УДК 517.956+517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНЫХ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ.I

Г.А.Рудых

1. Введение. Настоящая работа является первой частью развернутого варианта кратких сообщений [1,2], примыкает к публикациям [3-17] и посвящена конструктивному построению точных неавтомодельных, анизотропных по пространственным переменным, явных неотрицательных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), u = u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{1.1}$$

и исследованию их качественных свойств, где $\Omega \subset \Re^n$ - область; $\Re^+ = (0, \infty)$; $u(\mathbf{x}, t) \geq 0$- температура среды; $\lambda \in \Re \backslash \{0\}$. Уравнение (1.1) возникает во многих задачах математической физики и, в частности, при $\lambda \in \Re^+$, принадлежит классу, так называемых, неявно вырождающихся параболических уравнений [18, 19]. Последнее означает, что при $u(\mathbf{x}, t) = 0$ исследуемое уравнение из нелинейного дифференциального уравнения с частными производными второго порядка вырождается в нелинейное эволюционное уравнение первого порядка типа Гамильтона-Якоби. С вырождением уравнения (1.1) связаны некоторые особые свойства решений последнего, например, конечность скорости распространения носителей решений [19]. В свою очередь, с конечностью скорости распространения носителей решений уравнения (1.1), при $\lambda \in \Re^+$, связаны многие другие типичные свойства [18, 19]: наличие, режимов с обострением (отсутствие глобальных по времени решений), эффектов локализации режимов с обострением, инерции (конечной или бесконечной временной задержки) начала рапространения носителя решения и т.д. С другой стороны, для уравнения (1.1), при $\lambda \in \Re^-$, типичным является свойство обращения в нуль за конечное время его неотрицательного решения (см. [19] и имеющиеся там ссылки).

Ниже предлагается и исследуется нетривиальная конструкция точного неотрицательного решения уравнения (1.1) в виде "конечной суммы" [9], которое в зависимости от параметра нелинейной среды $\lambda \in \Re\backslash\{0\}$, описывает различные процессы распространения тепла и диффузии. В итоге, после подстановки предъявленной конструкции в уравнение (1.1), приходим к исследованию конечномерной переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций) системы алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ). Известно [20], что переопределенные системы уравнений могут вообще не иметь решений. Доказано, что полученная система АДУ имеет решения, отличные от тривиального. На основе этого, показано, что введенная конструкция позволяет получить (а с использованием результатов качественного исследования решений задачи Коши (3.10), изложенных в заключительной части раздела 3) и проанализировать точные неотрицательные решения как класса уравнений пористой среды (нютоновской нестационарной фильтрации), когда $\lambda \in \Re^+$, так и класса уравнений быстрой диффузии, когда $\lambda \in \Re^-$. В частности, в последний класс укладывается уравнение

$$u_t = \Delta \ln u, \ u = u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{1.2}$$

двумерный аналог которого, является особым с точки зрения групповой теории, так как в этом случае группа Ли допустимых преобразований бесконечномерна [3, 21-23]. При $n = 2$ принято говорить, что (1.2) - предельное уравнение быстрой диффузии, которому в этой работе будет уделено особое внимание. Помимо этого, согласно общепринятой терминологии, уравнение (1.2) является предельной формой уравнения быстрой диффузии. Наконец, отметим, что полученные во второй (заключительной) части этой работы, точные неотрицательные решения, отмеченных выше уравнений не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли-Беклунда [21, 22].

Представим уравнение (1.1) в виде переопределенной [20] относительно $u(\mathbf{x}, t)$ системы

$$u_t + \nabla \cdot (u\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)) = 0, \tag{1.3}$$

$$\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = -u^{\lambda-1}\nabla u, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \in \Re^n$- достаточно гладкая по $\mathbf{x}, t$ вектор-функция. Соотношение (1.3) при заданной вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ является уравнением Лиувилля [24] относительно температуры $u(\mathbf{x},t)$ для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x},t), \;\; \dot{\mathbf{x}} = \frac{d}{dt}\mathbf{x}, \;\; \mathbf{x} \in \Re^n. \tag{1.5}$$

Так как переопределенная система уравнений (1.3), (1.4) может вообще не иметь решений, то для установления факта существования ее решений и степени их произвола необходимо провести анализ совместности [20] последней. В связи с этим, следующий результат, основанный на теореме о потенциальных операторах [25, 26], является ключевым в дальнейших наших исследованиях.

Утверждение 1._Пусть компоненты вектор-функции $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ связаны условиями_

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j(\mathbf{x},t) = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i(\mathbf{x},t), i \neq j, \tag{1.6}$$

тогда функция

$$u(\mathbf{x},t) = [\lambda F(\mathbf{x},t)]_+^{1/\lambda}, \tag{1.7}$$

$$F(\mathbf{x},t) = -\int_0^1 (\mathbf{f}(\tau\mathbf{x},t),\mathbf{x})d\tau, \tag{1.8}$$

определяемая из соотношения (1.4) и удовлетворяющая уравнению Лиувилля (1.3) является точным неотрицательным решением уравнения нелинейной диффузии (1.1). Помимо этого, для того, чтобы переопределенная относительно $u(\mathbf{x},t)$ система (1.3), (1.4) была совместной

(**1**) _достаточно, чтобы скалярная функция $F(\mathbf{x},t)$ удовлетворяла уравнению_

$$F_t = \lambda F \Delta F + |\nabla F|^2, \tag{1.9}$$

(**2**) _необходимо и достаточно, чтобы вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ удовлетворяла уравнению_

$$\mathbf{f}_t = \nabla \left[-\lambda \int_0^1 (\mathbf{f}(\tau\mathbf{x},t),\mathbf{x})d\tau \nabla\cdot\mathbf{f} - |\mathbf{f}|^2 \right], \tag{1.10}$$

где $[\cdot]_+ = max\{[\cdot],0\}$; $(\cdot,\cdot)$ - скалярное произведение в $\Re^n$; $\lambda \in \Re$; $\lambda \neq 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим [25], что для потенциальности векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) \in \Re^n$, определяемого формулой $\mathbf{f}(\mathbf{x},t) = \nabla U(\mathbf{x},t)$, необходимо и достаточно, чтобы его компоненты удовлетворяли соотношениям (1.6). При этом соответствующий потенциал $U(\mathbf{x},t)$ определяется, согласно теореме о потенциальных операторах, по формуле [26]

$$U(\mathbf{x},t) = \int_0^1 (\mathbf{f}(\tau\mathbf{x},t),\mathbf{x})d\tau + C, \quad C \in \Re.$$

Итак, из соотношения (1.4) следует справедливость формулы (1.7), в которой функция $F(\mathbf{x},t)$ определяется согласно (1.8). Подставляя функцию (1.7) в уравнение Лиувилля (1.3) приходим к нелинейному эволюционному уравнению типа нелинейной диффузии (1.9). Причем, из (1.4), (1.7) имеем

$$\nabla F(\mathbf{x},t) = -\mathbf{f}(\mathbf{x},t). \tag{1.11}$$

Тем самым, из (1.11) следует, что потенциал $F(\mathbf{x},t)$ определяется формулой (1.8). Помимо этого, система ОДУ (1.5) принимает вид градиентной динамической системы $\dot{\mathbf{x}} = -\nabla F(\mathbf{x},t)$, которая [27], вообще говоря, не поддается явному интегрированию. Покажем, что уравнение (1.9) является достаточным условием совместности $\nabla\frac{\partial}{\partial t}u = \frac{\partial}{\partial t}\nabla u$ переопределенной относительно $u(\mathbf{x},t)$ системы

$$u_t = \left[\Delta F + u^{-\lambda}|\nabla F|^2\right]u,\ \nabla u = u^{1-\lambda}\nabla F, \tag{1.12}$$

