\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, e^{ixt}\varphi(x)\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\cos(xt)\varphi(x) + i\sin(xt)\varphi(x)}{x}\,dx\right) =$$

$$= \left(\mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x}, \varphi(x)\right) + i\pi\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\sin(xt)}{\pi x}\varphi(x)\,dx\right).$$

Согласно примеру 3 § 5, при $t \to +\infty$

$$\left(\mathcal{P}\frac{\cos(xt)}{x}, \varphi(x)\right) \to 0,$$

а, принимая во внимание задачу 1.2 из § 5 при $t \to +\infty$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\sin(xt)}{\pi x}\varphi(x)\,dx\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{\pi x}\varphi(x)\,dx \to (\delta(x), \varphi(x)).$$

Таким образом, при $t \to +\infty$ $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$\left(\frac{e^{ixt}}{x-i0}, \varphi(x)\right) \to 2i\pi\varphi(0) = (2\pi i\delta(x), \varphi(x))$$

или

$$\frac{e^{ixt}}{x-i0} \to 2\pi i\delta(x).$$

Аналогично можно получить вывод

$$\frac{e^{ixt}}{x+i0} \to 0.$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Доказать предельные соотношения при $t \to +\infty$

1) $\dfrac{e^{-ixt}}{x - i0} \to 0;$ 2) $\dfrac{e^{-ixt}}{x + i0} \to -2\pi i\delta(x);$

3) $t^m e^{ixt} \to 0, \;\; m \geq 0;$ 4) $te^{ixt}\theta(x) \to i\delta(x).$

II. Доказать, что:

1) $x\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = x^2\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2} = x^3\mathcal{P}\dfrac{1}{x^3} = 1;$

2) $x\mathcal{P}\dfrac{1}{x^3} = \mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}, \quad x^2\mathcal{P}\dfrac{1}{x^3} = \mathcal{P}\dfrac{1}{x};$

3) $x^m\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = x^{m-1}, \;\; m \geq 1;$

4) $x^m\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2} = x^{m-2}, \;\; m \geq 2;$

5) $x^m\mathcal{P}\dfrac{1}{x^3} = x^{m-3}, \;\; m \geq 3.$

III. Доказать, что обобщенная функция $\mathcal{P}f\dfrac{1}{x^2+y^2}$ (см. задачи к § 3) удовлетворяет в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ уравнению

$$(x^2+y^2)\mathcal{P}f\frac{1}{x^2+y^2} = 1.$$

IV. При всех значениях параметра $k \in N \cup \{0\}$ исследовать на сингулярность обобщенные функции: $x^k\mathcal{P}\dfrac{1}{x}, \;\; x^k\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}, \;\; x^k\mathcal{P}\dfrac{1}{x^3}.$

8 Дифференцирование обобщенных функций

Если $f(x) \in \mathcal{C}^p(\mathbf{R}^n)$ и $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, то $\forall\alpha$, $|\alpha| \leq p$ справедливо интегрирование по частям для n-кратного интеграла

$$\int\limits_{R^n} D^\alpha f(x)\cdot\varphi(x)\,dx = (-1)^{|\alpha|}\int\limits_{R^n} f(x)\cdot D^\alpha\varphi(x)\,dx.$$

Внеинтегральные члены обратились в ноль в силу финитности основной функции $\varphi(x)$. Поскольку функции $D^\alpha f(x)$ и $f(x)$ локально интегрируемы (как непрерывные на $\mathbf{R}^n$ функции), то они порождают по формуле (3.1) регулярные обобщенные функции, для которых справедливо равенство $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(D^\alpha f(x), \varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|}(f(x), D^\alpha \varphi(x)).$$

Это равенство и принимают за определение *производной* $D^\alpha f$ любой обобщенной функции f.

Определение. $\forall\alpha,\ \forall f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n),\ \forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(D^\alpha f, \varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|}(f, D^\alpha \varphi(x)). \tag{8.1}$$

Линейность этого функционала следует из свойств линейности операции дифференцирования и f. Если $\varphi_k(x) \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, то $D^\alpha\varphi_k(x) \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, поэтому в силу непрерывности функционала f, $(D^\alpha f, \varphi_k(x)) \to 0$, т. е. равенство (8.1) действительно определяет обобщенную функцию класса $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$.

Приведем здесь без доказательства основные свойства обобщенных производных [6, с. 83–85]:

1) операция D^α линейна и непрерывна из $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$;

2) любая обобщенная функция бесконечное число раз дифференцируема;

3) результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования;

4) $\operatorname{supp} D^\alpha f \subset \operatorname{supp} f$;

5) если $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n),\ a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, то $a(x)\cdot f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(a(x)f(x)) = \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\cdot f(x) + a(x)\cdot\frac{\partial f(x)}{\partial x_i};$$

6) если обобщенная функция f порождена функцией $f(x) \in \mathcal{C}^p(G)$, то $D^\alpha f$ при $|\alpha| \le p$ порождается соответствующей

классической производной $\{D^\alpha f(x)\}$ от $f(x)$, т. е.

$$D^\alpha f = \{D^\alpha f(x)\}, \quad x \in G, \quad |\alpha| \le p.$$

Пример 1 [5, задача № 7.4]. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$

$$\theta'(x) = \delta(x).$$

Действительно, $\forall \varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$(\theta'(x), \varphi(x)) = -(\theta(x), \varphi'(x)) = -\int\limits_0^{+\infty} \varphi'(x)\,dx =$$

$$= -\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} = \varphi(0) = (\delta(x), \varphi(x)).$$

Пример 2 [5, задача № 7.3 (1)]. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ $\forall\, a(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$

$$a(x)\delta'(x) = -a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x).$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$(a(x)\delta'(x), \varphi(x)) = (\delta'(x), a(x)\varphi(x)) = -(\delta(x), a'(x)\varphi(x) + a(x)\varphi'(x)) =$$

$$= -a'(0)\varphi(0) - a(0)\varphi'(0) = -a'(0)(\delta(x), \varphi(x)) - a(0)(\delta(x), \varphi'(x)) =$$

$$= (-a'(0)\delta(x) + a(0)\delta'(x), \varphi(x)).$$

Пример 3 [5, задача № 7.5 (1)]. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ $\forall\, a(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^1)$

$$(a(x)\theta(x))' = a(0)\delta(x) + a'(x)\theta(x).$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$((a(x)\theta(x))', \varphi(x)) = -(a(x)\theta(x), \varphi'(x)) = -(\theta(x), a(x)\varphi'(x)) =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} a(x)\varphi'(x)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} a(x)\,d(\varphi(x)) =$$

$$= -a(x)\varphi(x)\Big|_0^{+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} a'(x)\varphi(x)\,dx = a(0)\varphi(0) + (\theta(x), a'(x)\varphi(x)) =$$
$$= a(0)(\delta(x), \varphi(x)) + (a'(x)\theta(x), \varphi(x)) = (a(0)\delta(x) + a'(x)\theta(x), \varphi(x)).$$

Пример 4 [5, задача № 7.13]. Пусть $f(x) \in \mathcal{C}^1(x \leq x_0) \cap \mathcal{C}^1(x \geq x_0)$, тогда в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ справедливо равенство

$$f' = \{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x - x_0),$$

где $[f]_{x_0} = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ — скачок функции $f(x)$ в точке x_0.

Действительно, $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$

$$(f', \varphi(x)) = -(f, \varphi'(x)) =$$
$$= -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)\,dx = -\left(\int\limits_{-\infty}^{x_0} + \int\limits_{x_0}^{+\infty}\right) f(x)\,d(\varphi(x)) =$$
$$= -f(x)\cdot\varphi(x)\left(\Big|_{-\infty}^{x_0} + \Big|_{x_0}^{+\infty}\right) + \left(\int\limits_{-\infty}^{x_0} + \int\limits_{x_0}^{+\infty}\right) f'(x)\cdot\varphi(x)\,dx =$$
$$= -f(x_0 - 0)\varphi(x_0) + f(x_0 + 0)\varphi(x_0) + (\{f'(x)\}, \varphi(x)) =$$
$$= [f]_{x_0}\varphi(x_0) + (\{f'(x)\}, \varphi(x)) = (\{f'(x)\} + [f]_{x_0}\delta(x), \varphi(x)).$$

Если $f(x)$ — кусочно-непрерывнодифференцируемая функция, имеющая изолированные разрывы 1-го рода в точках x_k, то доказанная в этом примере формула принимает вид

$$f' = \{f'(x)\} + \sum_k [f]_{x_k}\delta(x - x_k).$$

Пример 5 [5, задача № 7.10 (2)]. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$

$$\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x} = -\mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$\left(\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi(x)\right) = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{x}, \varphi'(x)\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi'(x)}{x}\,dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\left(\Big|_{-\infty}^{-\varepsilon} + \Big|_{\varepsilon}^{+\infty}\right) + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(-\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(0)}{x^2}\,dx + \right.$$

$$\left. + \left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x^2}\,dx\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\frac{\varphi(-\varepsilon)-\varphi(0)}{-\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}\right) - \left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) =$$

$$= -\varphi'(0-) + \varphi'(0+) - \left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right) = -\left(\mathcal{P}\frac{1}{x^2}, \varphi(x)\right),$$

так как $\varphi'(0-) = \varphi'(0+)\ \ \forall\,\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$.

Пример 6. Найти общее решение в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ дифференциального уравнения

$$x^2 y''' = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Поскольку данное дифференциальное уравнение является линейным и неоднородным, то его общее решение представимо в виде суммы $y_1(x)$ — некоторого частного решения неоднородного уравнения и $y_2(x)$ — общего решения соответствующего однородного уравнения. Найдем эти составляющие в отдельности:

$$x^2 y_1''' = \mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

В силу задачи № 2.2 § 7 заключаем, что

$$y_1''' = \mathcal{P}\frac{1}{x^3}.$$

Проинтегрируем это уравнение (см. задачу № 1.7 § 8)

$$y_1'' = -\frac{1}{2}\mathcal{P}\frac{1}{x^2}.$$

На основании примера 5 настоящего параграфа

$$y_1' = \frac{1}{2}\mathcal{P}\frac{1}{x}.$$

Учитывая теперь задачу № 1.6 § 8, имеем

$$y_1 = \frac{1}{2}\ln|x|.$$

Известно, что общим решением уравнения

$$x^m y = 0$$

в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ является функция

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} c_k \delta^{(k)}(x)$$

[6, с. 90–91; 5, задача № 7.22 (9)]. Поскольку составляющая $y_2(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$x^2 y_2''' = 0,$$

то

$$y_2''' = c_0\delta(x) + c_1\delta'(x).$$

Проинтегрируем это уравнение последовательно три раза с учетом примера 3 настоящего параграфа:

$$y_2'' = c_0\theta(x) + c_1\delta(x) + c_2,$$

$$y_2' = c_0 x\theta(x) + c_1\theta(x) + c_2 x + c_3,$$

$$y_2 = c_0\frac{x^2}{2}\theta(x) + c_1 x\theta(x) + c_2\frac{x^2}{2} + c_3 x + c_4.$$

Итак, общим решением является функция

$$y = \frac{1}{2}\ln|x| + (c_0x^2 + c_1x)\theta(x) + c_2x^2 + c_3x + c_4,$$

где c_0, c_1, c_2, c_3, c_4 — произвольные постоянные.

Обратим внимание, что классические решения дифференциальных уравнений 3-го порядка содержат три произвольных постоянных.

При $x \neq 0$, $\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$, поэтому при $x \neq 0$ исходное уравнение принимает вид

$$y''' = \frac{1}{x^3},$$

его общее решение

$$y(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + c_2x^2 + c_3x + c_4.$$

Таким образом, классические решения получаются из обобщенных, если в последних положить $c_0 = c_1 = 0$.

Пример 7 [5, задача № 7.26]. Доказать, что общим решением в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ уравнения

$$xy = \operatorname{sign} x$$

является обобщенная функция

$$y = c\delta(x) + \mathcal{P}\frac{1}{|x|},$$

где определение $\mathcal{P}\dfrac{1}{|x|}$ см. в задаче № 2.4 из § 3.

В обозначениях предыдущего примера

$$y_1(x) = \mathcal{P}\frac{1}{|x|}, \quad y_2(x) = c\delta(x).$$

Необходимо проверить, действительно ли $y_1(x)$ — частное решение уравнения. Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$(xy_1(x), \varphi(x)) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{|x|}, x\varphi(x)\right) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x \cdot \varphi(x) - 0 \cdot \varphi(0)}{|x|}\,dx +$$

$$+ \left(\int\limits_{-\infty}^{-1} + \int\limits_{1}^{+\infty}\right) x\frac{\varphi(x)}{|x|}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{|x|}\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} x \cdot \varphi(x)\, dx = (\operatorname{sign} x, \varphi(x)).$$

Пример 8. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$

$$h_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\varepsilon^4} x(x-2\varepsilon) e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \to -\delta'(x) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0+\,.$$

Первый способ. Воспользуемся свойством непрерывности операции дифференцирования из $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, т. е. из сходимости $f_k \to f$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ следует сходимость $D^\alpha f_k \to D^\alpha f$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ $\forall D^\alpha$. В задаче № 1.7 для самостоятельного решения к § 5 предлагалось доказать предельное равенство $\dfrac{x^2}{2\varepsilon^3} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \to \delta(x)$ при $\varepsilon \to 0+$, из которого в силу непрерывности операции дифференцирования следует

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2\varepsilon^3} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x)\right) = \left(\frac{x}{\varepsilon^3} - \frac{x^2}{2\varepsilon^4}\right) e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \to \delta'(x)$$

при $\varepsilon \to 0+$, что и завершает доказательство.

Второй способ. Для функции $g_\varepsilon(x) = \dfrac{x^2}{2\varepsilon^3} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x)$ непосредственными вычислениями находим $\lim\limits_{x\to 0+} g_\varepsilon(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g_\varepsilon(x) = 0$, $\max\limits_{[0;+\infty)} =$

$$g_\varepsilon(2\varepsilon) = \frac{2}{e^2 \cdot \varepsilon}, \quad \int\limits_0^{+\infty} g_\varepsilon(x)\, dx = 1 \text{ и}$$

$$\forall A > 0 \quad \int\limits_A^{+\infty} h_\varepsilon(x)\, dx = \frac{A^2}{2\cdot\varepsilon^3} e^{-\frac{A}{\varepsilon}} \to 0$$

при $\varepsilon \to 0+\,.$

Дальнейшие рассуждения проведем по той же схеме, что и в § 5. Пусть $0 \notin \operatorname{supp} \varphi(x)$, тогда

$$0 \le |(h_\varepsilon(x), \varphi(x))| = \left| \int\limits_0^{+\infty} h_\varepsilon(x)\varphi(x)\, dx \right| \le \int\limits_{\mathbf{R}^1 \cap \operatorname{supp} \varphi(x)} |h_\varepsilon(x)| \cdot |\varphi(x)|\, dx \le$$

$$\leq \max_{\operatorname{supp}\varphi(x)} |\varphi(x)| \cdot \int\limits_{\mathbf{R}^1 \cap \operatorname{supp}\varphi(x)} h_\varepsilon(x)\,dx \overset{2\varepsilon \leq A}{\leq}$$

$$\leq \max_{\operatorname{supp}\varphi(x)} |\varphi(x)| \cdot \frac{A^2}{2\cdot\varepsilon^3} e^{-\frac{A}{\varepsilon}} \overset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} 0 = \varphi'(0) = (-\delta'(x), \varphi(x)),$$

здесь $A = \inf(\operatorname{supp}\varphi(x) \cap [0;+\infty)) > 0$.

Пусть $0 \in \operatorname{supp}\varphi(x)$, тогда $\forall \eta > 0\ \exists \varepsilon_\eta > 0$ такое, что $\forall\,|x| < \varepsilon_\eta$ справедливо неравенство

$$|\varphi'(x) - \varphi'(0)| < \eta,$$

поэтому при $0 < \Delta < \varepsilon_\eta$

$$(h_\varepsilon(x), \varphi(x)) = \int\limits_0^{+\infty} h_\varepsilon(x)\varphi(x)\,dx - \int\limits_0^{+\infty} g_\varepsilon(x)\varphi'(x)\,dx +$$

$$+ \int\limits_0^{+\infty} g_\varepsilon(x)(\varphi'(x) - \varphi'(0))\,dx + \varphi'(0) =$$

$$= \int\limits_0^{\Delta} g_\varepsilon(x)(\varphi'(x) - \varphi'(0))\,dx + \int\limits_{\Delta}^{\infty} g_\varepsilon(x)(\varphi'(x) - \varphi'(0))\,dx + \varphi'(0).$$

Отсюда получаем

$$\left|\int\limits_{\Delta}^{\infty} g_\varepsilon(x)(\varphi'(x) - \varphi'(0))\,dx\right| \leq 2K_{\varphi(x)} \int\limits_{\Delta}^{\infty} g_\varepsilon(x)\,dx \overset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} 0,$$

где $K_{\varphi(x)} = \max\limits_{\mathbf{R}^1} |\varphi'(x)|$, и

$$\left|\int\limits_0^{\Delta} g_\varepsilon(x)(\varphi'(x) - \varphi'(0))\,dx\right| \leq \int\limits_0^{\Delta} g_\varepsilon(x)|\varphi'(x) - \varphi'(0)|\,dx < \eta,$$

т. е. $(h_\varepsilon(x), \varphi(x)) \overset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \varphi'(0) = (-\delta'(x), \varphi(x))$.

Таким образом, в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ доказано предельное равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} h_\varepsilon(x) = -\delta'(x).$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Показать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$:

1) $x\delta^{(m)}(x) = -m\delta^{(m-1)}(x), \ \ m = 1, 2, \dots;$

2) $x^m\delta^{(m)}(x) = (-1)^m \cdot m! \cdot \delta(x), \ \ m = 0, 1, 2, \dots;$

3) $x^k\delta^{(m)} = 0, \ \ m = 0, 1, \dots, k-1;$

4) $a(x)\delta^{(m)}(x) = \sum\limits_{j=0}^{m}(-1)^{m+j}C_m^j a^{(m-j)}(0)\delta^{(j)}(x);$

5) $x^k\delta^{(m)}(x) = (-1)^k k! C_m^k \delta^{(m-k)}(x), \ \ m = k, k+1, \dots;$

6) $(\ln|x|)' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, где

$$(\ln|x|, \varphi(x)) = \lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\left(\int\limits_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int\limits_{\varepsilon}^{+\infty}\right)\ln|x|\cdot\varphi(x)\,dx\right);$$

7) $\left(\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}\right)' = -2\mathcal{P}\dfrac{1}{x^3};$

8) $\left(\dfrac{d}{dx} - \lambda\right)e^{\lambda x}\theta(x) = \delta(x);$

9) $\left(\dfrac{d^2}{dx^2} + \omega^2\right)\dfrac{\sin(\omega x)}{\omega}\theta(x) = \delta(x);$

10) $\dfrac{d^m}{dx^m}\dfrac{x^{m-1}}{(m-1)!}\theta(x) = \delta(x).$

II. Какое множество является носителем обобщенной функции $\theta''(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$?

III. Найти общие решения в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ следующих уравнений:

1) $y'' = \delta(x)$;
2) $xy' = 1$;
3) $xy' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$;
4) $x^2y' = 2$;
5) $x^2y' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$;
6) $xy' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$;
7) $xy'' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$;
8) $xy'' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$;
9) $y''' = \theta(x)$;
10) $x^3y' = 3$;
11) $x^2y'' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x}$;
12) $x^2y'' = 2$;
13) $xy''' = \mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$;
14) $x^my' = x^{m-1}$, $m \geq 1$;
15) $x^my' = x^{m-2}$, $m \geq 2$;
16) $x^my' = x^{m-3}$, $m \geq 3$;
17) $x^my'' = x^{m-2}$, $m \geq 2$;
18) $x^my'' = x^{m-3}$, $m \geq 3$;
19) $x^my''' = x^{m-3}$, $m \geq 3$.

IV. Доказать, что общим решением в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ уравнения

$$x^n \cdot y^{(m)} = 0, \quad n > m,$$

является обобщенная функция

$$y = \sum_{k=0}^{m-1} a_k \cdot x^{m-k-1}\theta(x) + \sum_{k=m}^{n-1} b_k \cdot \delta^{(k-m)}(x) + \sum_{k=0}^{m-1} c_k \cdot x^k,$$

где a_k, b_k, c_k — произвольные постоянные.

V. Доказать предельные равенства в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ при $\varepsilon \to 0+$:

1) $\dfrac{2\sin\frac{x}{\varepsilon}}{\pi x^3}\left(x\cos\dfrac{x}{\varepsilon} - \varepsilon\sin\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \to \delta'(x)$;

2) $\dfrac{1}{\varepsilon^2x^2}\left((x^2 - 2\varepsilon^2)\sin\dfrac{x}{\varepsilon} + 2\varepsilon x\cos\dfrac{x}{\varepsilon}\right) \to -\pi\delta''(x)$;

3) $\dfrac{1}{\varepsilon^2}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\theta(x) - \dfrac{1}{\varepsilon}\delta(x) \to -\delta'(x)$;

4) $\dfrac{1}{\varepsilon^3}e^{-\frac{x}{\varepsilon}}\theta(x) - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\delta(x) + \dfrac{1}{\varepsilon}\delta'(x) \to \delta''(x)$;

5) $\dfrac{2\varepsilon - x}{\varepsilon^4} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) - \dfrac{1}{\varepsilon^2}\delta(x) \to -\delta''(x);$

6) $\dfrac{x^{n-2}\big((n+\sqrt{n})\varepsilon - x\big)\big((n-\sqrt{n})\varepsilon + x\big)}{\varepsilon^{n+3}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \to n!\delta''(x);$

7) $\dfrac{x^{n-1}(x - n\varepsilon)}{\varepsilon^{n+2}} e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) \to -n!\delta'(x);$

8) $-\dfrac{1}{\varepsilon^6}(x^2 - 6\varepsilon x + 6\varepsilon^2) e^{-\frac{x}{\varepsilon}} \theta(x) + \dfrac{2}{\varepsilon^3}\delta(x) \to 2\delta'''(x).$

VI. Доказать, что в $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^1)$ при $\varepsilon \to 0+$ справедливо предельное соотношение $\varepsilon\big(\varepsilon e^{-\varepsilon x}\theta(x) - \delta(x)\big) \to 0.$

9 Прямое (тензорное) произведение обобщенных функций

Пусть дано два евклидовых пространства $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, \ldots y_n)$ — точки этих пространств, тогда $\mathbf{R}^{m+n} = \mathbf{R}^m \bigotimes \mathbf{R}^n$ — тоже евклидово пространство, и его точками являются пары $(x, y) = (x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. Если на $\mathbf{R}^m$ задана числовая функция $f(x)$, а на $\mathbf{R}^n$ — числовая функция $g(y)$, то *тензорным (прямым) произведением* этих функций называют функцию $h(x, y) = f(x)g(y),$ определенную на $\mathbf{R}^{m+n}$. Если $f(x)$ и $g(y)$ локально интегрируемы на $\mathbf{R}^m$ и $\mathbf{R}^n$ соответственно, то $h(x, y)$ локально интегрируема на $\mathbf{R}^{m+n}$, т. е. $h(x, y)$ порождает регулярную обобщенную функцию, действующую на основные $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$ по формулам

$$(h(x,y), \varphi(x,y)) = \int\limits_{R^{m+n}} f(x)g(y)\varphi(x,y)\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{R^m} f(x) \left(\int\limits_{R^n} g(y)\varphi(x,y)\,dy \right) dx = (f(x), (g(y), \varphi(x,y)))$$

или

$$(h(x,y), \varphi(x,y)) = (g(y), (f(x), \varphi(x,y))),$$

выражающим теорему Фубини [11, с. 53] о совпадении кратных и повторных интегралов. Любое из полученных равенств (например первое) примем за определение *прямого (тензорного) произведения* любых двух обобщенных функций.

Определение. *Пусть* $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$, $g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, *тогда* $\forall\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$

$$(f(x)\cdot g(y), \varphi(x,y)) = (f(x), (g(y), \varphi(x,y))). \tag{9.1}$$

Корректность этого определения гарантируется следующей леммой.

Лемма. *Для любых* $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ *и* $\varphi(x,y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$ *справедливы утверждения:*

а) $\psi(x) = (g(y), \varphi(x,y)) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$;

б) $\forall\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

$$D^\alpha\psi(x) = (g(y), D_x^\alpha\varphi(x,y));$$

в) если $\varphi_k(x,y) \to 0$ *в* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$, *то* $\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x,y)) \to 0$ *в* $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$.

В соответствии с этой леммой правая часть формулы (9.1), равная $(f(x), \psi(x))$, имеет смысл $\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ и $\forall g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, т. е. это равенство действительно определяет функционал на $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$. Из линейности f и g следует линейность $f(x)\cdot g(y)$. Осталось проверить непрерывность этого линейного функционала. Пусть $\varphi_k(x,y) \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$, тогда $\psi_k(x) = (g(y), \varphi_k(x,y)) \to 0$ в $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ и в силу непрерывности $f(x)$ на $\mathcal{D}(\mathbf{R}^m)$ $(f(x), (g(y), \varphi_k(x,y))) \to 0$.

Итак, $f(x)\cdot g(y) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{m+n})$.

Сформулируем основные свойства прямого произведения [6, с. 102–104]:

1) (*коммутативность*) если $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, то

$$f(x)\cdot g(y) = g(y)\cdot f(x);$$

2) прямое произведение $f(x) \cdot g(y)$ линейно и непрерывно по каждому из своих множителей;

3) (*ассоциативность*) если $f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$, $g \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, $h \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^k)$, то

$$f(x) \cdot [g(y) \cdot h(z)] = [f(x) \cdot g(y)] \cdot h(z);$$

4) (*дифференцирование*) $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$

$$D_x^\alpha [f(x) \cdot g(y)] = D_x^\alpha f(x) \cdot g(y);$$

5) (*умножение*) $\forall a(x) \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^m)$

$$a(x)[f(x) \cdot g(y)] = a(x) f(x) \cdot g(y);$$

6) обобщенную функцию вида $f(x) \cdot 1(y)$ называют *не зависящей от y*. Такая обобщенная функция действует на основные функции $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$ по правилу

$$(f(x) \cdot 1(y), \varphi(x, y)) = \left(f(x), \int\limits_{R^n} \varphi(x, y)\, dy \right)$$

или

$$(f(x) \cdot 1(y), \varphi(x, y)) = (1(y), (f(x), \varphi(x, y))) = \int\limits_{R^n} (f(x), \varphi(x, y))\, dy.$$

Таким образом, $\forall f \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^m)$ и $\forall \varphi(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^{m+n})$ справедливо равенство

$$\left(f(x), \int\limits_{R^n} \varphi(x, y)\, dy \right) = \int\limits_{R^n} (f(x), \varphi(x, y))\, dy;$$

7) $\operatorname{supp} [f(x) \cdot g(y)] = \operatorname{supp} f(x) \times \operatorname{supp} g(y)$.

Определим обобщенную функцию $\delta(at - |x|) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$, $a > 0$, равенством

$$\delta(at - |x|) = \theta(t) \cdot \delta(at + x) + \theta(t) \cdot \delta(at - x),$$

где обобщенные функции $\theta(t)\cdot\delta(at\pm x)$ есть результаты линейной замены переменных $\tau = t$, $\xi = at \pm x$ у обобщенной функции $\theta(\tau)\cdot\delta(\xi)$, т. е.

$$(\theta(t)\cdot\delta(at+x),\varphi(t,x)) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t,-at)\,dt,$$

$$(\theta(t)\cdot\delta(at-x),\varphi(t,x)) = \int\limits_0^{+\infty} \varphi(t,at)\,dt.$$

Пример 1 [5, задача № 8.8 (1)]. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|) = a\delta(at-|x|).$$

Здесь

$$\theta(at-|x|) = \begin{cases} 1, & at-|x| \geq 0; \\ 0, & at-|x| < 0. \end{cases}$$

Носителем $\theta(at-|x|)$ является *конус будущего*, изображенный на рис. 3.

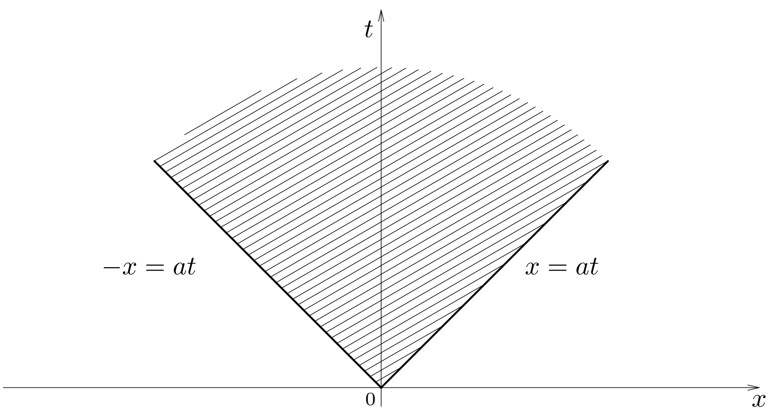

Рис. 3

Пусть $\varphi(t,x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|),\varphi(t,x)\right)=-\left(\theta(at-|x|),\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=$$

$$=-\int\limits_{-\infty}^{0}dx\int\limits_{-\frac{x}{a}}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt-\int\limits_{0}^{+\infty}dx\int\limits_{\frac{x}{a}}^{+\infty}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt=$$

$$=-\int\limits_{-\infty}^{0}\left(\varphi(t,x)\Big|_{-\frac{x}{a}}^{+\infty}\right)dx-\int\limits_{0}^{+\infty}\left(\varphi(t,x)\Big|_{\frac{x}{a}}^{+\infty}\right)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi\left(-\frac{x}{a},x\right)dx+\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi\left(\frac{x}{a},x\right)dx.$$

В первом интеграле осуществим замену переменных $\tau=-\dfrac{x}{a}$, а во втором — $\tau=\dfrac{x}{a}$, тогда

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(at-|x|),\varphi(t,x)\right)=-a\int\limits_{-\infty}^{0}\varphi(\tau,-a\tau)\,d\tau+a\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\tau,a\tau)\,d\tau=$$

$$=a\left\{\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\tau,-a\tau)\,d\tau+\int\limits_{0}^{+\infty}\varphi(\tau,a\tau)\,d\tau\right\}=$$

$$=a\big\{(\theta(t)\cdot\delta(at+x),\varphi(t,x))+(\theta(t)\cdot\delta(at-x),\varphi(t,x))\big\}=$$

$$=a(\delta(at-|x|),\varphi(t,x)).$$

Пример 2 [5, задача № 8.8 (4)]. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(at-|x|),\varphi(t,x)\right)=$$

$$=-\left(\theta(t)\cdot\delta(at+x),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\left(\theta(t)\cdot\delta(at-x),\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right).$$

Действительно, $\forall\varphi(t,x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\theta(at-|x|),\varphi(t,x)\right)=\left(\theta(at-|x|),\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right)=$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_{-at}^{at} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=at} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\Big|_{x=-at} \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \big(\varphi'_x(t, at) - \varphi'_x(t, -at)\big) dt =$$

$$= \big(\theta(t)\cdot\delta(at-x) - \theta(t)\cdot\delta(at+x),\ \varphi'_x(t,x)\big).$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Показать, что

1) $\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \theta(x_1)\cdot\theta(x_2)\cdot\ldots\cdot\theta(x_n)$;

2) $\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_n)$;

3) $\dfrac{\partial^n\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_1\partial x_2\ldots\partial x_n} = \delta(x_1)\cdot\delta(x_2)\cdot\ldots\cdot\delta(x_n)$.