получаемой из (1.3), (1.4) с учетом (1.11). Действительно, расписывая условие совместности системы (1.12) и учитывая, что $u(\mathbf{x},t) \neq 0$, получим

$$\nabla\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{\partial}{\partial t}\nabla u = -u^{1-\lambda}\nabla\left[F_t - \lambda F\Delta F - |\nabla F|^2\right].$$

С другой стороны, система (1.12) в силу зависимости (1.11) представима в виде

$$u_t = \left[u^{-\lambda}|\mathbf{f}|^2 - \nabla\cdot\mathbf{f}\right]u,\ \nabla u = -u^{1-\lambda}\mathbf{f}. \tag{1.13}$$

Расписывая условие совместности системы (1.13) и исключая из рассмотрения тривиальное решение $u(\mathbf{x},t) = 0$ имеем

$$\nabla\frac{\partial}{\partial t}u - \frac{\partial}{\partial t}\nabla u = u^{1-\lambda}\left(\mathbf{f}_t - \nabla\left[-\lambda\int_0^1(\mathbf{f}(\tau\mathbf{x},t),\mathbf{x})d\tau\nabla\cdot\mathbf{f} - |\mathbf{f}|^2\right]\right).$$

Итак, если система (1.13) является совместной, тогда вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \in \Re^n$ удовлетворяет уравнению (1.10), и наоборот, если $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет уравнению (1.10), тогда система (1.13) является совместной. При этом соотношения (1.12) и (1.13) являются преобразованиями Беклунда [28, гл.4, §4f], связывающими соответственно решения $u(\mathbf{x}, t), F(\mathbf{x}, t)$ и $u(\mathbf{x}, t), \mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ уравнений (1.1), (1.9) и (1.1), (1.10). Легко проверить, что функция (1.7) является решением уравнения (1.1). В самом деле, подставляя (1.7) в (1.1) и используя формулы (1.8)-(1.11) нетрудно убедиться, что уравнение (1.1) выполняется тождественно. Далее, из формул (1.8), (1.11) следует справедливость представления

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \nabla \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} (\mathbf{f}(\tau \mathbf{x}, \mathbf{t}), \mathbf{x}) \mathbf{d}\tau. \tag{1.14}$$

Наконец, учитывая (1.14) несложно показать справедливость цепочки равенств

$$\mathbf{f}_t - \nabla \left[-\lambda \int_0^1 (\mathbf{f}(\tau \mathbf{x}, t), \mathbf{x}) d\tau \nabla \cdot \mathbf{f} - |\mathbf{f}|^2 \right] =$$

$$= \mathbf{f}_t + \lambda \mathbf{f} \nabla \cdot \mathbf{f} + \lambda \nabla (\nabla \cdot \mathbf{f}) \int_0^1 (\mathbf{f}(\tau \mathbf{x}, t), \mathbf{x}) d\tau + \nabla |\mathbf{f}|^2 =$$

$$= -\nabla \left[F_t - \lambda F \Delta F - |\nabla F|^2 \right].$$

Тем самым, если $F(\mathbf{x}, t)-$ решение уравнения (1.9), то функция $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = -\nabla F(\mathbf{x}, t)$ является решением уравнения (1.10). Утверждение доказано.

Следствие 1. Пусть компоненты векторного поля $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ помимо (1.6) удовлетворяют соотношению

$$\nabla \cdot \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} f_i(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Тогда функция $u(\mathbf{x}, t)$, вида (1.7), (1.8), определяемая из (1.4) и удовлетворяющая уравнению Лиувилля (1.3), является соответственно неотрицательным решением нелинейного эллиптического уравнения и нелинейных эволюционных уравнений типа Гамильтона-Якоби и теплопроводности

$$\Delta u = \frac{\alpha}{u} |\nabla u|^2, u_t = u^{\lambda - 1} |\nabla u|^2, u_t = \frac{u^\lambda}{\alpha} \Delta u,$$

причем

$$F_t = |\nabla F|^2, \mathbf{f}_t = -\nabla |\mathbf{f}|^2, \mathbf{f}_t + \nabla |\mathbf{f}|^2 = -\nabla [F_t - |\nabla F|^2].$$

Кроме того, уравнение Гамильтона-Якоби на функцию $F(\mathbf{x},t)$ (уравнение волны Римана на функцию $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$) является достаточным (необходимым и достаточным) условием совместности переопределенной относительно $u(\mathbf{x},t)$ системы (1.3), (1.4), где $\Delta\cdot=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\cdot$; $|\nabla\cdot|^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\cdot\right)^2$; F- гармоническая функция; $\alpha=1-\lambda\neq 0$.

2. Конечномерная разрешающая система для многомерного уравнения нелинейной диффузии. Введем в рассмотрение функции

$$Z_k(\mathbf{x},t)=\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_k(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_k(t))+C_k(t), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x}\in\Re^n$; $A_k(t)=[a_{kij}(t)]$-матрицы $n\times n$; $\mathbf{B}_k(t)=(b_{k1}(t),...,b_{kn}(t))'$-вектор-столбцы;$C_k(t)$- скалярные функции; $a_{kij}(t),b_{ki}(t),C_k(t)\in C^1(\overline{\Re}^+)$- вещественные функции; $k=1,2;i,j=1,2,...,n$; $(\cdot,\cdot)$- скалярное произведение в $\Re^n$. Пусть, в утверждении 1, вектор-функция $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$ имеет вид $\mathbf{f}(\mathbf{x},t)=-pZ_1^{p-1}(\mathbf{x},t)\nabla Z_1(\mathbf{x},t)-qZ_2^{q-1}(\mathbf{x},t)\nabla Z_2(\mathbf{x},t)$, то есть $F(\mathbf{x},t)=Z_1^p(\mathbf{x},t)+Z_2^q(\mathbf{x},t)$, тогда формула (1.7) приводит к зависимости

$$u(\mathbf{x},t)=[\lambda[Z_1(\mathbf{x},t)]_+^p+\lambda[Z_2(\mathbf{x},t)]_+^q]_+^{1/\lambda}, \tag{2.2}$$

а уравнение (1.9) - к справедливости выражения

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_1^p+\frac{\partial}{\partial t}Z_2^q=\left(\lambda Z_1^p\Delta Z_1^p+|\nabla Z_1^p|^2\right)+\left\{\lambda Z_2^q\Delta Z_2^q+|\nabla Z_2^q|^2\right\}+$$
$$+\left[\lambda Z_2^q\Delta Z_1^p+\lambda Z_1^p\Delta Z_2^q+2\left(\nabla Z_1^p,\nabla Z_2^q\right)\right],$$