II. Доказать, что в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$:

1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\theta(at - |x|) = \theta(t)\cdot\delta(at+x) - \theta(t)\cdot\delta(at-x)$;

2) $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\theta(at-|x|), \varphi(t,x)\right) = -a\big(\delta(at-|x|),\ \varphi'_t(t,x)\big)$.

III. Доказать свойство 7 прямого произведения и изобразить на координатной плоскости носители следующих обобщенных функций из $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$:

$$\delta(x-a)\cdot\theta(y-b), \quad \theta(x-a)\cdot\delta(y-b), \quad \delta(x-a)\cdot\delta(y-b).$$

10 Свертка обобщенных функций

По сравнению с операцией прямого произведения, свертка является преобразованием другой природы.

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — локально интегрируемые функции на $\mathbf{R}^n$. Свертка этих двух функций определяется соотношением

$$h(x) = f(x) * g(x) = \int\limits_{R^n} f(t) \cdot g(x-t)\,dt = \int\limits_{R^n} g(t) \cdot f(x-t)\,dt$$

(если только интегралы существуют). Равенство этих двух интегралов легко проверить заменой переменных $z = x - t$. Если, в частности, функции $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат классу $\mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$, то $f(x)*g(x) \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^n)$.

Отметим три частных случая, когда свертка существует и является локально интегрируемой функцией:

1) одна (или обе) из функций $f(x)$ или $g(x)$ финитна;

2) одна из функций интегрируема на $\mathbf{R}^n$, а другая ограничена на $\mathbf{R}^n$ (или тоже интегрируема на $\mathbf{R}^n$);

3) если $n = 1$ и $\operatorname{supp} f(x) \subset \mathbf{R}^1_+$, $\operatorname{supp} g(x) \in \mathbf{R}^1_+$, в этом случае

$$f(x) * g(x) = \begin{cases} \int\limits_0^x f(t) \cdot g(x-t)\,dt, & x \geq 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Чтобы распространить определение свертки на обобщенные функции, рассмотрим сначала локально интегрируемые функции $f(x)$ и $g(x)$, определенные на $\mathbf{R}^n$, в предположении, что их свертка $h(x)$ существует и также является локально интегрируемой функцией. В этом случае каждая из функций $f(x)$, $g(x)$ и $h(x)$ порождает регулярную обобщенную функцию. Исследуем, как связаны между собой действия этих обобщенных функций на основные. Пусть

$\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, тогда

$$(h(x), \varphi(x)) = \int\limits_{R^n} h(x) \cdot \varphi(x)\, dx = \int\limits_{R^n} \left[\int\limits_{R^n} f(\xi) \cdot g(x-\xi)\, d\xi \right] \varphi(x)\, dx.$$

Осуществим замену переменных $\eta = x - \xi$, тогда

$$(h(x), \varphi(x)) = \iint\limits_{R^{2n}} f(\xi) g(\eta) \varphi(\eta + \xi)\, d\eta\, d\xi.$$

Но правую часть этого равенства можно трактовать как результат действия прямого произведения $f(\xi) \cdot g(\eta)$ на основную функцию $\varphi(\xi+\eta)$, т. е. для регулярных обобщенных функций получено равенство

$$(f(x) * g(x), \varphi(x)) = (f(x) \cdot g(y), \varphi(x+y)), \tag{10.1}$$

которое, естественно, и следовало бы принять за общее определение свертки любых двух обобщенных функций $f(x)$ и $g(x)$.

Однако заметим, что функция $\varphi(x+y)$ уже не является финитной функцией в пространстве переменных x и y. Действительно, при $n = 1$ если $\operatorname{supp} \varphi(x) = [a; b]$, то (см. рис. 4) носителем функции $\varphi(x+y)$ является полоса, заключенная между прямыми $x + y = a$ и $x + y = b$, т. е. $\operatorname{supp} \varphi(x+y)$ есть неограниченное в $\mathbf{R}^2$ множество. Поэтому формула (10.1), вообще говоря, не имеет смысла. Однако в ряде случаев при довольно широких предположениях, которые будут ниже сформулированы, формула (10.1) все же имеет смысл.

По свойству 7 прямого произведения

$$\operatorname{supp} [f(x) \cdot g(y)] = \operatorname{supp} f(x) \times \operatorname{supp} g(y).$$

Равенство (10.1) будет иметь смысл, если носитель $\operatorname{supp} \varphi(x+y)$ будет пересекаться с носителем $\operatorname{supp} [f(x) \cdot g(y)]$ по ограниченному множеству. В этом случае $\varphi(x+y)$ можно заменить в «полосе» $(a \le x + y \le b)$ финитной функцией $\psi(x, y)$ не изменяя ее значений

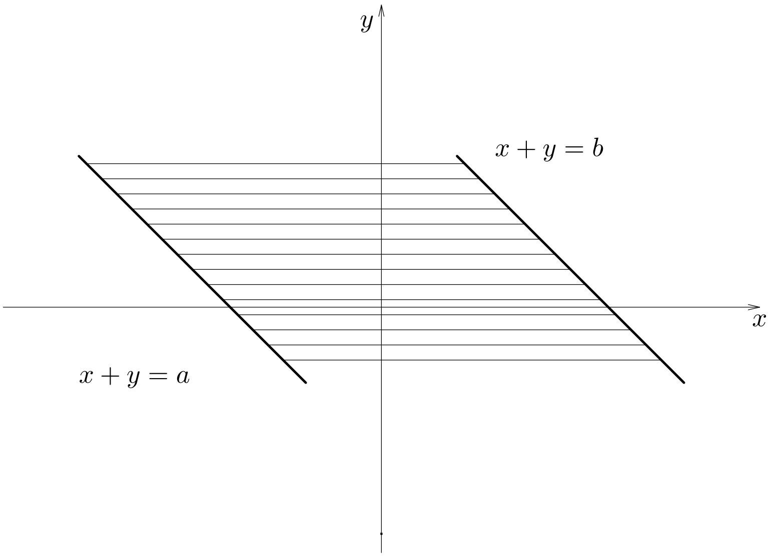

Рис. 4

в точках пересечения носителей $\operatorname{supp}\varphi(x+y)$ и $\operatorname{supp}[f(x)\cdot g(y)]$, но тогда уже определено значение

$$(f(x)\cdot g(y), \psi(x,y))$$

и оно не зависит от выбора значений функции $\psi(x,y)$ вне указанного пересечения.

Приведем здесь условия, при которых формула (10.1) имеет смысл:

1) одна (или обе) из обобщенных функций финитна;

2) если $n=1$, носители $\operatorname{supp} f(x)$ и $\operatorname{supp} g(y)$ ограничены с одной стороны;

3) если $f(x,t),\ g(x,t)\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$ причем $f(x,t)=0$ при $t<0$, $\operatorname{supp} g(x,t)\subset\overline{\Gamma^+}\equiv\overline{\{|x|\le at\}}$ — замыкание конуса будущего.

Более подробно с этим вопросом можно ознакомиться в [6, с. 110–112, 158–160].

Свертка обладает свойствами линейности по каждому из множителей и коммутативности [6, с. 108].

Дифференцирование свертки обобщенных функций осуществляется по любой из формул

$$D^\alpha(f(x) * g(x)) = D^\alpha f(x) * g(x) = f(x) * D^\alpha g(x). \tag{10.2}$$

Действительно, $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(D^\alpha(f(x) * g(x)), \varphi(x)) = (-1)^{|\alpha|}(f(x) * g(x), D^\alpha\varphi(x)) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}(f(x), (g(y), D^\alpha\varphi(x+y))) =$$

$$= (f(x), (D^\alpha g(y), \varphi(x+y))) = (f(x) * D^\alpha g(x), \varphi(x)).$$

При доказательстве формулы (10.2) неявно предполагается, что существуют свертки $D^\alpha f(x) * g(x)$ и $f(x) * D^\alpha g(x)$. Существование же этих последних гарантируется существованием свертки $f(x)*g(x)$ [6, с. 108–109]. Обратное утверждение неверно.

Свертка с дельта-функцией, как с финитной обобщенной функцией, существует всегда. Действительно, $\forall f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и $\forall\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$

$$(f(x) * \delta(x), \varphi(x)) = (f(x) \cdot \delta(y), \varphi(x+y)) =$$

$$= (f(x), (\delta(y), \varphi(x+y))) = (f(x), \varphi(x)),$$

итак,

$$f(x) * \delta(x) = f(x).$$

Операция свертки в общем случае *не ассоциативна* (хотя прямое произведение и обладает этим свойством):

$$(\theta(x) * \delta'(x)) * 1 = (\theta'(x) * \delta(x)) * 1 = (\delta(x) * \delta(x)) * 1 = \delta(x) * 1 = 1,$$

$$\theta(x) * (\delta'(x) * 1) = \theta(x) * (\delta(x) * 1') = \theta(x) * (\delta(x) * 0) = \theta(x) * 0 = 0.$$

Однако существуют классы обобщенных функций, например $\mathcal{D}'_+$, на которых свертка этим свойством обладает [6, с. 112].

Пример 1 [5, задача № 8.14 (1)]. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ свертку

$$\theta(x-a) * \theta(x-b), \quad 0 \le a \le b.$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$(\theta(x-a) * \theta(x-b), \varphi(x)) = (\theta(x-a) \cdot \theta(y-b), \varphi(x+y)) =$$

$$= (\theta(x-a), (\theta(y-b), \varphi(x+y))) = (\theta(x-a), (\theta(y), \varphi(x+y+b))) =$$

$$= \left(\theta(x-a), \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x+y+b)\,dy\right) = \left(\theta(x), \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x+y+a+b)\,dy\right) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{+\infty} \varphi(x+y+a+b)\,dy\right) dx.$$

Осуществим во внутреннем интеграле замену переменных $x+y=\tau$, а затем поменяем порядок интегрирования, тогда

$$(\theta(x-a) * \theta(x-b), \varphi(x)) = \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_x^{+\infty} \varphi(\tau+a+b)\,d\tau\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{\tau} \varphi(\tau+a+b)\,dx\right) d\tau = \int\limits_0^{+\infty} \tau\varphi(\tau+a+b)\,d\tau =$$

$$= (\theta(\tau), \tau\varphi(\tau+a+b)) = (\tau\theta(\tau), \varphi(\tau+a+b)) =$$

$$= ((\tau-a-b)\theta(\tau-a-b), \varphi(\tau)).$$

Итак,

$$\theta(x-a) * \theta(x-b) = (x-a-b)\theta(x-a-b).$$

В частности, при $a=b=0$

$$\theta(x) * \theta(x) = x\theta(x).$$

Пример 2 [5, задача № 8.14 (5)]. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ свертку

$$x^2\theta(x) * \sin(x\theta(x)).$$

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$(x^2\theta(x) * \sin(x\theta(x)), \varphi(x)) = (x^2\theta(x), (\sin(y\theta(y)), \varphi(x+y))) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} x^2 \left(\int\limits_0^{+\infty} \sin y \, \varphi(x+y) \, dy \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} x^2 \left(\int\limits_x^{+\infty} \sin(\tau - x)\varphi(\tau) \, d\tau \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_0^{\tau} x^2 \sin(\tau - x) \, dx \right) \varphi(\tau) \, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} (\tau^2 - 2 + 2\cos\tau)\varphi(\tau) \, d\tau =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\tau^2 - 4\sin^2\frac{\tau}{2}\right) \varphi(\tau) \, d\tau = \left(\left(\tau^2 - 4\sin^2\frac{\tau}{2}\right) \theta(\tau), \varphi(\tau) \right),$$

т. е.

$$x^2\theta(x) * \sin(x\theta(x)) = \left(x^2 - 4\sin^2\frac{x}{2}\right)\theta(x).$$

Пример 3 [5, задача № 8.17]. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ свертку $f_\alpha(x) * f_\beta(x)$, если $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}$, $\alpha > 0$.

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$(f_\alpha(x) * f_\beta(x), \varphi(x)) = (f_\alpha(x) \cdot f_\beta(y), \varphi(x+y)) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{\beta^2 + x^2} \varphi(x+y) \, dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\beta}{\beta^2 + (t-x)^2} \varphi(t)\, dt \right\} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + (t-x)^2}\, dx \right\} \varphi(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi^2} \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + (x-t)^2}\, dt \right\} \varphi(x)\, dx.$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + (x-t)^2}\, dt.$$

Для этого преобразуем подынтегральную функцию к виду

$$\frac{\alpha}{\alpha^2 + t^2} \cdot \frac{\beta}{\beta^2 + (x-t)^2} = \frac{at + b}{\alpha^2 + t^2} + \frac{ct + d}{\beta^2 + (x-t)^2},$$

где

$$c = -a, \quad d = 2xa - b, \quad a = \frac{2x\alpha\beta}{\Delta}, \quad b = \frac{\left(x^2 + \beta^2 - \alpha^2\right)\alpha\beta}{\Delta},$$

$$\Delta = \left(x^2 + \beta^2 - \alpha^2\right)^2 + 4x^2\alpha^2 = \left(x^2 + (\beta + \alpha)^2\right)\left(x^2 + (\beta - \alpha)^2\right).$$

Откуда получаем

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{at + b}{\alpha^2 + t^2} + \frac{ct + d}{\beta^2 + (x-t)^2} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{at + b}{\alpha^2 + t^2} + \frac{c(t-x) + (cx + d)}{\beta^2 + (t-x)^2} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{at + b}{\alpha^2 + t^2} + \frac{ct + (cx + d)}{\beta^2 + t^2} \right] dt =$$

$$= \frac{1}{\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[a \left(\frac{1}{\alpha^2 + t^2} - \frac{1}{\beta^2 + t^2} \right) t + \frac{b}{\alpha^2 + t^2} + \frac{cx + d}{\beta^2 + t^2} \right] dt.$$

Здесь первое слагаемое — нечетная функция по t, два других — четные, поэтому сразу получаем

$$\mathcal{I} = \frac{2}{\pi^2} \left[\frac{b}{\alpha} \cdot \operatorname{arctg} \frac{t}{\alpha} + \frac{cx + d}{\beta} \cdot \frac{t}{\beta} \right]_0^{+\infty} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[\frac{b}{\alpha} + \frac{cx + d}{\beta} \right] = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{(\alpha + \beta) \cdot (x^2 + (\beta - \alpha)^2)}{\Delta} =$$

$$= \frac{\alpha + \beta}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2 + (\beta + \alpha)^2} = f_{\alpha+\beta}(x).$$

Таким образом,

$$(f_\alpha(x) * f_\beta(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\alpha+\beta}(x) \cdot \varphi(x)\, dx,$$

т. е. $f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x)$.

Пример 4. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ свертку $f_\alpha(x) * f_\beta(x)$, если $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\alpha} \cdot \exp\left(-\pi \dfrac{x^2}{\alpha^2} \right)$, $\alpha > 0$.

Пусть $\varphi(x) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$, тогда

$$(f_\alpha(x) * f_\beta(x), \varphi(x)) = (f_\alpha(x) \cdot f_\beta(y), \varphi(x + y)) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\alpha^2} \right) \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \exp\left(-\pi \frac{y^2}{\beta^2} \right) \varphi(x + y)\, dy \right\} dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\alpha^2} \right) \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\beta} \exp\left(-\pi \frac{(\tau - x)^2}{\beta^2} \right) \varphi(\tau)\, d\tau \right\} dx =$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\tau) \left\{ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi \frac{x^2}{\alpha^2} - \pi \frac{(\tau - x)^2}{\beta^2} \right) dx \right\} d\tau.$$

Вычислим внутренний интеграл

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\alpha\beta} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\pi\frac{x^2}{\alpha^2} - \pi\frac{(\tau-x)^2}{\beta^2}\right) dx.$$

Для этого выделим полный квадрат относительно x в аргументе экспоненты и затем воспользуемся формулой для интеграла Пуассона (см. указания к задачам для самостоятельного решения из § 5):

$$\exp\left(-\pi\frac{x^2}{\alpha^2} - \pi\frac{(\tau-x)^2}{\beta^2}\right) =$$

$$= \exp\left(-\pi\frac{\tau^2}{\beta^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{\beta^2}\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\cdot x^2 - 2\tau x\right)\right) =$$

$$= \exp\left(-\pi\frac{\tau^2}{\beta^2}\right) \exp\left(-\frac{\pi}{\beta^2}\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2}\left[\left(x - \frac{\alpha^2\tau}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 - \frac{\alpha^4\tau^2}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\right]\right) =$$

$$= \exp\left(-\frac{\pi}{\alpha^2+\beta^2}\tau^2\right)\cdot\exp\left(-\pi\cdot\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\cdot\left(x - \frac{\alpha^2\tau}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2\right),$$

$$\mathcal{I} = \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\exp\left(-\frac{\pi}{\alpha^2+\beta^2}\tau^2\right)\cdot\sqrt{\frac{\pi\alpha^2\beta^2}{\pi(\alpha^2+\beta^2)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\cdot\exp\left(-\frac{\pi}{\alpha^2+\beta^2}\tau^2\right) = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(\tau).$$

Таким образом, $\forall\varphi(x)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^1)$

$$(f_\alpha(x) * f_\beta(x), \varphi(x)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x)\varphi(x)\,dx,$$

т. е. $f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x)$.

Пример 5 [5, задача № 8.33 (1)]. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ свертку

$$x\theta(t) * t\theta(x).$$

Покажем, что такая свертка не существует, т. е. в данном случае формула (10.1) не имеет смысла. Носителем прямого произведения функций $x\theta(t)$ и $\tau\theta(y)$ является множество

$$\operatorname{supp}\left(x\theta(t)\cdot\tau\theta(y)\right)=\left\{(x,y,t,\tau): x\in\mathbf{R}^1,\ y\in\mathbf{R}^1_+,\ t\in\mathbf{R}^1_+,\ \tau\in\mathbf{R}^1\right\}.$$

В качестве основной функции в формулу (10.1) подставим «шапочку»

$$\omega_r(x,t)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{r^2}{r^2-x^2-t^2}\right), & x^2+t^2<r^2;\\ 0, & x^2+t^2\geq r^2.\end{cases}$$

Ее носителем является шар $U_r(0)$

$$\operatorname{supp}\omega_r(x,t)=\left\{(x,t): x^2+t^2\leq r^2\right\},$$

тогда носителем функции $\omega_r(x+y,t+\tau)$ является множество

$$\left\{(x,y,t,\tau): (x+y)^2+(t+\tau)^2\leq r^2\right\},$$

которое пересекается с носителем $\operatorname{supp}\left(x\theta(t)\cdot\tau\theta(y)\right)$ *по бесконечному* множеству.

Пример 6 [5, задача № 8.37 (1)]. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ свертку

$$e^x\delta(t)*\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),\quad a>0.$$

Пусть $\varphi(x,t)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, тогда по формуле (10.1) имеем

$$\mathcal{I}=\left(e^x\delta(x)*\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),\,\varphi(x,t)\right)=$$

$$=\left(\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),\,\left(e^y\delta(\tau),\,\varphi(x+y,t+\tau)\right)\right).$$

Преобразуем внутреннее выражение

$$\psi(x,t)=\left(e^y\delta(\tau),\,\varphi(x+y,t+\tau)\right)=$$

$$=\left(e^y,\,\left(\delta(\tau),\varphi(x+y,t+\tau)\right)\right)=\left(e^y,\,\varphi(x+y,t)\right)=$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{y}\,\varphi(x+y,t)\,dy = \left\{\begin{array}{c} x+y=z \\ dy=dz \end{array}\right\} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{z-x}\varphi(z,t)\,dz,$$

поэтому

$$\mathcal{I} = \left(\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),\, e^{-x}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{z}\varphi(z,t)\,dz\right) =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}-x\right)\cdot\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{z}\varphi(z,t)\,dz\right)dx\right)dt.$$

Но

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}-x\right)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{(x+2a^2t)^2}{4a^2t}+a^2t\right)dx =$$

$$= 2a\sqrt{\pi t}\exp(a^2t)$$

(см. указание к задаче № 1 из § 5), следовательно,

$$\mathcal{I} = \int\limits_{0}^{+\infty}\exp(a^2t)\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{z}\varphi(z,t)\,dz\,dt = \big(\exp(a^2t+x)\theta(t),\,\varphi(x,t)\big).$$

Итак,

$$(e^{x}\cdot\delta(t)) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) = \exp\left(a^2t+x\right)\theta(t).$$

Пример 7 [5, задача № 8.37 (2)]. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ свертку

$$xe^{t}\theta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right).$$

Для любой $\varphi(x,t)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$ согласно (10.1)

$$\mathcal{I} = \left(xe^{t}\theta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),\,\varphi(x,t)\right) =$$

$$= \left(\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right),\,\big(ye^{\tau}\theta(\tau),\,\varphi(x+y,t+\tau)\big)\right).$$

Как и в предыдущем примере, вначале преобразуем внутреннее выражение

$$\psi(x,t) = (ye^{\tau}\theta(\tau), \varphi(x+y, t+\tau)) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ye^{\tau}\varphi(x+y, t+\tau)\, dy \right) d\tau = \left\{ \begin{array}{c} x+y=z \\ t+\tau=\xi \\ dyd\tau = dzd\xi \end{array} \right\} =$$

$$= \int\limits_t^{+\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (z-x)e^{\xi-t}\varphi(z,\xi)\, dz \right) d\xi = e^{-t}\{\alpha(t) - x\beta(t)\},$$

здесь введены обозначения

$$\alpha(t) = \int\limits_t^{+\infty} e^{\xi} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z,\xi)\, dz \right) d\xi, \quad \beta(t) = \int\limits_t^{+\infty} e^{\xi} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x,\xi)\, dz \right) d\xi.$$

Отсюда получаем

$$\mathcal{I} = \left(\frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right), \psi(x,t) \right) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \cdot e^{-t} \cdot \{\alpha(t) - x\beta(t)\}\, dx \right) dt.$$

Поскольку

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \cdot e^{-t} \cdot (-x\cdot\beta(t))\, dx \right) dt =$$

$$= -\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cdot\beta(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) dx \right) dt = 0$$

(в силу нечетности по x подынтегральной функции внутреннего интеграла), то

$$\mathcal{I} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cdot\alpha(t)}{2a\sqrt{\pi t}} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) dx \right) dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cdot\alpha(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\cdot 2a\sqrt{\pi t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\cdot\alpha(t)\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\left(\int\limits_t^{+\infty} e^{\xi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z,\xi)\,dz\right)d\xi\right)dt =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} u = \int\limits_t^{+\infty} e^{\xi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z,\xi)\,dz\right)d\xi, & dv = e^{-t}\,dt \\ du = -e^{t}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z,t)\,dz\,dt, & v = -e^{-t} \end{array}\right\} =$$

$$= u\cdot v\Big|_0^{+\infty} - \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z,t)\,dz\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} e^{\xi}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z,\xi)\,dz\right)d\xi - \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z,t)\,dz\right)dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}(e^t-1)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} z\varphi(z,t)\,dz\right)dt = \big((e^t-1)z\theta(t),\,\varphi(z,t)\big).$$

Таким образом,

$$xe^t\theta(t) * \frac{\theta(t)}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) = (e^t-1)\,x\,\theta(t).$$

Пример 8 [5, задача № 8.36 (1)]. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ свертку

$$\theta(at-|x|) * [\omega(t)\cdot\delta(x)],$$

$a>0$, $\omega(t)\in\mathcal{C}(t\geq 0)$, $\omega(t)\equiv 0$ при $t<0$. Определение $\theta(at-|x|)$ см. в примере 1 § 9.

Если $\varphi(x,t)\in\mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, то

$$(\theta(at-|x|) * [\omega(t)\cdot\delta(x)],\,\varphi(x,t)) =$$

$$= \big(\theta(at-|x|),\, (\omega(\tau)\cdot\delta(y),\, \varphi(x+y,t+\tau))\big).$$

Но

$$\psi(x,t) = \big(\omega(\tau)\cdot\delta(y),\, \varphi(x+y,\, t+\tau)\big) =$$

$$= \big(\omega(\tau),\, (\delta(y),\, \varphi(x+y,t+\tau))\big) =$$

$$= \big(\omega(\tau),\, \varphi(x,\, t+\tau)\big) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega(\tau)\varphi(x,\, t+\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \omega(\tau)\varphi(x,\, t+\tau)\, d\tau = \left\{ \begin{array}{c} t+\tau=\xi \\ d\tau = d\xi \end{array} \right\} = \int\limits_{t}^{+\infty} \omega(\xi-t)\varphi(x,\xi)\, d\xi,$$

поэтому

$$\big(\theta(at-|x|), \psi(x,t)\big) =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \left(\int\limits_{-at}^{at} \left(\int\limits_{t}^{+\infty} \omega(\xi-t)\varphi(x,\xi)\, d\xi \right) dx \right) dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\int\limits_{-a\xi}^{0} \varphi(x,\xi) \left(\int\limits_{-\frac{x}{a}}^{\xi} \omega(\xi-t)\, dt \right) dx + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{a\xi} \varphi(x,\xi) \left(\int\limits_{\frac{x}{a}}^{\xi} \omega(\xi-t)\, dt \right) dx \right] d\xi.$$

Осуществим во внутренних интегралах замену переменных $\xi - t = \eta$, тогда исследуемое выражение принимает вид

$$(\theta(at-|x|),\, \psi(x,t)) =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\int\limits_{-a\xi}^{0} \varphi(x,\xi) \left(\int\limits_{0}^{\xi+\frac{x}{a}} \omega(\eta)\, d\eta \right) dx + \int\limits_{0}^{a\xi} \varphi(x,\xi) \left(\int\limits_{0}^{\xi-\frac{x}{a}} \omega(\eta)\, d\eta \right) dx \right] d\xi =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \left[\int\limits_{-a\xi}^{a\xi} \varphi(x,\xi) \left(\int\limits_{0}^{\xi-\frac{|x|}{a}} \omega(\eta)\, d\eta \right) dx \right] d\xi =$$

$$= \left(\theta(a\xi - |x|), \left(\int\limits_0^{\xi-\frac{|x|}{a}} \omega(\eta)\,d\eta\right)\cdot\varphi(x,\xi)\right) =$$

$$= \left(\int\limits_0^{\xi-\frac{|x|}{a}} \omega(\eta)\,d\eta\cdot\theta(a\xi - |x|),\ \varphi(x,\xi)\right).$$

Итак,

$$\theta(at - |x|) * [\omega(t)\cdot\delta(x)] = \left(\int\limits_0^{t-\frac{|x|}{a}} \omega(\eta)\,d\eta\right)\theta(at - |x|).$$

Пример 9 [5, задача № 8.36 (2)]. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ свертку

$$\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right) * (\theta(t)\cdot\delta(x,y)), \quad a > 0.$$

Пусть $\varphi(x,y,t) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^3)$, тогда

$$\left(\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right) * \theta(t)\cdot\delta(x,y),\ \varphi(x,y,t)\right) =$$

$$= \left(\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right), \left(\theta(\tau)\cdot\delta(x_1,y_1), \varphi(x+x_1, y+y_1, t+\tau)\right)\right) =$$

$$= \left(\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right), \left(\theta(\tau), (\delta(x_1,y_1), \varphi(x+x_1, y+y_1, t+\tau))\right)\right) =$$

$$= \left(\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right), \left(\theta(\tau), \varphi(x, y, t+\tau)\right)\right) =$$

$$= \left(\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right), \int\limits_0^{+\infty} \varphi(x,y,t+\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= \left(\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right), \int\limits_t^{+\infty} \varphi(x,y,\xi)\,d\xi\right) =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty}\left(\int\int\limits_{x^2+y^2\le a^2t^2} \left(\int\limits_t^{+\infty} \varphi(x,y,\xi)\,d\xi\right)dx\,dy\right)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left(\int\limits_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}^{+\infty}\left(\int\limits_{t}^{+\infty}\varphi(x,y,\xi)\,d\xi\right)dt\right)dx\,dy.$$

Преобразуем внутренний двойной интеграл

$$\int\limits_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}^{+\infty}\left(\int\limits_{t}^{+\infty}\varphi(x,y,\xi)\,d\xi\right)dt = \left\{\begin{array}{ll} u = \int\limits_{t}^{+\infty}\varphi(x,y,\xi)\,d\xi, & dv = dt \\ du = -\varphi(x,y,t)\,dt, & v = t \end{array}\right\} =$$

$$= -\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\int\limits_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}^{+\infty}\varphi(x,y,t)\,dt + \int\limits_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}^{+\infty} t\varphi(x,y,t)\,dt =$$

$$= \int\limits_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}^{+\infty}\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)\varphi(x,y,t)\,dt.$$

Отсюда получаем

$$\left(\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right) * \theta(t)\cdot\delta(x,y), \varphi(x,y,t)\right) =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}}^{+\infty}\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)\varphi(x,y,t)\,dt\,dx\,dy =$$

$$= \left(\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right), \left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)\varphi(x,y,t)\right) =$$

$$= \left(\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right), \varphi(x,y,t)\right).$$

Итак, доказано равенство

$$\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right) * [\theta(t)\cdot\delta(x,y)] =$$

$$= \left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)\theta\left(at - \sqrt{x^2+y^2}\right).$$

Пример 10 [5, задача № 8.41]. Доказать, что для семейства обобщенных функций

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1}, & \alpha > 0; \\[2ex] f^{(N)}_{\alpha+N}(x), & \alpha \le 0, \quad \alpha + N > 0, \quad N \in \mathbf{N}, \end{cases}$$

зависящего от параметра $\alpha \in \mathbf{R}^1$, справедливо равенство

$$f_\alpha * f_\beta = f_{\alpha+\beta}.$$

Вначале докажем это равенство для случая $\alpha > 0$ и $\beta > 0$, тогда $f_\alpha(x)$ и $f_\beta(x)$ являются регулярными обобщенными функциями, причем порождающие их локально интегрируемые функции обращаются в нуль при $x < 0$, а значит искомая свертка также будет регулярной обобщенной функцией, действие которой на основные задается функцией

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = \theta(x) \int\limits_0^x \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\, dt =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1}\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int\limits_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha-1} \left(1 - \frac{t}{x}\right)^{\beta-1} d\left(\frac{t}{x}\right) =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1}\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\, dy =$$

$$= \frac{x^{\alpha+\beta-1}\theta(x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \cdot B(\alpha,\beta) = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha+\beta)} x^{\alpha+\beta-1} = f_{\alpha+\beta}(x).$$

Если $\alpha \le 0$ или $\beta \le 0$, то, выбирая натуральные N и M такими, чтобы $\alpha + N > 0$ и $\beta + M > 0$, получим

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f^{(N)}_{\alpha+N}(x) * f^{(M)}_{\beta+M}(x) = (f_{\alpha+N}(x) * f_{\beta+M}(x))^{(N+M)} =$$

$$= (f_{\alpha+\beta+N+M}(x))^{(N+M)} = f_{\alpha+\beta}(x).$$

Пример 11 [5, задача № 8.28]. Используя результат предыдущего примера, решим уравнение Абеля

$$\int_0^x \frac{u(\xi)}{(x-\xi)^\alpha}\,d\xi = g(x),$$

где $g(x) \in \mathcal{C}^1\ (x \geq 0),\ g(0) = 0,\ 0 < \alpha < 1.$

Доопределим функции $u(x)$ и $g(x)$ нулями при $x < 0$, введем параметр $\lambda = 1 - \alpha,\ 0 < \lambda < 1$ и вместе с ним функцию

$$f_\lambda(x) = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1},$$

очевидно, $-1 < \lambda - 1 < 0$. В этих обозначениях уравнение Абеля можно переписать в виде

$$\Gamma(\lambda)(u(x)\theta(x) * f_\lambda(x)) = g(x)\theta(x)$$

или

$$u(x)\theta(x) * f_\lambda(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} g(x)\theta(x).$$

Вычислим свертки левой и правой частей этого равенства с функцией $f_{-\lambda}(x)$

$$u(x)\theta(x) * (f_\lambda(x) * f_{-\lambda}(x)) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}(f_{-\lambda}(x) * g(x)\theta(x)).$$

Согласно доказанному в примере 8 получаем

$$u(x)\theta(x) * f_0(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)}(f_{-\lambda}(x) * g(x)\theta(x))$$

или

$$u(x)\theta(x) * \frac{d}{dx} f_1(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{d}{dx} f_{1-\lambda}(x) * g(x)\theta(x) \right),$$

$$u(x)\theta(x) * \frac{d}{dx}\theta(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(\frac{d}{dx} f_\alpha(x) * g(x)\theta(x) \right).$$

Поскольку $\theta'(x) = \delta(x)$ и по свойству дифференцирования свертки имеем

$$u(x)\theta(x) * \delta(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \left(f_\alpha(x) * \frac{d}{dx}(g(x)\theta(x)) \right),$$

$$u(x)\theta(x) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} f_\lambda(x) * g'(x)\theta(x).$$

Отсюда получаем

$$u(x)\theta(x) = \frac{\theta(x)}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha)} \int\limits_0^x \frac{g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt.$$

Но по формуле дополнения для гамма-функций $\Gamma(\lambda)\Gamma(\alpha) = \Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin\alpha\pi}$, поэтому окончательно имеем

$$u(x) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \int\limits_0^x \frac{g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\, dt.$$

Другое решение этого уравнения, использующее преобразование Лапласа, см. в [9, с. 272].