где $\lambda,p,q\in\Re;\lambda\neq 0;[\cdot]_+=\max\{[\cdot],0\}$. Итак, приходим к соотношению

$$pZ_1^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_1+qZ_2^{q-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_2=$$
$$=\left(\lambda pZ_1^{2p-1}\Delta Z_1+p[p(\lambda+1)-\lambda]Z_1^{2p-2}|\nabla Z_1|^2\right)+$$
$$+\left\{\lambda qZ_2^{2q-1}\Delta Z_2+q[q(\lambda+1)-\lambda]Z_2^{2q-2}|\nabla Z_2|^2\right\}+ \tag{2.3}$$
$$+[\lambda pZ_1^{p-1}Z_2^q\Delta Z_1+\lambda p(p-1)Z_1^{p-2}Z_2^q|\nabla Z_1|^2+$$
$$+\lambda qZ_1^pZ_2^{q-1}\Delta Z_2+\lambda q(q-1)Z_1^pZ_2^{q-2}|\nabla Z_2|^2+$$

$$+2pqZ_1^{p-1}Z_2^{q-1}(\nabla Z_1, \nabla Z_2)].$$

Для разделения выражения (2.3) относительно функций Z_1, Z_2, определяемых формулой (2.1), воспользуемся следующим рассуждением, основанным на порядке однородности [29, приложение к гл.3] каждого из слагаемых уравнения (2.3). Предварительно отметим, что $\Delta Z_k(\mathbf{x}, t) = trA_k(t)$ и введем в рассмотрение скалярные функции $Z_3 = |\nabla Z_1|^2, Z_4 = |\nabla Z_2|^2, Z_5 = (\nabla Z_1, \nabla Z_2)$. Тогда нетрудно убедиться, что функции $Z_k(\mathbf{x}, t), (k = 1, 2, \ldots, 5)$, входящие в соотношение (2.3) имеют одинаковую структуру. Действительно, каждая из них состоит из трех слагаемых: квадратичной $\sum\limits_{i,j=1}^{n} r_{ij}(t)x_i x_j$, линейной $\sum\limits_{i}^{n} s_i(t)x_i$ форм и скалярной функции $h(t)$. Рассмотрим порядок однородности каждого из слагаемых уравнения (2.3). Итак, имеем: первое слагаемое в левой части уравнения (2.3) имеет порядок однородности p, второе - q, каждое из слагаемых, стоящих в круглых скобках - $(2p-1)$, в фигурных скобках - $(2q-1)$, и, наконец, в квадратных скобках - $(p+q-1)$. Исследуя полученные порядки однородностей легко видеть, что функции Z_1, Z_2 входящие в выражение (2.3) разделяются, например, при $q = 1$. В этом случае формула (2.2) принимает вид

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\lambda[Z_1(\mathbf{x}, t)]_+^p + \lambda Z_2(\mathbf{x}, t)\right]_+^{1/\lambda}, \tag{2.4}$$

а соотношение (2.3) запишется

$$\begin{gathered} pZ_1^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_1 + \frac{\partial}{\partial t}Z_2 = \left(\lambda pZ_1^{2p-1}\Delta Z_1 + p[p(\lambda+1)-\lambda]Z_1^{2p-2}|\nabla Z_1|^2\right) + \\ + \left\{\lambda Z_2\Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2\right\} + [\lambda pZ_1^{p-1}Z_2\Delta Z_1 + \lambda p(p-1)Z_1^{p-2}Z_2|\nabla Z_1|^2 + \\ + \lambda Z_1^p\Delta Z_2 + 2pZ_1^{p-1}(\nabla Z_1, \nabla Z_2)]. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Тем самым, приравнивая в (2.5) слагаемые с одинаковыми порядками однородности приходим к системе трех уравнений на функции Z_1, Z_2. Итак, имеет место

Теорема 1. *Многомерное уравнение нелинейной диффузии (1.1) имеет точное неотрицательное решение вида*

$$u(\mathbf{x}, t) = \Big[\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)]_+^p + \tag{2.6}$$

$$+\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)]\Big]_+^{1/\lambda},$$

если матрицы $A_k(t)$ *с элементами* $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$, *вектор-столбцы* $\mathbf{B}_k(t)$ *с компонентами* $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ *и скалярные функции* $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+), k = 1, 2, \ldots, n$ *связаны соотношениями*

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_2 = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2,$$

$$pZ_1 \frac{\partial}{\partial t}Z_1 = p\lambda Z_1 Z_2 \Delta Z_1 + \lambda Z_1^2 \Delta Z_2 + \tag{2.7}$$

$$+\lambda p(p-1)Z_2|\nabla Z_1|^2 + 2pZ_1(\nabla Z_1, \nabla Z_2),$$

$$\lambda Z_1 \Delta Z_1 + [p(\lambda+1) - \lambda]|\nabla Z_1|^2 = 0,$$

где Z_1, Z_2*- функции, определяемые согласно (2.1);* $\lambda, p \in \Re; \lambda \neq 0$.

Соотношения (2.7) будем называть разрешающей системой для уравнения нелинейной диффузии (1.1). Причем, с учетом введенных выше функций Z_3, Z_4, Z_5 первое и третье уравнения разрешающей системы (2.7) имеют порядок однородности один, а второе - два.

Наконец, отметим, что уравнения, подобные (2.3) все слагаемые которых имеют один порядок однородности возникают и расщепляются методом Хироты [30], являющимся эффективным инструментом построения точных решений одномерных нелинейных эволюционных уравнений. В частности, в работе [29, приложение к гл.3], этим методом с небольшими модификациями и с использованием Паде-апроксимации, построены точные одно и двухфазные решения широкого класса одномерных полулинейных параболических уравнений, к которым неприменимы хорошо известные общие методы интегрирования нелинейных уравнений такие, как алгеброгеометрический метод и метод обратной задачи рассеяния.

3. Редукция разрешающей системы к переопределенной системе алгебро-дифференциальных уравнений (существование решения,

частный случай). В общем случае, исследование разрешающей системы уравнений (2.7) сопряжено с большими трудностями. Поэтому рассмотрим частный случай, когда (2.7) сводится к конечномерной переопределенной (число уравнений больше числа искомых функций) системе алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ), разрешимой при определенных предположениях.

Итак, пусть $\xi = p(\lambda+1)-\lambda,\ \xi \neq 0$, тогда разрешающая система уравнений (2.7) запишется

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_2 = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_1 = \sigma Z_2 \Delta Z_1 + \tau Z_1 \Delta Z_2 + 2(\nabla Z_1, \nabla Z_2), \tag{3.2}$$

$$\lambda Z_1 \Delta Z_1 + \xi |\nabla Z_1|^2 = 0, \tag{3.3}$$

где $\sigma = p\lambda/\xi; \tau = \lambda/p; p, \lambda \in \Re; \lambda \neq 0; p \neq 0$.

Теорема 2. *Пусть $A_k(t)$-симметричные матрицы с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$, $\mathbf{B}_k(t)$- вектор-столбцы с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ и $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$- скалярные функции. Тогда для того, чтобы функции Z_1, Z_2, определяемые соотношением (2.1) удовлетворяли разрешающей системе (3.1)-(3.3) необходимо и достаточно, чтобы $A_k(t), \mathbf{B}_k(t), C_k(t)$ удовлетворяли системе АДУ*

$$\dot{A}_2 = 2A_2^2 + \lambda(trA_2)A_2, \tag{3.4.1}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_2 = 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(trA_2)\mathbf{B}_2, \tag{3.4.2}$$

$$\dot{C}_2 = |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(trA_2)C_2, \tag{3.4.3}$$

$$\dot{A}_1 = 4A_1A_2 + \tau(trA_2)A_1 + \sigma(trA_1)A_2, \tag{3.4.4}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_1 = 2(A_1\mathbf{B}_2 + A_2\mathbf{B}_1) + \tau(trA_2)\mathbf{B}_1 + \sigma(trA_1)\mathbf{B}_2, \tag{3.4.5}$$

$$\dot{C}_1 = 2(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) + \tau(trA_2)C_1 + \sigma(trA_1)C_2, \tag{3.4.6}$$

$$\lambda(trA_1)A_1 + 2\xi A_1^2 = 0, \tag{3.4.7}$$

$$\lambda(trA_1)\mathbf{B}_1 + 2\xi A_1\mathbf{B}_1 = 0, \tag{3.4.8}$$

$$\lambda(trA_1)C_1 + \xi|\mathbf{B}_1|^2 = 0, \tag{3.4.9}$$

где $\sigma = p\lambda/\xi; \tau = \lambda/p; p, \lambda \in \Re; \lambda \neq 0; p \neq 0; \xi = p(\lambda+1) - \lambda; \xi \neq 0; trA_k = \sum_{i=1}^{n} a_{kii}(t)$ *- след матрицы* $_k(t); k = 1, 2.$