Задачи для самостоятельного решения

I. Показать, что:

а) $\delta(x-a) * f(x) = f(x-a)$; б) $\delta(x-a) * \delta(x-b) = \delta(x-a-b)$;

в) $\delta^{(m)}(x) * f(x) = f^{(m)}(x)$; г) $\delta^{(m)}(x-a) * f(x) = f^{(m)}(x-a)$.

II. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^1)$ свертки:

а) $\theta(x) * x^2\theta(x)$; б) $e^{-|x|} * e^{-|x|}$;

в) $e^{-ax^2} * xe^{-ax^2}$, $a > 0$; г) $\cos x\theta(x) * x^3\theta(x)$;

д) $\sin x\theta(x) * \sinh x\theta(x)$; е) $\theta(a-|x|) * \theta(a-|x|)$.

III. Вычислить в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$ свертки:

а) $\theta(t-|x|) * \theta(t-|x|)$; б) $\theta(t)\cdot\theta(x) * \theta(t-|x|)$;

в) $\theta(x)\delta(t) * \dfrac{\theta(t)}{2\sqrt{\pi t}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{4t}\right)$; г) $\theta(at-|x|) * \dfrac{\partial}{\partial t}[\theta(t)\cdot\delta(x)]$;

д) $\theta(at-|x|) * [\theta(t)\cdot\delta'(x)]$; е) $\theta(at-|x|) * [\theta(x)\cdot\delta(t)]$;

ж) $\theta(at-|x|) * \dfrac{\partial}{\partial t}[\omega(x)\theta(x)\delta(t)]$, $\omega(x) \in \mathcal{C}(\mathbf{R}^1)$; з) $\theta(at-|x|) * \dfrac{\partial}{\partial x}[\theta(x)\delta(t)]$.

IV. Доказать утверждения:

1) если $f_\alpha = \theta(x)\dfrac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-ax},\ \alpha \in \mathbf{N}$, то

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x);$$

2) если $f_\alpha(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\alpha}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\alpha^2}\right),\ \alpha > 0$, то

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}(x);$$

3) если

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} \dfrac{\theta(x)}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}, & \alpha > 0; \\ f'_{\alpha+1}, & \alpha \le 0, \end{cases}$$

то

$$f_\alpha(x) * f_\beta(x) = f_{\alpha+\beta}(x).$$

11 Фундаментальные решения линейных дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами

Рассмотрим линейный дифференциальный оператор порядка m

$$L(D) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} a_\alpha \cdot D^\alpha.$$

Здесь $a_\alpha \in \mathbf{R}^1,\ D^\alpha$ — мультииндекс.

Определение. *Фундаментальным решением (функцией влияния, элементарным решением) оператора $L(D)$ называется обобщенная функция $\mathcal{E}(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, удовлетворяющая равенству*

$$L(D)\mathcal{E}(x) = \delta(x).$$

Естественно, $\mathcal{E}(x)$ определяется с точностью до слагаемого $\mathcal{E}_0(x)$, которое является произвольным решением однородного уравнения

$$L(D)\mathcal{E}_0(x) = 0.$$

С помощью фундаментального решения $\mathcal{E}(x)$ дифференциального оператора $L(D)$ можно строить решения уравнения

$$L(D)u = f(x), \tag{11.1}$$

где $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$. А именно, имеет место

Теорема. *Если $f(x) \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ и существует свертка $\mathcal{E}(x) * f(x)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, то уравнение (11.1) имеет обобщенное решение*

$$u = \mathcal{E}(x) * f(x). \tag{11.2}$$

Это решение единственно в классе тех обобщенных функций $f(x)$, для которых существует свертка.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения теоремы подставим (11.2) в (11.1), тогда

$$L(D)(\mathcal{E}(x) * f(x)) = (L(D)\mathcal{E}(x)) * f(x) = \delta(x) * f(x) = f(x),$$

т. е. функция (11.2) действительно является решением уравнения (11.1). Для доказательства единственности покажем, что однородное уравнение $L(D)u = 0$ имеет только тривиальное решение. Действительно, пусть $u_1(x)$ — некоторое решение однородного уравнения, тогда справедлива следующая цепочка равенств

$$u_1(x) = u_1(x) * \delta(x) = u_1(x) * (L(D)\mathcal{E}(x)) =$$

$$= (L(D)u_1(x)) * \mathcal{E}(x) = 0 * \mathcal{E}(x) = 0.$$

Теорема доказана. ■

Пример 1 [5, задача № 8.26]. Доказать, что фундаментальным решением дифференциального оператора с обыкновенными производными

$$L \equiv \frac{d^n}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}\frac{d}{dt} + a_n$$

является функция

$$\mathcal{E}(t) = Z(t)\theta(t),$$

где $Z(t)$ — решение задачи Коши

$$LZ(t) = 0,$$

$$Z(0) = Z'(0) = \ldots = Z^{(n-2)}(0) = 0,$$

$$Z^{(n-1)}(0) = 1.$$

Найдем все обобщенные производные функции $\mathcal{E}(t)$ до n-го порядка включительно:

$$\mathcal{E}'(t) = Z'(t)\theta(t) + Z(0)\delta(t) = Z'(t)\theta(t),$$

$$\mathcal{E}''(t) = Z''(t)\theta(t) + Z'(0)\delta(t) = Z''(t)\theta(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\mathcal{E}^{(n-1)}(t) = Z^{(n-1)}(t)\theta(t) + Z^{(n-2)}(0)\delta(t) = Z^{(n-1)}(t)\theta(t),$$

$$\mathcal{E}^{(n)}(t) = Z(n)(t)\theta(t) + Z^{(n-1)}(0)\delta(t) = Z^{(n)}(t)\theta(t) + \delta(t).$$

Отсюда получаем

$$L\mathcal{E}(t) = (LZ(t))\theta(t) + \delta(t) = \delta(t).$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Доказать, что указанная функция $\mathcal{E}(t)$ является фундаментальным решением соответствующего дифференциального оператора:

1) $\mathcal{E}(t) = e^{\pm at}\theta(t), \quad \dfrac{d}{dt} \mp a;$

2) $\mathcal{E}(t) = \dfrac{\sin at}{a}\theta(t), \quad \dfrac{d^2}{dt^2} + a^2;$

3) $\mathcal{E}(t) = \dfrac{\sinh at}{a}\theta(t), \quad \dfrac{d^2}{dt^2} - a^2;$

4) $\mathcal{E}(t) = \dfrac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\pm at}\theta(t), \quad \left(\dfrac{d}{dt} \mp a\right)^m, \quad m \in \mathbf{N};$

5) $\mathcal{E}(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n-1}\dfrac{t^{nk-1}}{(nk-1)!}\theta(t), \quad \dfrac{d^k}{dt^k} - a.$

II. Найти фундаментальные решения следующих дифференциальных операторов:

а) $\dfrac{d^2}{dt^2} + 4\dfrac{d}{dt};$ б) $\dfrac{d^2}{dt^2} - 2\dfrac{d}{dt} + 1;$ в) $\dfrac{d^2}{dt^2} + 3\dfrac{d}{dt} + 2;$

г) $\dfrac{d^2}{dt^2} - 4\dfrac{d}{dt} + 5;$ д) $\dfrac{d^3}{dt^3} - a^3;$ е) $\dfrac{d^3}{dt^3} - 3\dfrac{d^2}{dt^2} + 2\dfrac{d}{dt};$

ж) $\dfrac{d^4}{dt^4} - a^4;$ з) $\dfrac{d^4}{dt^4} - 2\dfrac{d^2}{dt^2} + 1.$

12 Задача Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv u^{(n)} + a_1 u^{(n-1)} + \ldots + a_n u = f(t), \quad t > 0,$$

$$u^{(k)}(0) = u_k, \quad k = 0, \ldots, n-1,$$

$$f(t) \in \mathcal{C}(t \geq 0).$$

Пусть $u(t) \in \mathcal{C}^n(t \geq 0)$ — решение этой задачи Коши, продолжим $u(t)$ и $f(t)$ нулем при $t < 0$ и обозначим продолженные функции $\widetilde{u}$ и

$\widetilde{f}$, тогда (см. § 8, пример 4)

$$\widetilde{u}^{(k)}(t) = \left\{\widetilde{u}^{(k)}(t)\right\}\theta(t) + \sum_{j=0}^{k-1} u_j \delta^{(k-1-j)}(t), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Отсюда

$$L\widetilde{u} \equiv \{Lu(t)\}\theta(t) + u_0\delta^{(n-1)}(t) + (a_1u_0 + u_1)\delta^{(n-2)}(t) +$$

$$+ \ldots + (a_{n-1}u_0 + a_{n-2}u_1 + \ldots + u_{n-1})\,\delta(t) =$$

$$= f(t)\theta(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(t) = \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(t),$$

где

$$c_0 = a_{n-1}u_0 + \ldots + a_1u_{n-2} + u_{n-1}, \ \ldots,$$

$$c_{n-2} = a_1u_0 + u_1, \quad c_{n-1} = u_0.$$

Таким образом, $\widetilde{u}(t)$ и $\widetilde{f}(t)$ в обобщенном смысле удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$L\widetilde{u} = \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(t). \tag{12.1}$$

Задачу о построении обобщенного решения уравнения (12.1) называют *обобщенной задачей Коши.* Поскольку носители фундаментального решения $\mathcal{E}(t)$ дифференциального оператора L и правой части уравнения (12.1) ограничены слева, то их свертка существует (см. замечание к формуле (10.1) из § 10), поэтому согласно теореме из § 11 обобщенным решением уравнения (12.1) является функция

$$\widetilde{u} = \mathcal{E}(t) * \left(\widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\delta^{(k)}(t)\right) = \mathcal{E}(t) * \widetilde{f}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} c_k\mathcal{E}^{(k)}(t) =$$

$$= \left(\int\limits_0^t Z(t-s)f(s)\,ds + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)}(t)\right)\theta(t), \tag{12.2}$$

где $Z(t)$ см. в примере 1 § 11.

Итак, классическое решение исходной задачи Коши, будучи продолженное нулем, при $t < 0$ удовлетворяет уравнению (12.1) в обобщенном смысле. Это уравнение имеет единственное обобщенное решение в классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем, и это решение дается формулой (12.2). Но обобщенная функция из формулы (12.2) является регулярной обобщенной функцией (см. § 3) и порождается функцией класса $\mathcal{C}(t \geq 0)$, стоящей в качестве множителя при $\theta(t)$ в формуле (12.2). Таким образом, обобщенное решение совпадает с классическим, и это последнее приведено в формуле (12.2). Значит, при $t > 0$ из обобщенного решения (12.2) получаем классическое решение исходной задачи Коши

$$u(t) = \int\limits_0^t Z(t-s)f(s)\,ds + \sum_{k=0}^{n-1} c_k Z^{(k)}(t).$$

В частности, для задач Коши

$$\dot{u} + au = f(t), \quad u(0) = u_0,$$

$$\ddot{u} + a^2 u = f(t), \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1$$

последняя формула принимает вид

$$u(t) = e^{-at}u_0 + \int\limits_0^t e^{-a(t-s)} f(s)\,ds,$$

$$u(t) = u_0 \cos at + \frac{u_1}{a}\sin at + \frac{1}{a}\int\limits_0^t \sin a(t-s) f(s)\,ds.$$

13 Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

В этом параграфе изложены некоторые результаты по теории разрешимости сингулярных уравнений в банаховых пространствах, полученные на кафедре математического анализа Иркутского государственного университета под руководством профессора Н. А. Сидорова. Для полного понимания всех последующих выкладок необходимо ознакомиться с рядом специальных фактов и утверждений о конечномерных пространствах и линейных отображениях этих пространств. Все эти сведения приведены в § 15.

Рассмотрим задачу Коши

$$B\dot{x} = Ax + f(t), \tag{13.1}$$

$$x(0) = x_0 \tag{13.2}$$

где B, A — квадратные $m\times m$ матрицы, $x(t)$, $f(t)$ — m-мерные вектор-функции, $\det B = 0$, $\dim N(B) = 1$, $f(t) \in \mathcal{C}(t \geq 0)$.

Известно, что такие задачи не всегда разрешимы в классе непрерывных функций. Нашей дальнейшей целью является выяснение условий, при которых имеет место такая разрешимость, при этом мы будем использовать почти весь набор операций над обобщенными функциями, изложенный в предыдущих пунктах.

Пусть $x(t) \in \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ — решение задачи (13.1)–(13.2), введем обозначения $\widetilde{x}(t) = x(t)\theta(t)$, $\widetilde{f}(t) = f(t)\theta(t)$, тогда для обобщенной производной вектор-функции $\widetilde{x}(t)$ справедлива следующая цепочка равенств:

$$B \dot{\widetilde{x}}(t) = B(\dot{x}(t)\theta(t) + x_0\delta(t)) = B\dot{x}(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t) =$$

$$= (Ax + f(t))\theta(t) + Bx_0\delta(t) = A\widetilde{x}(t) + Bx_0\delta(t) + \widetilde{f}(t).$$

Таким образом, классическое решение задачи Коши (13.1)–(13.2) и функция $f(t)$, будучи продолженные нулями при $t < 0$, в обобщенном смысле удовлетворяют уравнению

$$B\,\dot{\widetilde{x}}\,(t) = A\widetilde{x}(t) + Bx_0\delta(t) + \widetilde{f}(t). \tag{13.3}$$

Задачу о построении обобщенного решения уравнения (13.3) называют обобщенной задачей Коши, соответствующей задаче (13.1)–(13.2). Поскольку в правой части уравнения (13.3) содержатся регулярная обобщенная функция $\widetilde{f}(t)$ и дельта-функция $Bx_0\delta(t)$, то попытаемся строить обобщенное решение уравнения (13.3) в классе K'_+ — обобщенных функций, представимых в виде суммы

$$\widetilde{x}(t) = \omega(t) + u(t)\theta(t), \tag{13.4}$$

где $\omega(t)$ — линейная комбинация дельта-функции и ее производных (сингулярная составляющая решения), $u(t) \in \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ — регулярная составляющая решения. Подставим (13.4) в (13.3)

$$B\dot{\omega}(t) + Bu(0)\delta(t) + B\dot{u}(t)\theta(t) =$$

$$= Au(t)\theta(t) + \widetilde{f}(t) + Bx_0\delta(t) + A\omega.$$

В левой и правой частях последнего равенства содержатся как регулярные, так и сингулярные составляющие. Приравняем их друг другу

$$B\dot{\omega}(t) + Bu(0)\delta(t) = A\omega + Bx_0\delta(t), \tag{13.5}$$

$$B\dot{u}(t) = Au(t) + f(t), \tag{13.6}$$

$$u\big|_{t=0} = u(0). \tag{13.7}$$

Обобщенное решение (13.4) будет построено, если сможем подобрать сингулярную составляющую $\omega(t)$ такой, чтобы удовлетворялось равенство (13.5), а задача Коши (13.6)–(13.7) была бы разрешима в классе $\mathcal{C}^1(t \geq 0)$. Отметим, что внешне задача Коши (13.6)–(13.7) выглядит так же, как и исходная, однако, она имеет одно преимущество, на которое ниже укажем особо.

Во всех дальнейших выкладках будем предполагать выполненным условие

А) базисный вектор $e \in N(B)$ имеет A-жорданову цепочку конечной длины p

$$e = e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(p)}.$$

Сингулярную составляющую $\omega(t)$ будем искать в виде

$$\omega(t) = \omega_0\delta(t) + \omega_1\delta'(t) + \ldots + \omega_{p-2}\delta^{(p-2)}(t). \tag{13.8}$$

Подставим (13.8) в (13.5)

$$B\omega_{p-2}\delta^{(p-1)}(t) + \ldots + B\omega_1\delta''(t) + B\omega_0\delta'(t) + Bu(0)\delta(t) =$$

$$= A\omega_{p-2}\delta^{(p-2)}(t) + \ldots + A\omega_1\delta'(t) + (Bx_0 + A\omega_0)\delta(t),$$

после этого приравняем выражения, стоящие при одинаковых производных от $\delta(t)$,

$$\begin{cases} B\omega_{p-2} = 0, \\ B\omega_{p-3} = A\omega_{p-2}, \\ \ldots \\ B\omega_0 = A\omega_1, \\ Bu(0) = Bx_0 + A\omega_0. \end{cases} \tag{13.9}$$

Из первого уравнения системы (13.9) находим

$$\omega_{p-2} = c_p e^{(1)}.$$

Подставим ω_{p-2} во второе уравнение системы (13.9), тогда в силу условия А) находим

$$\omega_{p-3} = c_{p-1}e^{(1)} + c_p e^{(2)}.$$

После подстановки ω_{p-2} и ω_{p-3} в третье уравнение системы (13.9) в силу условия A) получаем

$$\omega_{p-4} = c_{p-2}e^{(1)} + c_{p-1}e^{(2)} + c_p e^{(3)}.$$

Последовательно решая остальные уравнения системы (13.9), используя при этом условие A), найдем все коэффициенты ω_{p-i} и элемент $u(0)$

$$\omega_{p-i} = c_{p+2-i}e^{(1)} + c_{p+1-i}e^{(2)} + \ldots + c_p e^{(i-1)}, \quad i = 2, \ldots, p, \tag{13.10}$$

$$u(0) = x_0 + c_1 e^{(1)} + c_2 e^{(2)} + \ldots + c_p e^{(p)}. \tag{13.11}$$

Подставим (13.11) в (13.7). Теперь видны преимущества задачи (13.6)–(13.7) перед (13.1)–(13.2), а именно, начальные условия в исходной задаче (13.2) фиксированы, а в новой (13.7) содержат p свободных числовых параметров c_i, $i = 1, \ldots, p$, которыми в дальнейшем можно будет распорядиться должным образом.

Решение $u(t) \in \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ задачи Коши (13.6)–(13.7) будем искать в виде $u(t) = u(0) + y(t)$, где $y(t) \in \mathcal{C}^1(t \geq 0)$ и $y(0) = 0$. Функция $y(t)$ принимает значения в пространстве $\mathbf{R}_1^m$, а для пространства $\mathbf{R}_1^m$ справедливо разложение $\mathbf{R}_1^m = \mathbf{R}_1^{m-1} \oplus \{e\}$, причем $\mathbf{R}_1^{m-1}$ является образом $\mathbf{R}_2^{m-1}$ при отображении Γ, поэтому решение задачи (13.6)–(13.7) можно искать в виде

$$u(t) = u(0) + \Gamma v(t) + \xi(t) \cdot e^{(1)}, \tag{13.12}$$

$$(v(t), e^*) = 0, \tag{13.13}$$

$$v(0) = 0, \quad \xi(0) = 0. \tag{13.14}$$

После подстановки (13.11) в (13.6), в силу (13.13), получим относительно $v(t)$ дифференциальное уравнение

$$\dot{v}(t) = A\Gamma v(t) + \xi(t) \cdot Ae + Au(0) + f(t)$$

с начальным условием (13.14). Отсюда находим

$$v(t) = \int\limits_0^t \exp A\Gamma(t-s)Ae^{(1)} \cdot \xi(s)\,ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \exp A\Gamma(t-s)(Ax_0 + f(s))\,ds + \tag{13.15}$$

$$+ \int\limits_0^t \exp A\Gamma(t-s)\left(c_1 \cdot Ae^{(1)} + c_2 \cdot Ae^{(2)} + \ldots + c_p \cdot Ae^{(p)}\right) ds.$$

После подстановки этого выражения для $v(t)$ в формулу (13.13) получим относительно $\xi(t)$ интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода вида

$$\int\limits_0^t K(t-s)\xi(s)\,ds = b(t) - c_1 \cdot a_1(t) - c_2 \cdot a_2(t) - \ldots - c_p \cdot a_p(t), \tag{13.16}$$

где введены обозначения (с учетом условия A))

$$K(t-s) = \langle \exp A\Gamma(t-s)Ae,\, e^* \rangle = \frac{(t-s)^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{(t-s)^{2p-1}}{(2p-1)!} + \ldots,$$

$$a_1(t) = \int\limits_0^t \left\langle \exp A\Gamma(t-s)Ae^{(1)},\, e^* \right\rangle ds = \frac{t^p}{p!} + \frac{t^{2p}}{(2p)!} + \ldots,$$

$$a_2(t) = \int\limits_0^t \left\langle \exp A\Gamma(t-s)Ae^{(2)},\, e^* \right\rangle ds = \frac{t^{p-1}}{(p-1)!} + \frac{t^{2p-1}}{(2p-1)!} + \ldots,$$

$$\ldots$$

$$a_p(t) = \int\limits_0^t \left\langle \exp A\Gamma(t-s)Ae^{(p)},\, e^* \right\rangle ds = t + \frac{t^{p+1}}{(p+1)!} + \ldots,$$

$$b(t) = -\int\limits_0^t \langle \exp A\Gamma(t-s)(Ax_0 + f(s)),\, e^* \rangle\, ds. \tag{13.17}$$

Здесь, не ограничивая общности, считаем $\left\langle Ae^{(p)}, e^{*}\right\rangle = 1$. Уравнение (13.16) будем решать последовательным дифференцированием. Продифференцируем (13.16) первый раз

$$K(0)\xi(t)+\int\limits_0^t K'(t-s)\xi(s)\,ds = b'(t)-c_1\cdot a_1'(t)-c_2\cdot a_2'(t)-\ldots-c_p\cdot a_p'(t)$$

или

$$\int\limits_0^t K'(t-s)\xi(s)\,ds = b'(t)-c_1\cdot a_1'(t)-c_2\cdot a_2'(t)-\ldots-c_p\cdot a_p'(t).$$

Поскольку левая часть последнего уравнения при $t=0$ обращается в нуль, то необходимо, чтобы обращалась в нуль и правая часть

$$b'(0)-c_1\cdot a_1'(0)-c_2\cdot a_2'(0)-\ldots-c_p\cdot a_p'(0)=0$$

или

$$b'(0)-c_p=0,$$

$$c_p=b'(0).$$

Продифференцируем (13.16) два раза

$$K'(0)\xi(t)+\int\limits_0^t K''(t-s)\xi(s)\,ds = b''(t)-c_1\cdot a_1''(t)-c_2\cdot a_2''(t)-\ldots-c_p\cdot a_p''(t)$$

или

$$\int\limits_0^t K''(t-s)\xi(s)\,ds = b''(t)-c_1\cdot a_1''(t)-c_2\cdot a_2''(t)-\ldots-c_p\cdot a_p''(t).$$

Рассуждая так же, как выше, получим

$$c_{p-1}=b''(0).$$

Продолжая далее эти выкладки, найдем значения всех параметров c_i

$$c_{p-i}=b^{(i+1)}(0),\quad i=0,\ldots,p-1, \tag{13.18}$$

причем после p-кратного дифференцирования уравнения (13.16) получаем

$$K^{(p-1)}(0)\xi(t) + \int_0^t K^{(p)}(t-s)\xi(s)\,ds =$$

$$= b^{(p)}(t) - c_1 \cdot a_1^{(p)}(t) - c_2 \cdot a_2^{(p)}(t) - \ldots - c_p \cdot a_p^{(p)}(t)$$

или

$$\xi(t) + \int_0^t K(t-s)\xi(s)\,ds =$$

$$= b^{(p)}(t) - c_1 \cdot (1 + a_1(t)) - c_2 \cdot a_2(t) - \ldots - c_p \cdot a_p(t).$$

Учитывая теперь уравнение (13.16), получаем вид функции $\xi(t)$

$$\xi(t) = b^{(p)}(t) - b^{(p)}(0) - b(t). \tag{13.19}$$

Таким образом, доказано следующее утверждение

Теорема 1. *Если выполнено условие A), $f(t) \in \mathcal{C}^p(t \geq 0)$, то задача Коши* (13.1)–(13.2) *имеет в классе K'_+ единственное решение, которое может быть восстановлено по формулам* (13.4), (13.8), (13.10)–(13.12), (13.15), (13.18), (13.19).

Если начальные условия x_0 и правая часть $f(t)$ исходной задачи (13.1)–(13.2) таковы, что для функции $b(t)$ из формулы (13.17) выполнены условия

$$b^{(i)}(0) = 0, \quad i = 1, \ldots, p, \tag{13.20}$$

то согласно формулам (13.10), (13.8) и (13.18) сингулярная составляющая $\omega(t)$ обобщенного решения (13.4) обращается в нуль, а задача (13.6)–(13.7) превращается в исходную (13.1)–(13.2), т. е. в этом случае обобщенное решение оказывается классическим, т. е. из класса $\mathcal{C}(t \geq 0)$.

Итак, имеет место

Теорема 2. *Если выполнены условия А) и* (13.20), $f(t) \in \mathcal{C}^p(t \geq 0)$, *то задача Коши* (13.1)–(13.2) *однозначно разрешима в классе* $\mathcal{C}^1(t \geq 0)$, *причем это решение можно восстановить по формулам* (13.12), (13.15), (13.17), (13.19).

Замечание. Условия (13.20) описывают совокупность начальных условий x_0 и правых частей $f(t)$, при которых разрешима в классе $\mathcal{C}^1(t \geq 0)$ исходная задача Коши (13.1)–(13.2).

Задачи для самостоятельного решения

I. Получите утверждения, аналогичные теоремам 1 и 2, для задач Коши

$$B\ddot{x} = Ax + f(t), \tag{13.20}$$

$$x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = x_1 \tag{13.21}$$

и

$$Bx^{(k)} = Ax + f(t), \tag{13.22}$$

$$x(0) = x_0, \;\; \dot{x}(0) = x_1, \;\; \ldots, \;\; x^{(k-1)} = x_{k-1}. \tag{13.23}$$

II. Теоремы 1 и 2 допускают обобщения на случай $\dim N(B) > 1$. Заменив условие А) требованием существования полного A-жорданова набора для B, попытайтесь получить эти утверждения как для системы (13.1)–(13.2), так и для систем (13.20)–(13.21) и (13.22)–(13.23).

14 Интегральные преобразования обобщенных функций

Преобразование Фурье обобщенных функций медленного роста. Пусть $f(x)$ — абсолютно интегрируемая на $\mathbf{R}^n$ функция (т. е.

$\int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,dx < +\infty$), тогда существует ее преобразование Фурье, определяемое следующим образом:

$$F[f(x)](\xi) \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{i(\xi,x)}\,dx,$$

причем, как функция $\xi \in \mathbf{R}^n$, $F[f(x)](\xi) \in C(\mathbf{R}^n)$ и равномерно ограничена

$$|F[f(x)](\xi)| \le \int\limits_{\mathbf{R}^n} |f(x)|\,dx.$$

Таким образом, $F[f(x)](\xi)$ порождает регулярную обобщенную функцию на $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, действующую по правилу

$$(F[f(x)](\xi), \varphi(\xi)) = \int\limits_{\mathbf{R}^n} F[f(x)](\xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad \forall\varphi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

Но по теореме Фубини (см. [11, с. 53])

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} F[f(x)](\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int\limits_{\mathbf{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)e^{i(\xi,x)}\,dx\right]\varphi(\xi)\,d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)\left[\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(\xi)e^{i(\xi,x)}\,d\xi\right]dx = \int\limits_{\mathbf{R}^n} f(x)F[\varphi(\xi)]\,dx.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$(F[f(x)](\xi), \varphi(\xi)) = (f(x), F[\varphi(\xi)](x)) \quad \forall\varphi(\xi) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n),$$

которое и принимается за определение преобразования Фурье произвольной обобщенной функции медленного роста.

Определение. *Если* $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, *то*

$$(F[f(x)](\xi), \varphi(\xi)) \overset{\text{def}}{=} (f(x), F[\varphi(\xi)](x)) \quad \forall\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n).$$

Приведем здесь основные свойства преобразования Фурье (см. [6, с. 128–131]):

1) (*дифференцирование*) если $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, то

$$D_\xi^\alpha F[f(x)](\xi) = F[(ix)^\alpha f(x)](\xi), \quad F[D^\alpha f(x)](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[f(x)](\xi);$$

2) (*преобразование сдвига*) если $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, то

$$F[f(x-x_0)](\xi) = e^{i(x_0,\xi)} F[f(x)](\xi), \quad F[f(x)](\xi+\xi_0) = F[e^{i(x,\xi_0)} f(x)](\xi);$$

3) (*преобразование подобия*) если $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$, то

$$F[f(cx)](\xi) = \frac{1}{|c|^n} F[f(x)] \left(\frac{\xi}{c}\right);$$

4) (*преобразование Фурье прямого произведения*) если $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ и $g(y) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^m)$, то

$$F[f(x) \cdot g(y)](\xi, \eta) = F[f(x)](\xi) \cdot F[g(y)](\eta);$$

5) (*преобразование Фурье свертки*) если $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ и $g(x)$ — финитная обобщенная функция, то

$$F[f(x) * g(x)](\xi) = F[g(x)](\xi) \cdot F[f(x)](\xi),$$

где $F[g(x)](\xi) \in \theta_M$ (определение класса θ_M см. в замечании из § 2).

Обратным преобразованием Фурье обобщенных функций $f(x) \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ называется преобразование

$$F^{-1}[f(\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(-\xi)](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[f(\xi)](-x),$$

таким образом,

$$(2\pi)^n F^{-1}[f(\xi)](x) = F[f(\xi)](-x).$$

Отметим, что преобразования Фурье F и F^{-1} преобразуют пространство $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ в себя взаимнооднозначно и непрерывно.