Доказательство. Пусть функции Z_1, Z_2 определяемые согласно (2.1) удовлетворяют разрешающей системе (3.1)-(3.3). Тогда в силу симметричности матриц $_k(t)$ имеем

$$|\nabla Z_k|^2 = (\mathbf{x}, A_k^2\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, A_k\mathbf{B}_k) + |\mathbf{B}_k|^2, \tag{3.5}$$

$$(\nabla Z_1, \nabla Z_2) = (\mathbf{x}, A_1A_2\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, A_1\mathbf{B}_2 + A_2\mathbf{B}_1) + (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2),$$

причем

$$\nabla Z_k = A_k\mathbf{x} + \mathbf{B}_k, \Delta Z_k = \nabla\cdot(\nabla Z_k) = trA_k, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_k = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}, \dot{A}_k\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{B}}_k\right) + \dot{C}_k; \mathbf{x}\in\Re^n; k = 1, 2. \tag{3.7}$$

Легко видеть, что с учетом соотношений (3.5)-(3.7) из (3.1)-(3.3) следует система АДУ (3.4).

Покажем, что из уравнений (3.4.1)-(3.4.3) системы АДУ (3.4) следует справедливость соотношения (3.1). В самом деле, пусть $k = 2$, тогда исходя из (3.7) и принимая во внимание формулы (3.5)-(3.7) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_2 = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}, [2A_2^2 + \lambda(trA_2)A_2]\mathbf{x}\right) + (\mathbf{x}, 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(trA_2)\mathbf{B}_2) +$$

$$+|\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(trA_2)C_2 = \lambda(trA_2)\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2) + C_2\right] +$$

$$+\left[(\mathbf{x}, A_2^2\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, A_2\mathbf{B}_2) + |\mathbf{B}_2|^2\right] = \lambda Z_2\Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2.$$

Аналогично доказывается, что из уравнений (3.4.4)-(3.4.6) системы АДУ (3.4) следует соотношение (3.2), а из (3.4.7)-(3.4.9)- представление (3.3). Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 приводят к следующему результату

Утверждение 2. *Если симметричные матрицы* $A_k(t)$ *с элементами* $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$, *вектор-столбцы* $\mathbf{B}_k(t)$ *с компонентами* $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ *и скалярные функции* $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ *удовлетворяют переопределенной системе уравнений (3.4), тогда функция (2.6) является точным неотрицательным решением многомерного уравнения нелинейной диффузии (1.1).*

Покажем, что даже в частном случае конструкция решения (2.4) уравнения (1.1) приводит к содержательному, как нам представляется, результату.

Итак, рассмотрим решение $u(\mathbf{x},t) \neq 0$ уравнения (1.1) вида (2.4) при $Z_1(\mathbf{x},t) \equiv 0$, то есть

$$u(\mathbf{x},t) = \left[\lambda[\frac{1}{2}\,(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)]\right]_+^{1/\lambda}. \tag{3.8}$$

В этом случае в системе АДУ (3.4) $A_1(t) \equiv 0, \mathbf{B}_1(t) \equiv 0, C_1(t) \equiv 0$ и она сводится к системе ОДУ

$$\dot{A}_2 = 2A_2^2 + \lambda(trA_2)A_2, \dot{\mathbf{B}}_2 = 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(trA_2)\mathbf{B}_2, \dot{C}_2 = |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(trA_2)C_2, \tag{3.9}$$

полученной и частично исследованной в работе [31]. Предположим, что при $t = 0$ заданы вещественная симметричная матрица $A_2(0) \in M_n(\Re)$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\Re)$ и скаляр $C_2(0) \in \Re$, где $M_n(\Re)$- множество $n \times n$ матриц с элементами из $\Re$; $M_{n,k}(\Re)$- множество $n \times k$ матриц с элементами из $\Re$ [32].Представим матрицу $A_2(0)$ в виде $A_2(0) = SD(0)S'$, где $S \in M_n(\Re)$- ортогональная матрица, то есть $SS' = S'S = I$; I- единичная матрица; $D(0) = diag[d_1(0), \ldots, d_n(0)]$ - диагональная матрица; $d_l(0) \in \Re$- собственные значения матрицы $A_2(0)$; $l = 1, 2, \ldots n$. Представимость любой вещественной симметричной матрицы в таком виде хорошо известна [32]. Покажем, что если функции $A_2(0), \mathbf{B}_2(0), C_2(0)$ определены, то решение задачи Коши для системы ОДУ (3.9) сводится к решению задачи Коши для некоторого скалярного нелинейного ОДУ. Более точно, справедлив один из основополагающих результатов этой работы.

Теорема 3. *Пусть заданы вещественные симметричные матрицы $A_2(0), S \in M_n(\Re)$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\Re)$ и скаляр $C_2(0) \in \Re$. Пусть, помимо этого, $z(t)$- вещественное решение задачи Коши*

$$\dot{z}(t) = \prod_{l=1}^{n} [1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}, z(0) = 0, \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t). \tag{3.10}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\dot{A}_2(t) = 2A_2^2(t) + \lambda[trA_2(t)]A_2(t),\ A_2(t)|_{t=0} = A_2(0), \tag{3.11}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t) = 2A_2(t)\mathbf{B}_2(t) + \lambda[trA_2(t)]\mathbf{B}_2(t),\ \mathbf{B}_2(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_2(0), \tag{3.12}$$

$$\dot{C}_2(t) = |\mathbf{B}_2(t)|^2 + \lambda[trA_2(t)]C_2(t),\ C_2(t)|_{t=0} = C_2(0), \tag{3.13}$$

существует и имеет вид

$$A_2(t) = \prod_{l=1}^{n}[1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}SQ(t)D(0)S' =$$

$$= \prod_{l=1}^{n}[1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}SQ(t)S'A_2(0) = \dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0), \tag{3.14}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \prod_{l=1}^{n}[1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) = \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), \tag{3.15}$$

$$\begin{gathered} C_2(t) = \prod_{l=1}^{n}[1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}C_2(0) + z(t)(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)) = \\ = \dot{z}(t)C_2(0) + z(t)(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)) = \\ = \dot{z}(t)[C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))]. \end{gathered} \tag{3.16}$$

Причем $A_2(t)$- вещественная симметричная матрица для всех $t \in domain A_2(t)$, где

$$Q(t) = diag\Big[[1 - 2d_1(0)z(t)]^{-1}, \ldots, [1 - 2d_n(0)z(t)]^{-1}\Big]; \tag{3.17}$$

$$A_2(0) = SD(0)S'; \lambda, d_l(0) \in \Re; \lambda \neq 0; l = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство. Пусть $A_2(t), \mathbf{B}_2(t), C_2(t)$ определяются формулами (3.14)-(3.17). Покажем, что эти функции являются решением задачи Коши (3.11)-(3.13). Для удобства записи, введем обозначение $v(t) = trA_2(t)$ и вычислим след матрицы $A_2(t)$. Исходя из (3.14) легко видеть, что справедлива цепочка равенств

$$v(t) = trA_2(t) = \dot{z}(t)tr\,(Q(t)D(0)) = \dot{z}(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)}, \tag{3.18}$$