Пример 1 (преобразование Фурье δ-функции [5, задача № 9.11 (1)]). Вычислить $F[\delta(x-x_0)](\xi)$

$$(F[\delta(x-x_0)](\xi), \varphi(\xi)) = (\delta(x-x_0), F[\varphi(\xi)](x)) =$$

$$= \int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi(\xi) e^{i(\xi, x_0)}\, d\xi = (e^{i(\xi,x_0)}, \varphi(\xi))$$

или

$$F[\delta(x - x_0)](\xi) = e^{i(\xi,x_0)}.$$

Если $x_0 = 0$, то $F[\delta(x)](\xi) = 1$, тогда

$$\delta(x) = F^{-1}[1] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[1],$$

т. е. $F[1] = (2\pi)^n \delta(x)$.

Отметим, что классическое преобразование Фурье константы не существует. По формулам связи операции дифференцирования и преобразования Фурье получаем

$$F[D^\alpha \delta(x)](\xi) = (-i\xi)^\alpha F[\delta(x)](\xi) = (-i\xi)^\alpha$$

или

$$F\left[(-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(x)\right](\xi) = (\xi)^\alpha,$$

тогда

$$(-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(x) = F^{-1}[(\xi)^\alpha](x) = \frac{1}{(2\pi)^n} F[(\xi)^\alpha](x),$$

$$F[(\xi)^\alpha](x) = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(x).$$

Таким образом,

$$F[(x)^\alpha](\xi) = (2\pi)^n (-i)^{|\alpha|} D^\alpha \delta(\xi).$$

Пример 2 [5, задача № 9.11 (3, 4)]. Вычислить $F\left[\mathcal{P}\dfrac{1}{x}\right](\xi)$ и $F[\operatorname{sign} x]$.

$$\left(F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](\xi),\, \varphi(\xi)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\, F[\varphi(\xi)](x)\right) = \left(\mathcal{P}\frac{1}{x},\, \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi\right) =$$

$$= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\epsilon} + \int\limits_{\epsilon}^{+\infty}\right) \left(\frac{1}{x} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{ix\xi}\, d\xi\right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \left(\lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int\limits_{-\infty}^{-\epsilon} + \int\limits_{\epsilon}^{+\infty} \right) \frac{\cos x\xi + i \sin x\xi}{x}\, dx \right) d\xi =$$

$$= i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x\xi}{x}\, dx \right) d\xi =$$

$$= \pi i \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sign} \xi \varphi(\xi)\, d\xi = \big(\pi i \operatorname{sign} \xi, \varphi(\xi)\big).$$

Таким образом, $F\left[\mathcal{P}\dfrac{1}{x}\right](\xi) = \pi i \operatorname{sign} \xi$.

Отсюда следует

$$\mathcal{P}\frac{1}{x} = \pi i F^{-1}[\operatorname{sign} \xi] = \pi i \cdot \frac{1}{2\pi} F[\operatorname{sign}(-\xi)] =$$

$$= \frac{i}{2} F[-\operatorname{sign} \xi] = -\frac{i}{2} F[\operatorname{sign} \xi]$$

или

$$F[\operatorname{sign} x] = -\frac{2}{i}\mathcal{P}\frac{1}{\xi} = 2i\mathcal{P}\frac{1}{\xi}.$$

Пример 3 [5, задача № 9.11 (6, 12)]. Вычислить $F\left[\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}\right]$ и $F[|x|]$. В примере 5 § 7 доказано равенство $\dfrac{d}{dx}\mathcal{P}\dfrac{1}{x} = -\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$, поэтому по формулам связи операции дифференцирования и преобразования Фурье получаем

$$F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x^2}\right] = F\left[-\frac{d}{dx}\mathcal{P}\frac{1}{x}\right](\xi) = -(-i\xi)F\left[\mathcal{P}\frac{1}{x}\right] = i\xi \cdot \pi i \operatorname{sign} \xi = -\pi|\xi|,$$

$$\mathcal{P}\frac{1}{x^2} = -\pi F^{-1}[|\xi|] = -\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot F[|\xi|] = -\frac{1}{2} \cdot F[|\xi|].$$

Итак, $F\left[\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}\right] = -\pi|\xi|, \quad F[|x|] = -2\mathcal{P}\dfrac{1}{\xi^2}$.

Пример 4. Вычислить $F[x\theta(x)]$. Поскольку (см. [6, с. 134])

$$F[\theta(x)] = \pi\delta(\xi) + i\mathcal{P}\frac{1}{\xi},$$

то

$$\frac{d}{d\xi}F[\theta(x)] = \pi\delta'(\xi) - i\mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}.$$

Но

$$\frac{d}{d\xi}F[\theta(x)] = F[ix\theta(x)] = iF[x\theta(x)],$$

поэтому

$$F[x\theta(x)] = -\pi i\delta'(\xi) - \mathcal{P}\frac{1}{\xi^2}.$$

Преобразование Лапласа обобщенных функций. Если функция одного переменного $f(t)$ локально интегрируема, $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$ и при $t \to +\infty$, $|f(t)| \leq Ae^{at}$, тогда ее *преобразованием Лапласа* называется функция

$$\mathcal{F}(p) = \int\limits_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,dt, \quad \text{где} \quad p = \sigma + i\omega, \quad \sigma > a.$$

С другой стороны,

$$\mathcal{F}(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\sigma t}\cdot f(t)\theta(t)\cdot e^{-pt}\,dt = F\left[e^{-\sigma t}f(t)\right].$$

Определение. *Если $f(t) \in \mathcal{D}'_+(a)$ (т. е. $\operatorname{supp} f(t) \subset [a;+\infty)$), то $f(t)e^{-\sigma t} \in \mathcal{S}'_+(a)$, $\sigma > a$, и преобразованием Лапласа обобщенной функции $f(t)$ называется распределение*

$$\mathcal{F}(p) = F\left[e^{-\sigma t}f(t)\right](-\omega) = 2\pi F^{-1}\left[e^{-\sigma t}f(t)\right](\omega), \ \ p = \sigma + i\omega, \ \ \sigma > a,$$

что принято обозначать следующим образом: $f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)$. Обобщенную функцию $f(t)$ называют оригиналом, а $\mathcal{F}(p)$ — изображением, при этом $\mathcal{F}(p)$ — аналитическая функция в полуплоскости $\sigma > a$.

Перечислим основные свойства преобразования Лапласа распределений (см. [5, с. 122]):

1) (*дифференцирование*) если $f(t) \in \mathcal{D}'_+(a)$, то

$$f^{(m)}(t) \leftrightarrow p^m \mathcal{F}(p), \quad (-t)^m f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}^{(m)}(p), \quad \sigma > a, \ \ m = 0, 1, 2, \ldots;$$

2) (*преобразование Лапласа сдвига*) если $f(t) \in \mathcal{D}'_+(a)$, то

$$f(t)e^{\lambda t} \leftrightarrow \mathcal{F}(p - \lambda), \ \ \sigma > a + Re\lambda, \quad f(t - \tau) \leftrightarrow e^{-\tau p}\mathcal{F}(p), \ \ \sigma > a;$$

3) (*преобразование Лапласа подобия*) если $f(t) \in \mathcal{D}'_+(a)$, то

$$f(kt) \leftrightarrow \frac{1}{k}\mathcal{F}\left(\frac{p}{k}\right), \quad \sigma > ka, \quad k > 0;$$

4) (*преобразование Лапласа свертки*) если $f(t)$, $g(t) \in \mathcal{D}'_+(a)$, $f(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p)$, $g(t) \leftrightarrow \mathcal{G}(p)$, $\sigma > a$, то

$$f(t) * g(t) \leftrightarrow \mathcal{F}(p) \cdot \mathcal{G}(p);$$

5) (*преобразование Лапласа первообразной*) если $f(t) \in \mathcal{D}'_+(a)$, $a \geq 0$, то

$$f^{(-m)}(t) \leftrightarrow \frac{\mathcal{F}(p)}{p^m}, \quad \sigma > a, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Пример 5 [5, задача № 10.7 (2, 8)]. Найти изображения функций $\delta^{(m)}(t - \tau)$ и $\dfrac{t^k}{k!}e^{\lambda t}\theta(t)$. В соответствии с определением преобразования Лапласа и результатом примера 1 данного параграфа непосредственно находим

$$\delta(t - \tau) \leftrightarrow F\left[e^{-\sigma t}\delta(t - \tau)\right](-\omega) = e^{-\sigma\tau}F[\delta(t - \tau)](-\omega) =$$

$$= e^{-\sigma\tau} \cdot e^{-\tau\omega i} = e^{-p\tau}.$$

Отсюда находим преобразование Лапласа производной

$$\delta^{(m)}(t - \tau) \leftrightarrow p^m \cdot e^{-p\tau}.$$

При $\tau = 0$ получаем $\delta(t) \leftrightarrow 1$, $\delta^{(m)}(t) \leftrightarrow p^m$,

$$\theta(t) \leftrightarrow F\left[e^{-\sigma t}\theta(t)\right](-\omega) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\omega t}\, dt = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}.$$

По формуле дифференцирования изображений находим

$$\frac{t^k}{k!}\theta(t) = \frac{(-1)^k}{k!}(-t)^k\theta(t) \ \leftrightarrow \ \frac{(-1)^k}{k!}\frac{d^k}{dp^k}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^{k+1}}$$

и по формуле сдвига преобразования Лапласа окончательно получаем

$$\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}\theta(t) \leftrightarrow \frac{1}{(p-\lambda)^{k+1}}, \quad e^{\lambda t}\theta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p-\lambda}.$$

Пример 6. Найти изображения функций $\cos\omega t\theta(t)$, $e^{\lambda t}\sinh\omega t\theta(t)$ и $\sinh(t-\tau)\theta(t)$.

$$\cos\omega t\theta(t) = \frac{e^{\omega ti}+e^{-\omega ti}}{2}\theta(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega i}+\frac{1}{p+\omega i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2p}{p^2+\omega^2} = \frac{p}{p^2+\omega^2},$$

$$e^{\lambda t}\sinh\omega t\theta(t) = e^{\lambda t}\frac{e^{\omega t}-e^{-\omega t}}{2}\theta(t) \leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\lambda-\omega}-\frac{1}{p-\lambda+\omega}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2} = \frac{\omega}{(p-\lambda)^2-\omega^2},$$

При $\lambda = 0$ и $\omega = 1$ получаем

$$\sinh t\theta(t) \leftrightarrow \frac{1}{p^2-1}.$$

Отсюда по формуле сдвига

$$\sinh(t-\tau)\theta(t) \leftrightarrow \frac{e^{-\tau p}}{p^2-1}.$$

Пример 7 [5, задача № 10.15 (1)]. Решить уравнение $\cos t\theta(t) * \mathcal{E}(t) = \delta(t)$. Перейдем из пространства оригиналов в пространство изображений, применив к исходному уравнению преобразование Лапласа, получим

$$\frac{p}{p^2+1}\cdot\mathcal{E}(p) = 1.$$

Отсюда

$$\mathcal{E}(p) = \frac{p^2+1}{p} = p + \frac{1}{p} \leftrightarrow \delta'(t) + \theta(t),$$

т. е. обобщенная функция $\mathcal{E}(t) = \delta'(t) + \theta(t)$ — искомое решение.

Пример 8 [5, задача № 10.15 (4)]. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \theta(t) * u_1(t) + \delta'(t) * u_2(t) = \delta(t), \\ \delta(t) * u_1(t) + \delta'(t) * u_2(t) = 0. \end{cases}$$

После перехода в пространство изображений получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} \cdot u_1(p) + p \cdot u_2(p) = 1, \\ u_1(p) + p \cdot u_2(p) = 0, \end{cases}$$

решая которую, находим

$$\begin{cases} u_1(p) = -1 - \dfrac{1}{p-1} \leftrightarrow u_1(t) = -\delta(t) - e^t\theta(t), \\ u_2(p) = \dfrac{1}{p-1} \leftrightarrow u_2(t) = e^t\theta(t). \end{cases}$$

Задача Коши для вырожденной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Задачу Коши (13.1)–(13.2), рассмотренную в § 13, можно исследовать с помощью преобразования Лапласа. Перейдем в пространство изображений, применив преобразование Лапласа к уравнению (13.3), получим

$$(pB - A)\hat{x}(p) = g(p).$$

Здесь введены обозначения

$$\hat{x}(p) \leftrightarrow \widetilde{x}(t) = x(t)\theta(t), \quad g(p) = B\bar{x}_0 + f(p) \leftrightarrow B\bar{x}_0\delta(t) + \widetilde{f}(t).$$

Тогда

$$\hat{x}(p) = \left(B - \frac{1}{p}A\right)^{-1} \frac{1}{p}\, g(p).$$

В условиях (и обозначениях) теоремы 1 из § 13 по формуле обращения матричного пучка из § 15.3 имеем

$$\left(B - \frac{1}{p}A\right)^{-1} = \Gamma \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{A\Gamma}{p}\right)^l - \frac{p^{2p_1}}{p^{p_1} - 1} \cdot \sum_{j,k=1}^{p_1} \frac{1}{p^{j+k-2}} \left\langle (A\Gamma)^{j-1} \cdot, e^* \right\rangle e^{(k)}$$

или

$$\left(B - \frac{1}{p}A\right)^{-1}\frac{1}{p} = \Gamma\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(A\Gamma)^l}{p^{l+1}} -$$

$$-\left(1 + \frac{1}{p^{p_1}} + \frac{1}{p^{2p_1}} + \cdots\right)\cdot\sum_{j,\,k=1}^{p_1}\frac{p^{p_1}}{p^{j+k-1}}\left\langle (A\Gamma)^{j-1}\cdot, e^*\right\rangle e^{(k)}.$$

Здесь (во избежание перегрузки обозначений) p_1 означает длину A-жордановой цепочки базисного элемента e ядра $N(B)$. После перегруппировки слагаемых по степеням p получаем

$$\left(B - \frac{1}{p}A\right)^{-1}\frac{1}{p} = (pB - A)^{-1} =$$

$$= \Gamma\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(A\Gamma)^l}{p^{l+1}}\left\{I - \sum_{j=1}^{p_1}\left\langle (A\Gamma)^{j-1}\cdot, e^*\right\rangle Ae^{(p_1+1-j)}\right\} -$$

$$-\sum_{k=0}^{p_1-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_1-k}\left\langle (A\Gamma)^{j-1}\cdot, e^*\right\rangle e^{(p_1-k+1-j)}\right\}p^k.$$

Возвращаясь теперь в пространство оригиналов, находим обобщенное решение в виде свертки

$$\widetilde{x}(t) = \left(\Gamma e^{A\Gamma t}\left\{I - \sum_{j=1}^{p_1}\left\langle (A\Gamma)^{j-1}\cdot, e^*\right\rangle Ae^{(p_1+1-j)}\right\}\theta(t) -\right.$$

$$\left.-\sum_{k=0}^{p_1-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_1-k}\left\langle (A\Gamma)^{j-1}\cdot, e^*\right\rangle e^{(p_1-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t)\right) * \tag{14.1}$$

$$* \left(B\bar{x}_0\delta(t) + f(t)\theta(t)\right).$$

Замечание 1. Тождественными преобразованиями можно убедиться, что полученная здесь для обобщенного решения $\widetilde{x}(t)$ формула (14.1) совпадает с приведенной в теореме 1 из § 13.

Замечание 2. Обобщенную функцию (матричного типа) вида

$$\mathcal{E}_1(t) = \Gamma e^{A\Gamma t}\left\{I - \sum_{j=1}^{p_1}\left\langle (A\Gamma)^{j-1}\cdot, e^*\right\rangle Ae^{(p_1+1-j)}\right\}\theta(t) -$$

$$-\sum_{k=0}^{p_1-1}\left\{\sum_{j=1}^{p_1-k}\left\langle (A\Gamma)^{j-1}\cdot, e^*\right\rangle e^{(p_1-k+1-j)}\right\}\delta^{(k)}(t) \qquad (14.2)$$

естественно назвать фундаментальным решением для матричного дифференциального оператора $\left(B\dfrac{d}{dt}-A\right)$ (при выполнении условий теоремы 1 из § 13), поскольку для нее справедливо равенство

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}_1(t)=\mathcal{E}_1(t)*(B\delta'(t)-A\delta(t))=I\delta(t). \qquad (14.3)$$

Задачи для самостоятельного решения

I. Доказать, что в $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$:

1) $F\left[\dfrac{\delta(x-x_0)+\delta(x+x_0)}{2}\right]=\cos(x_0\xi);$

2) $F\left[\dfrac{\delta(x-x_0)-\delta(x+x_0)}{2i}\right]=\sin(x_0\xi);$

3) $F\left[e^{\pm ax}\theta(\mp x)\right]=\dfrac{1}{a\pm i\xi}, \quad a>0;$

4) $F\left[e^{-a|x|}\right]=\dfrac{2a}{a^2+\xi^2};$

5) $F\left[\dfrac{2a}{a^2+x^2}\right]=2\pi e^{-a|\xi|};$

6) $F[\theta(\pm x)]=\pi\delta(\xi)\pm i\mathcal{P}\dfrac{1}{\xi}$ [6, с. 134];

7) $F\left[\mathcal{P}\dfrac{1}{x^3}\right]=-\dfrac{\pi\, i}{2}\xi\cdot|\xi|;$

8) $F[x\cdot|x|]=-4i\mathcal{P}\dfrac{1}{\xi^3};$

9) $F\left[\dfrac{x^n}{n!}e^{-ax}\theta(x)\right]=\dfrac{1}{(a+i\xi)^{n+1}}, \quad n\in N.$

II. Вычислить в $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ преобразования Фурье следующих обобщенных функций:

1) $\theta(x-a)$; 2) $\dfrac{1}{x \pm i0}$ (см. пример 3 § 7);

3) $x^k\theta(x)$, $k \in N$; 4) $|x|^k$, $k = 2, 3, \ldots$;

5) $x^k\mathcal{P}\dfrac{1}{x}$, $k \in N$; 6) $x^k\delta(x)$, $k \in N$;

7) $x^k\delta^{(m)}(x)$, $m \geq k$; 8) $x^k\mathcal{P}\dfrac{1}{x^2}$, $k \in N$;

9) $x^k\mathcal{P}\dfrac{1}{x^3}$, $k \in N$;

III. Доказать, что

1) $e^{\pm i\omega t}\theta(t) \leftrightarrow \dfrac{1}{p \mp i\omega}$; 2) $\sin\omega t\theta(t) \leftrightarrow \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

IV. Найти изображения следующих функций:

1) $\sinh\omega t\theta(t)$; 2) $\cosh\omega t\theta(t)$;

3) $e^{\lambda t}\sin\omega t\theta(t)$; 4) $e^{\lambda t}\cos\omega t\theta(t)$;

5) $e^{\lambda t}\cosh\omega t\theta(t)$; 6) $t\sin\omega t\theta(t)$;

7) $t\cos\omega t\theta(t)$; 8) $t\sinh\omega t\theta(t)$;

9) $t\cosh\omega t\theta(t)$; 10) $\sin(t-\tau)\theta(t)$, $\tau > 0$;

11) $\cos(t-\tau)\theta(t)$; 12) $\cosh(t-\tau)\theta(t)$.

V. Проверить, что

1) $t\cos t\,\theta(t) * \mathcal{E}(t) = \delta(t)$ при $\mathcal{E}(t) = \delta''(t) + 3\delta(t) + 4\sinh t\,\theta(t)$;

2) $\mathcal{E}(t) + 2\cos t\,\theta(t) * \mathcal{E}(t) = \delta(t)$ при $\mathcal{E}(t) = \delta(t) + 2(t-1)e^t\theta(t)$.

VI. Доказать, что формула (14.1) совпадает с формулой (13.4), в которой составляющие находятся в соответствии с (13.8), (13.10)–(13.12), (13.15), (13.18), (13.19).

VII. Докажите равенство (14.3).

VIII. Получите обобщение формулы (14.2) на случай $\dim N(B) > 1$.

IX. Найти фундаментальные решения матричных дифференциальных операторов $\left(B\dfrac{d^2}{dt^2} - A\right)$ и $\left(B\dfrac{d^k}{dt^k} - A\right)$, $k \geq 2$, если $N(B) \neq 0$.

15 Некоторые специальные факты о конечномерных пространствах

15.1 Специальное разложение конечномерных пространств

Рассмотрим пару пространств $\mathbf{R}_1^m$ и $\mathbf{R}_2^m$. Пусть квадратная $m \times m$ матрица B задает линейное отображение из $\mathbf{R}_1^m$ в $\mathbf{R}_2^m$, причем $N(B) \neq \emptyset$ и $\dim N(B) = \dim N(B^*) = n$. Введем системы элементов e_i, $i = 1, \ldots, n$, — ортонормированный базис в $N(B)$, e_i^*, $i = 1, \ldots, n$, — ортогональный базис в $N(B^*)$, z_i, $i = 1, \ldots, n$, — биортогональная система к $\{e_i^*\}$, т. е. $(z_i, e_j^*) = \delta_{ij}$, $i,\ j = 1, \ldots, n$. Пространства $\mathbf{R}_1^m$ и $\mathbf{R}_2^m$ раскладываются в прямые суммы

$$\mathbf{R}_1^m = N(B) \oplus \mathbf{R}_1^{m-n}, \quad \mathbf{R}_2^m = N(B^*) \oplus \mathbf{R}_2^{m-n},$$

причем $\forall y \in \mathbf{R}_2^{m-n}$ справедливы равенства $(y, e_i^*) = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Если $x \in \mathbf{R}_1^{m-n}$, то

$$(Bx, e_i^*) = (x, B^* e_i^*) = (x, 0) = 0,$$

т. е. линейное отображение, задаваемое матрицей B, переводит $\mathbf{R}_1^{m-n}$ в $\mathbf{R}_2^{m-n}$. Имеет место и обратное утверждение, а именно, $\forall y \in \mathbf{R}_2^{m-n}$ существует $x \in \mathbf{R}_1^{m-n}$ такой, что $Bx = y$. Действительно, если предположить, что найдется $y \in \mathbf{R}_2^{m-n}$, но $Bx \neq y$ $\forall x \in \mathbf{R}_1^{m-n}$, то, во-первых, $\mathbf{R}_2^m$ можно разложить в прямую сумму

$$\mathbf{R}_2^m = N(B^*) \oplus \{y\} \oplus \mathbf{R}_2^{m-n-1},$$

а, во-вторых, $\forall x \in \mathbf{R}_1^m$ справедливо равенство $(Bx, y) = 0$. С другой стороны,

$$(Bx, y) = (x, B^* y) = 0.$$

Таким образом, вектор $B^* y$ ортогонален к любому вектору пространства $\mathbf{R}_1^m$, т. е. $B^* y = 0$, что означает включение $y \in N(B^*)$, которое невозможно, так как вектор y изначально выбирался в ортогональном дополнении к $N(B^*)$.

Приняв во внимание, что отображение B *не имеет* нулей внутри $\mathbf{R}_1^{m-n}$, получаем следующие утверждения:

Лемма 1. *Сужение отображения $B : \mathbf{R}_1^{n-m} \to \mathbf{R}_2^{m-n}$ обратимо.*

Лемма 2. *Система линейных уравнений $Bx = y$ разрешима тогда и только тогда, когда $(y, e_i^*) = 0,\ i = 1, \ldots, n$.*

15.2 Матрица Треногина – Шмидта

Наряду с отображением B пространств $\mathbf{R}_1^m$ и $\mathbf{R}_2^m$ введем еще одно

$$\widetilde{B} = B + \sum_{i=1}^{n} (\cdot, e_i) z_i.$$

Очевидно,

$$\widetilde{B}\big|_{\mathbf{R}_1^{m-n}} \equiv B\big|_{\mathbf{R}_1^{m-n}} \equiv \mathbf{R}_2^{m-n},$$

$$\widetilde{B}\big|_{N(B)} \equiv N(B^*),$$

$$\widetilde{B} e_i = z_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

отсюда в силу леммы 1 получаем обратимость отображения $\widetilde{B}$. Матрица, задающая обратное отображение, называется *матрицей Треногина – Шмидта* и обозначается $\Gamma = \widetilde{B}^{-1}$. Понятно, что

$$\Gamma\big|_{\mathbf{R}_2^{m-n}} \equiv \mathbf{R}_1^{m-n}, \quad \Gamma z_i = e_i, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \left(B\big|_{\mathbf{R}_1^{m-n}}\right)^{-1} = \Gamma.$$

Справедливы равенства:

$$B\Gamma = I - \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, e_i^* \rangle z_i, \quad \Gamma B = I - \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, e_i \rangle e_i.$$

15.3 A-жордановы цепочки и наборы

Пусть $e \in N(B)$, A — $m \times m$ матрица, тогда $Be = 0$. Рассмотрим систему уравнений $Be^{(2)} = Ae^{(1)}$, где $e^{(1)} = e$. Если $(Ae^{(1)}, e_i^*) = 0$, $i = 1, \dots, n$, то эта система уравнений разрешима, и $e^{(2)} = \Gamma Ae^{(1)}$ — одно из ее решений. Это решение называют *первым присоединенным к* $e^{(1)}$ *элементом* или *вторым элементом цепочки.* Рассмотрим теперь новую систему $Be^{(3)} = Ae^{(2)}$. Если $(Ae^{(2)}, e_i^*) = 0$, $i = 1, \dots, n$, то новая система также разрешима, и $e^{(3)} = \Gamma Ae^{(2)}$ — одно из ее решений, называемое *вторым присоединенным к* $e^{(1)}$ или *третьим элементом цепочки.* Продолжим далее этот процесс и предположим, что удалось построить элемент с номером p – $e^{(p)}$, при этом не все числа $(Ae^{(p)}, e_i^*)$, $i = 1, \dots, n$, оказались равными нулю. Это означает, что нельзя построить элемент $e^{(p+1)}$. Говорят, что вектор e имеет *A-жорданову цепочку длины p,* при этом

$$e^{(j)} = (\Gamma A)^{j-1} e^{(1)}, \quad j = 1, \dots, p.$$

Построим теперь для каждого элемента e_i, $i = 1, \dots, n$, базиса $N(B)$ свою цепочку длины p_i. Система элементов

$$\left\{ e_i^{(j)},\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i \right\}$$

называется *A-жордановым набором.* Такой набор называют *полным,* если

$$\det \left\| \left(Ae_i^{(p_i)}, e_j^* \right) \right\| \neq 0.$$

Векторы базиса $N(B^*)$ можно выбрать такими, чтобы

$$\left(Ae_i^{(p_i)}, e_j^* \right) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

После такого выбора системы векторов e_i^* и $Ae_i^{(p_i)}$ биортогональны, т. е.

$$z_i = Ae_i^{(p_i)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Отсюда, в силу свойств матрицы Треногина–Шмидта, получаем

$$\Gamma A e_i^{(p_i)} = \Gamma z_i = e_i, \quad i = 1, \ldots, n$$

и циклические формулы

$$e_i^{(j)} = (\Gamma A)^{k \cdot p_i + j - 1} e^{(1)}.$$

Элементы $\left\{ e_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i \right\}$, составляющие полный A-жорданов набор, являются линейно независимой системой векторов в $\mathbf{R}_1^m$. Отметим, что полный A-жорданов набор существует тогда и только тогда, когда в некоторой проколотой окрестности нуля $0 < |\lambda| < \epsilon$ матричный пучок $(B - \lambda A)$ обратим [3], в этом случае

$$(B - \lambda A)^{-1} = \Gamma \sum_{l=0}^{\infty} (A \Gamma \lambda)^l -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda^{p_i}(1 - \lambda^{p_i})} \cdot \sum_{j,k=1}^{p_i} \lambda^{j+k-2} \left\langle (A\Gamma)^{j-1} \cdot, e_i^* \right\rangle e_i^{(k)}.$$

15.4 Матричная экспонента

Пусть A — квадратная $m \times m$ матрица, тогда экспонентой матрицы A называют матрицу $\exp(At)$, задаваемую рядом

$$\exp(At) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^l}{l!} t^l = I + At + \frac{A^2}{2!} t^2 + \ldots + \frac{A^l}{l!} t^l + \ldots,$$

который является сходящимся для любого t и любой квадратной матрицы. Для матричной экспоненты справедлива основная формула степеней

$$\exp A(t + s) = \exp At \cdot \exp As = \exp As \cdot \exp At,$$

а также правило дифференцирования

$$(\exp At)' = A \cdot \exp At = \exp At \cdot A.$$

Наряду с матричной экспонентой широко используются следующие тригонометрические и гиперболические функции матрицы:

$$\sin At = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{A^{2l+1}}{(2l+1)!} t^{2l+1}, \quad \sinh At = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^{2l+1}}{(2l+1)!} t^{2l+1},$$

$$\cos At = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{A^{2l}}{(2l)!} t^{2l}, \quad \cosh At = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^{2l}}{(2l)!} t^{2l},$$

и их различные обобщения, например такое

$$\mathcal{E}_k(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{A^{l-1}}{(kl-1)!} t^{kl-1}.$$

Литература

1. *Агранович, М. С.* Обобщенные функции / М. С. Агранович. — М.: МЦНМО, 2008. — 128 с.

2. *Антосик, П.* Теория обобщенных функций. Секвенциальный подход / П. Антосик, Я. Микусинский, Р. Сикорский. — М.: Мир, 1976. — 312 с.

3. *Вайнберг, М. М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. — М.: Наука, 1969. — 528 с.

4. *Владимиров, В. С.* Обобщенные функции в математической физике / В. С. Владимиров. — М.: Наука, 1979. — 320 с.

5. *Владимиров, В. С.* Сборник задач по уравнениям математической физики / В. С. Владимиров, В. П. Михайлов, А. А. Вашарин и др. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. — 288 с.

6. *Владимиров, В. С.* Уравнения математической физики / В. С. Владимиров. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 400 с.

7. *Гельфанд, И. М.* Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М.: Физматгиз, 1959. — 470 с.

8. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1990. — 624 с.

9. *Евграфов, М. А.* Аналитические функции / М. А. Евграфов. — М. : Наука, 1991. — 448 с.

10. *Кеч, В.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике / В. Кеч, П. Теодореску. — М. : Мир, 1978. — 518 с.

11. *Кириллов, А. А.* Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. — М. : Наука, 1988. — 400 с.

12. *Колмогоров, А. Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 544 с.

13. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Высш. шк., 1981. — Т. 1. — 687 с.

14. *Кудрявцев, Л. Д.* Курс математического анализа : в 2 т. / Л. Д. Кудрявцев. — М. : Высш. шк., 1981. — Т. 2. — 584 с.

15. *Треногин, В. А.* Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. — 488 с.

16. *Шварц, Л.* Математические методы для физических наук / Л. Шварц. — М. : Мир, 1965. — 412 с.

17. *Шилов, Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Изд-во МГУ, 1984. — 208 с.

Учебное издание

Фалалеев Михаил Валентинович

ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Учебно-методическое пособие
ISBN 978-5-9624-0503-2

Редактор Г. А. Никифорова
Компьютерный набор и верстка М. В. Фалалеев

ЛР № 020592 от 09.07.92. Темплан 2011 г. Поз. 35.
Подписано к печати 11.04.2011. Формат 60 × 90 1/16. Бумага писчая.
Печать офсетная. Тираж 150 экз. Усл. печ. л. 6,3. Уч.-изд. л. 6,0. Заказ 50.

Издательство
Иркутского государственного университета,
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36

Макет учебного пособия подготовлен при помощи системы LaTeX в РИО ИДСТУ СО РАН Н. В. Починской, рисунки разработаны Н. В. Деренко при помощи программы TexDraw А. С. Яшина