где $Q(t)$- диагональная матрица вида (3.17). С другой стороны, так как $1 - 2d_l(0)z(t) \neq 0, (l = 1, 2, \ldots, n)$, в силу условия $z(0) = 0$, то дифференцируя (3.10) по t, получим

$$\ddot{z}(t) = \lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)}\right]\dot{z}^2(t) = \lambda v(t)\dot{z}(t), \tag{3.19}$$

причем $\dot{z}(0)=1, z(0)=0$. Кроме того, непосредственным дифференцированием матрицы (3.17) нетрудно показать, что

$$\dot{Q}(t)=2\dot{z}(t)D(0)Q^2(t)=2\dot{z}(t)Q^2(t)D(0). \tag{3.20}$$

Установим, что матрица $A_2(t)$ вида (3.14) удовлетворяет уравнению (3.11). Действительно, дифференцируя (3.14) и учитывая формулы (3.18)-(3.20) имеем

$$\dot{A}_2(t)=\ddot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0)+\dot{z}(t)S\dot{Q}(t)S'A_2(0)=$$

$$=\lambda v(t)\dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0)+2\dot{z}^2(t)SQ^2(t)D(0)S'A_2(0)=$$

$$=\lambda v(t)A_2(t)+2\dot{z}^2(t)SQ(t)D(0)S'SQ(t)S'A_2(0)=$$

$$=\lambda v(t)A_2(t)+2\dot{z}^2(t)\left(SQ(t)D(0)S'\right)\left(SQ(t)D(0)S'\right)=$$

$$=\lambda\left(trA_2(t)\right)A_2(t)+2A_2^2(t).$$

Убедимся, что вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$, определяемый согласно (3.15) является решением уравнения (3.12). Дифференцируя (3.15) и используя (3.18)-(3.20) получим

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t)=\ddot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)+\dot{z}(t)S\dot{Q}(t)S'\mathbf{B}_2(0)=$$

$$=\lambda v(t)\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)+2\dot{z}^2(t)SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)=$$

$$=\lambda v(t)\mathbf{B}_2(t)+2(\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S')\left(\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right)=$$

$$=\lambda\left(trA_2(t)\right)\mathbf{B}_2(t)+2A_2(t)\mathbf{B}_2(t).$$

Помимо этого, из (3.17) следует, что $Q(t)=\left(I-2z(t)D(0)\right)^{-1}$, то есть $\left(I-2z(t)D(0)\right)Q(t)=I$ или, что тоже самое

$$Q(t)=I+2z(t)Q(t)D(0). \tag{3.21}$$

Наконец, с учетом формул (3.18)-(3.21), нетрудно убедиться, что скалярная функция $C_2(t)$, определяемая согласно (3.16) удовлетворяет уравнению (3.13). В самом деле, дифференцируя (3.16) и принимая во внимание соотношения (3.18)-(3.21) приходим к справедливости цепочки равенств

$$\dot{C}_2(t)=\ddot{z}(t)C_2(0)+\dot{z}(t)\left(\mathbf{B}_2(0),\mathbf{B}_2(t)\right)+z(t)\left(\mathbf{B}_2(0),\dot{\mathbf{B}}_2(t)\right)=$$

$$= \lambda v(t)\dot{z}(t)C_2(0) + \dot{z}(t)\left(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)\right) + z(t)\Bigg(\mathbf{B}_2(0), 2A_2(t)\mathbf{B}_2(t) + \lambda v(t)\mathbf{B}_2(t)\Bigg) =$$

$$= \lambda v(t)\Bigg[\dot{z}(t)C_2(0) + z(t)\left(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)\right)\Bigg] + \Bigg(\mathbf{B}_2(0), [\dot{z}(t)I + 2z(t)A_2(t)]\mathbf{B}_2(t)\Bigg) =$$

$$= \lambda v(t)C_2(t) + \Bigg(\mathbf{B}_2(0), \dot{z}(t)S[I + 2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_2(t)\Bigg) =$$

$$= \lambda v(t)C_2(t) + \Bigg(\mathbf{B}_2(0), \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(t)\Bigg) =$$

$$= \lambda v(t)C_2(t) + \Bigg(\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)\Bigg) = \lambda\left(trA_2(t)\right)C_2(t) + |\mathbf{B}_2(t)|^2.$$

Окончательно, покажем, что $A_2(t)$- симметричная матрица для всех t из области ее определения. Пусть $G(t) = SQ(t)S'$, где $Q(t)$ определяется согласно (3.17). Ясно, что $G(t)$- невырожденная симметричная матрица. Тогда $A_2(t) = \dot{z}(t)G(t)A_2(0)$, где $A_2(0)$- вещественная симметричная матрица. В первую очередь, убедимся, что матрицы $A_2(0)$ и $G(t)$ коммутируют. Действительно, так как справедлива цепочка равенств

$$A_2(0)G^{-1}(t) = A_2(0)[SQ(t)S']^{-1} = A_2(0)SQ^{-1}(t)S' =$$

$$= A_2(0)S[I - 2z(t)D(0)]S' = A_2(0)[SS' - 2z(t)SD(0)S'] =$$

$$= A_2(0)[I - 2z(t)A_2(0)] = A_2(0) - 2z(t)A_2^2(0) =$$

$$= [I - 2z(t)A_2(0)]A_2(0) = G^{-1}(t)A_2(0),$$

то $G(t)A_2(0) = A_2(0)G(t)$. Кроме того, $[G(t)A_2(0)]' = A_2'(0)G'(t) = A_2(0)G(t)$, то есть $G(t)A_2(0)$ - симметричная матрица. Поэтому таковой является и матрица $A_2(t)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если ввести в рассмотрение матрицу

$$D(t) = diag[d_1(t), \ldots, d_n(t)], d_l(t) = \frac{d_l(0)}{1 - 2d_l(0)z(t)}\dot{z}(t), \tag{3.22}$$

связанную с матрицей $Q(t)$, определяемой согласно (3.17), соотношением

$$D(t) = \dot{z}(t)Q(t)D(0), D(0) = S'A_2(0)S, \tag{3.23}$$

то решение (3.14)-(3.16) задачи Коши (3.11)-(3.13) запишется

$$A_2(t) = SD(t)S', \tag{3.24}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = SD^{-1}(0)D(t)S'\mathbf{B}_2(0), \tag{3.25}$$

$$C_2(t) = \dot{z}(t)C_2(0) + z(t)\left(\mathbf{B}_2(0), SD^{-1}(0)D(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right), \tag{3.26}$$

где $d_l(t)$- вещественные собственные значения матрицы $A_2(t); l = 1, 2, \ldots, n$.

Замечание 2. Из теоремы 3 и теоремы об единственности решения [33] следует, что формулами (3.14)-(3.16) определяются все решения задачи Коши (3.11)-(3.13). В самом деле, в исследуемой задаче Коши (3.11)-(3.13) нелинейным является лишь уравнение (3.11) с вещественной симметричной начальной матрицей $A_2(0)$. Единственность решения матричного уравнения (3.11) следует из того факта, что в любом ограниченном подмножестве $\Re^{n\times n}$ правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица, и значит, применима классическая теорема единственности решения для нормальной системы ОДУ.

Из утверждения 2 и теоремы 3 следует, что справедливо

Утверждение 3. *Если симметричная матрица $A_2(t)$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ и скалярная функция $C_2(t)$ имеют соответственно вид (3.14), (3.15), (3.16), тогда уравнение нелинейной диффузии (1.1) обладает точным, неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением (3.8).*

В заключение этого раздела, в зависимости от вещественных параметров $\alpha = -\lambda/2, d_l(0)$, проведем качественный анализ решений $z(t)$ задачи Коши (3.10), предварительно переписав последнюю в виде

$$\dot{z} = \prod_{l=1}^{n}(1 - 2d_l(0)z)^{\alpha} \equiv f(z), z(0) = 0, \dot{z} = \frac{d}{dt}z(t), \tag{3.27}$$

где $t \in \overline{\Re}^+; \lambda \in \Re; \lambda \neq 0$. Итак, осуществим намеченное. В первую очередь заметим, что, без ограничения общности, можно считать, что все $d_l(0) = d_l \neq 0$. Действительно, в противном случае, можно просто уменьшить размерность $n \in N$. Далее, качественный анализ задачи Коши (3.27) разобьем на два непересекающих случая: $\alpha > 0$ и $\alpha < 0$.

Случай 1. Пусть $\alpha = -\lambda/2 > 0$. Ясно, что в этом случае точки $z_l = 1/2d_l$ являются положениями равновесия (точками покоя).

II. Предположим, что среди $z_l \in \Re$ существуют положительные точки покоя $z_l > 0$. Пусть, помимо этого, $z_k = \min\limits_{z_l \in \Re^+} z_l$, а $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$− их кратность. Тем самым, в силу зависимости $z_l = 1/2d_l$, существуют $d_l \in \Re, d_l > 0$. Сначала, предположим, что $\alpha m \geq 1$. В этом случае $f(z)$− липшицева функция в некотором интервале (c, d), где $c < 0; d > z_k$. Тогда, ясно, что $z(t)$− единственное, монотонно возрастающее ($\dot{z}(t) > 0$, для $t \geq 0$) решение задачи Коши (3.27). Причем, очевидно, что $z(t) < z_k, \lim\limits_{t\to\infty} z(t) = z_k$. Теперь предположим, что $\alpha m < 1$. Тогда $f(z)$− вещественная функция при $z \in [0, z_k)$ и $f(z)$- не вещественная функция при $z \in (z_k, d)$ с некоторым $d > z_k (d < z_l$, если такие z_l существуют). Причем $f(z) > 0$ при $z \in [0, z_k)$. Тем самым, в этом случае, решение (равновесие) $z(t) \equiv z_k$ единственно вправо [33], однако, вообще говоря, единственности влево нет. Поэтому решение $z(t)$ задачи Коши (3.27) может достигнуть z_k за конечное время $t_k (z(t)$ строго возрастает на $[0, t_k), z(t) \equiv z_k$ при $t \geq t_k)$. Отметим, что это типичная ситуация в рамках предположения: $\alpha m < 1$. В связи с этим, в общем случае, рассмотрим задачу Коши $\dot{v} = \varphi(v), v(0) = 0$, где $\varphi(z) \leq f(z)$, при $z \in [0, z_k]$, а значит $z(t) \geq v(t)$. Далее, пусть $\varphi(z) = A(1 - 2d_k z)^{\alpha m}$, где $A = \prod\limits_{l:d_l \neq d_k} c_l > 0; c_l = 1$, или $d_l < 0; c_l = 1 - 2d_l z_k$, или $d_l > 0$. Тогда, понятно, что $v(t)$ достигает z_k за конечное время t_k, а поэтому и решение $z(t)$ задачи Коши (3.27) обладает этим свойством. Ясно, что можно найти оценку времени достижения.

III. Теперь, в рамках рассмативаемого случая, предположим, что все $z_l < 0$, то есть все $d_l < 0$. Тогда решение $z(t)$ задачи Коши (3.27) единственно и строго возрастает, так как функция $f(z)$ является непрерывно дифференцируемой при $z \geq 0$. Вопрос заключается лишь в продолжимости решения $z(t)$ задачи Коши (3.27) при $t \to \infty$. Однако, заметим, что исследуемое решение $z(t)$, обязательно, является неограниченным, в силу того, что $f(z) \geq 1$ при $z \geq 0$. Вначале, предположим, что $\mu = \alpha n \leq 1$. Тогда, очевидно, что $f(z) \leq (1 + 2gz)^\mu$, где $g = \max\limits_l |d_l| > 0$. Вводя новую переменную $x = 1 + 2gz$, рассмотрим задачу

Коши $\dot{x} = 2gx^\mu, x(0) = 1$. Заметим, что при $\mu = 1$ получаем линейную задачу Коши а, следовательно, имеет место бесконечная продолжимость. Если $\mu < 1$, то решение $x(t)$ имеет вид $x(t) = [1 + 2g(1-\mu)t]^{1/(1-\mu)}$ и является бесконечно продолжимым. С другой стороны, поскольку $z(t) \leq v(t)$, где $v(t)-$ решение задачи Коши $\dot{v} = (1+2gv)^\mu, v(0) = 0$, то $v(t) = [x(t)-1]/2g$. Тем самым, решение $z(t)$ задачи Коши (3.27) бесконечно продолжимо. Теперь предположим, что $\mu = \alpha n > 1$. Тогда $f(z) \geq (1+2qz)^\mu$, где $q = \min\limits_l |d_l| > 0$, и задача Коши $\dot{v} = (1+2qv)^\mu, v(0) = 0, \mu > 1$, имеет непродолжимое решение. В самом деле, если положить $x = 1+2qv$, то задача Коши запишется $\dot{x} = 2qx^\mu, x(0) = 1, \mu > 1$. При этом $x(t) = 1/[1-2q(\mu-1)t]^{1/(\mu-1)}, x(t) \to \infty$ при $t \to 1/2q(\mu-1)$, а значит $v(t) = [x(t)-1]/2q \to \infty$ при $t \to 1/2q(\mu-1)$. Далее, так как $z(t) \geq v(t)$, то $z(t)-$ непродолжимое решение задачи Коши (3.27). Итак, исследование случая 1 завершено.

Случай 2. Пусть $\alpha = -\lambda/2 < 0, \beta = |\alpha|$. Понятно, что в этом случае $z_l = 1/2d_l$- особые точки и задача Коши (3.10) запишется

$$\dot{z} = 1/\prod_{l=1}^{n}(1-2d_l(0)z)^\beta \equiv f(z), z(0) = 0. \tag{3.28}$$

II. Пусть все $z_l < 0$, то есть все $d_l < 0$. Тогда $z(t)-$ единственное, строго возрастающее решение задачи Коши (3.28). Действительно, в этом случае, $f(z)-$ непрерывно дифференцируемая функция при $z \geq 0$ и, кроме того, $f(z) > 0$. Рассмотрим задачу Коши $\dot{v} = 1/(1+2dv)^c \equiv \varphi(v), v(0) = 0$, где $c > 0, d > 0$. Замена $x = 1+2dv$ приводит последнюю к виду $\dot{x} = 2d/x^c, x(0) = 1$. Очевидно, что ее решение $x(t) = [1+2d(c+1)t]^{1/(c+1)}$ неограниченно продолжимо, строго возрастает и неограничено. Ясно, что этими свойствами обладает и решение $v(t) = [x(t)-1]/2d$. Далее, предположим, что $\underline{d} = \min\limits_l |d_l|$. Тогда имеем $(1-2d_lz)^\beta \geq (1+2\underline{d}z)^\beta$ при $z \geq 0$, а значит $f(z) \leq 1/(1+2\underline{d}z)^{\beta n} \equiv \overline{\varphi}(z)$ при $c = \beta n$. Поэтому $z(t) \leq \overline{v}(t)$, где $\overline{v}(t)$- решение задачи Коши $\dot{v} = \overline{\varphi}(v), v(0) = 0$. Следовательно, решение $z(t)$ задачи Коши (3.28) неограниченно продолжимо. Аналогично, если положить $\overline{d} = \max\limits_l |d_l|$, то $(1-2d_lz)^\beta \leq (1+2\overline{d}z)^\beta$ при $z \geq 0$ и значит $f(z) \geq 1/(1+2\overline{d}z)^{\beta n} \equiv \underline{\varphi}(z)$ при $c = \beta n$. Тем самым, $z(t) \geq \underline{v}(t)$, где

$\underline{v}(t)-$ решение задачи Коши $\dot{v} = \underline{\varphi}(v), v(0) = 0$. Итак, решение $z(t)$ задачи Коши (3.28) неограниченно возрастает.

III. Теперь, в рамках исследуемого случая, предположим, что среди $z_l \in \Re$ существуют $z_l > 0$. Пусть $z_k = \min\limits_{z_l \in \Re^+} z_l$, а $m \in \{1, 2, \dots, n\}-$ их кратность. Тем самым, в силу зависимости $z_l = 1/2d_l$ существуют $d_l > 0$. Пусть $d = d_k = 1/2z_k$ и $p-$ число d_l таких, что $d_l > 0$, где $m \le p \le n$. Далее, рассмотрим задачу Коши $\dot{v} = 1/A(1-2dv)^c, v(0) = 0$, где $A > 0; c > 0$. Тогда $v(t) = \left[1 - \left[1 - \frac{2d(c+1)}{A}t\right]^{1/(c+1)}\right] \Big/ 2d-$ вещественное решение, определенное на отрезке $[0, \tau_k]$, пока $\frac{2d(c+1)}{A}t \le 1$, то есть $\tau_k = \frac{A}{2d(c+1)}, v(\tau_k) = \frac{1}{2d} = z_k$. Далее, для $d_i < 0$ имеем $1 - 2d_i z = 1 + 2|d_i|z \ge 1, 1 - 2d_i z \le 1 + 2|d_i|z_k$ при $z \in [0, z_k]$. Помимо этого, для $d_i > 0 (d_i \ne d)$ следует, что $1 - 2d_i z \ge 1 - 2dz, 1 - 2d_i z \le 1$. Тем самым, если $z \in [0, z_k]$, то имеют место оценки

$$f(z) \ge \frac{1}{A(1-2dz)^\eta} = \underline{\varphi}(z), f(z) \le \frac{1}{(1-2dz)^c} = \overline{\varphi}(z),$$

где $A = \prod\limits_{i:d_i<0} (1 + 2|d_i|z_k)^\beta > 0; \eta = \beta m; c = \beta p$. Пусть $\overline{v}(t)-$ решение задачи Коши $\dot{v} = \underline{\varphi}(v), v(0) = 0$. Пусть, кроме того, $\underline{v}(t)-$ решение задачи Коши $\dot{v} = \overline{\varphi}(v), v(0) = 0$. Тогда $\overline{v}(t)$ определено на отрезке $[0, t_{kr}]$, где $t_{kr} = 1/2d(c+1)$. Помимо этого, $\underline{v}(t)$ определено на отрезке $[0, t_{ks}]$, где $t_{ks} = A/2d(\eta+1)$. Очевидно, что справедлива цепочка неравенств: $\underline{v}(t) \le z(t) \le \overline{v}(t)$. В итоге, заключаем, что $z(t)-$ единственное, строго возрастающее решение задачи Коши (3.28), определенное на отрезке $[0, t_k]$, где $t_{kr} \le t_k \le t_{ks}; z(t_k) = z_k$.

Наконец, отметим, что функция $z(t)$ ведет себя аналогично функции $v(t)$. На этом завершается качественное исследование решений задач Коши (3.10), позволяющее проанализировать поведение и выявить типичные свойства точных неотрицательных решений исходного уравнения (1.1), полученных во второй части настоящей работы.

Далее, так как функции $A_2(t), \mathbf{B}_2(t), C_2(t)$ нами определены (см. формулы (3.14)-(3.16), а также (3.24)-(3.26)), то перейдем к исследованию системы ОДУ (3.4.4)-(3.4.6).

4. Разрешимость задачи Коши для матрично-векторного-скалярной системы ОДУ. Выше (см. теорему 3) мы показали разрешимость задачи Коши (3.11)-(3.13). Теперь, с учетом этого результата, наша ближайшая цель - доказать существование решений задачи Коши для системв ОДУ (3.4.4)-(3.4.6). Итак, осуществим намеченное

Теорема 4. *Пусть матрица $A_2(t)$ имеет вид*

$$A_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0), \tag{4.1}$$

$u(t) = trA_1(t), v(t) = trA_2(t); A_1(0), A_2(0) \in M_n(\Re)$ *- вещественные симметричные матрицы. Тогда задача Коши*

$$\dot{A}_1(t) = 4A_1(t)A_2(t) + \tau v(t)A_1(t) + \sigma u(t)A_2(t), A_1(t)|_{t=0} = A_1(0), \tag{4.2}$$

имеет следующее решение

$$A_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\tau/\lambda}\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{\tau}{\lambda}}u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G^2(t), \tag{4.3}$$

где $G(t) = SQ(t)S'; u(t)$*- функция, удовлетворяющая линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода*

$$u(t) = \sigma\int_0^t K(t,\eta)u(\eta)d\eta + f(t), \tag{4.4}$$

с ядром

$$K(t,\eta) = \left[\frac{\dot{z}(t)}{\dot{z}(\eta)}\right]^{\tau/\lambda}\dot{z}(\eta)tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)], \tag{4.5}$$

и свободным членом

$$f(t) = [\dot{z}(t)]^{\tau/\lambda}tr[A_1(0)G^2(t)], \tag{4.6}$$

$\tau = \lambda/p; \sigma = \lambda p/\xi; \xi = p(\lambda+1)-\lambda$. *Кроме того, для симметричности $A_1(t)$ при всех $t \in domainA_1(t)$ необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A_1(0), A_2(0)$ коммутировали*

$$A_1(0)A_2(0) = A_2(0)A_1(0). \tag{4.7}$$

Доказательство. Прежде всего, отметим, что из уравнения (3.20) в силу соотношения $A_2(0) = SD(0)S'$ и вида матрицы $Q(t)$ следует справедливость задачи Коши

$$\dot{G}(t) = 2\dot{z}(t)G^2(t)A_2(0), G(t)|_{t=0} = I. \tag{4.8}$$

Легко видеть, что $G(t)A_2(0) = A_2(0)G(t)$ и $G(t)\dot{G}(t) = \dot{G}(t)G(t)$. Наконец, напомним, что функция $z(t)$ удовлетворяет помимо (3.10) ОДУ (3.19). С учетом этого покажем, что матрица $A_1(t)$ является решением задачи Коши (4.2). В самом деле, дифференцируя (4.3), принимая во внимание формулы (4.1), (4.2), (4.8) и учитывая, что $\tau/\lambda = 1/p, p \in \Re, p \neq 0$ имеем

$$\dot{A}_1(t) = \frac{1}{p}[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}-1}\ddot{z}(t)\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G^2(t)+$$

$$+\sigma\dot{z}(t)u(t)G^{-1}(t)A_2(0)G^2(t)+$$

$$+2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G(t)\dot{G}(t) =$$

$$= \tau v(t)[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G^2(t)+$$

$$+\sigma u(t)\dot{z}(t)G(t)A_2(0)+$$

$$+4[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G^2(t) \times \dot{z}(t)G(t)A_2(0) =$$

$$= \tau v(t)A_1(t) + \sigma u(t)A_2(t) + 4A_1(t)A_2(t).$$

Теперь, исходя из (4.3) вычислим след $u(t)$ матрицы $A_1(t)$. Итак, справедлива цепочка равенств

$$u(t) = trA_1(t) = tr\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)G^2(t)d\eta+\right.$$

$$\left.+[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}A_1(0)G^2(t)\right] =$$

$$= \sigma\int_0^t \left[\frac{\dot{z}(t)}{\dot{z}(\eta)}\right]^{\frac{1}{p}}\dot{z}(\eta)tr[G^{-1}(\eta)A_2(0)G^2(t)]u(\eta)d\eta + [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}tr[A_1(0)G^2(t)] =$$

$$= \sigma\int_0^t \left[\frac{\dot{z}(t)}{\dot{z}(\eta)}\right]^{\frac{1}{p}}\dot{z}(\eta)tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)]u(\eta)d\eta + f(t) =$$

$$= \sigma\int_0^t K(t,\eta)u(\eta)d\eta + f(t).$$

Откуда следует, что функция $u(t)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом (4.6). Тем самым мы показали, что матрица $A_1(t)$ является решением задачи

Коши (4.2). Для завершения доказательства осталось установить тот факт, что соотношение (4.7) является необходимым и достаточным условием симметричности матрицы $A_1(t)$ для всех t из области определения последней.

Пусть равенство (4.7) выполняется. Отметим, что $A_2(0) = SD(0)S'$ и $G(t) = SQ(t)S'$- невырожденная симметричная матрица. Учитывая сказанное, нетрудно убедиться, что матрицы $A_1(0)$ и $G^{-1}(t)$ коммутируют. Действительно, в этом случае имеет место цепочка равенств

$$A_1(0)G^{-1}(t) = A_1(0)[SQ(t)S']^{-1} = A_1(0)SQ^{-1}(t)S' =$$

$$= A_1(0)S[I - 2z(t)D(0)]S' = A_1(0)[SS' - 2z(t)SD(0)S'] =$$

$$= A_1(0)[I - 2z(t)A_2(0)] = A_1(0) - 2z(t)A_1(0)A_2(0) =$$

$$= A_1(0) - 2z(t)A_2(0)A_1(0) = [I - 2z(t)A_2(0)]A_1(0) = G^{-1}(t)A_1(0).$$

Следовательно $A_1(0)G(t) = G(t)A_1(0), A_1(0)G^2(t) = G^2(t)A_1(0)$. Заметим, что поскольку $[A_1(0)G^2(t)]' = [G^2(t)]'[A_1(0)]' = [G'(t)]^2[A_1(0)]' = G^2(t)A_1(0) = A_1(0)G^2(t)$, то матрица $A_1(0)G^2(t)$ является симметричной. Выше мы показали справедливость соотношения $A_2(0)G(t) = G(t)A_2(0)$. Тем самым $A_2(0)G^2(t) = G^2(t)A_2(0)$. Отсюда сразу следует симметричность матрицы $A_2(0)G^2(t)$. В самом деле, имеем $[A_2(0)G^2(t)]' = [G^2(t)]'[A_2(0)]' = [G'(t)]^2[A_2(0)]' = G^2(t)A_2(0) = A_2(0)G^2(t)$. Учитывая полученные результаты и переписывая матрицу $A_1(t)$ в форме

$$A_1(t) = \sigma[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta\right]A_2(0)G^2(t) + [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}A_1(0)G^2(t), \quad (4.9)$$

легко видеть, что она симметричная для всех t из области ее определения.

Докажем обратное. Пусть матрица $A_1(t)$, определяемая формулой (4.9) является симметричной. Поскольку $A_2(0)G^2(t)$- симметричная матрица, то и матрица $A_1(0)G^2(t)$ должна быть симметричной, что эквивалентно, в силу симметричности $A_1(0), G^2(t)$ их коммутации $A_1(0)G^2(t) = G^2(t)A_1(0)$. Значит имеет место соотношение $G^{-2}(t)A_1(0) = A_1(0)G^{-2}(t)$, то есть матрицы $G^{-2}(t)$ и $A_1(0)$ коммутируют. Напомним, что $G^{-1}(t) = SQ^{-1}(t)S' = I - 2z(t)A_2(0)$. Отсюда следует, что $G^{-2}(t) = I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)$. В итоге, имеет место соотношение

$$[I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)]A_1(0) = A_1(0)[I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)].$$

Расписывая это равенство и учитывая, что $z(t) \neq 0$ получим

$$A_2(0)A_1(0) - z(t)A_2^2(0)A_1(0) = A_1(0)A_2(0) - z(t)A_1(0)A_2^2(0).$$

Поскольку $z(0) = 0$, то полагая $t = 0$, из последнего соотношения следует формула (4.7). Теорема доказана.

Покажем, что из теорем 3 и 4 следует

Теорема 5. *Пусть $A_2(t), A_1(t)$- вещественные симметричные матрицы вида (4.1), (4.3), удовлетворяющие уравнениям (3.4.1), (3.4.4) и определенные при $t = 0$, то есть $A_2(t)|_{t=0} = A_2(0) \in M_n(\Re), A_1(t)|_{t=0} = A_1(0) \in M_n(\Re)$. Тогда существуют вещественные диагональные $D(0) = diag[d_1(0), \ldots, d_n(0)], \Lambda(0) = diag[\lambda_1(0), \ldots, \lambda_n(0)]$ и ортогональная $S \in M_n(\Re)$ матрицы такие, что*

$$A_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S', \tag{4.10}$$

$$A_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}S\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta + \Lambda(0)\right]Q^2(t)S', \tag{4.11}$$

где $u(t)$- решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом

$$f(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}tr[\Lambda(0)Q^2(t)]; \tag{4.12}$$

$Q(t)$ - диагональная матрица, определяемая согласно (3.17).

Доказательство. Ясно, что вещественные, симметричные матрицы $A_2(t)$, $A_1(t)$, определяемые посредством формул (4.1), (4.3) удовлетворяют задачам Коши (3.11), (4.2). Причем матрицы $A_2(0), A_1(0)$ коммутируют, то есть выполняется соотношение (4.7). С другой стороны, при определенных предположениях две вещественные, симметричные, коммутирующие матрицы $A_2(0), A_1(0)$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду. В самом деле [32], необходимым и достаточным условием существования вещественной ортогональной матрицы S такой, что $S'A_1(0)S = \Lambda(0), S'A_2(0)S = D(0)$, является коммутация матриц $A_1(0), A_2(0)$. Отсюда имеем $A_1(0) = S\Lambda(0)S', A_2(0) = SD(0)S'$. Подставляя эти выражения в (4.1), (4.3) приходим к формулам (4.10), (4.11). Помимо этого, из (4.6) следует справедливость соотношения (4.12). Теорема доказана.

Замечание 3. Если ввести матрицу $\Lambda(t) = diag[\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)]$ с вещественными собственными значениями вида

$$\lambda_k(t) = \left[\sigma d_k(t) \int_0^t [1 - 2d_k(0)z(\eta)][\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)d\eta + \lambda_k(0)\right]\times$$

$$\times[1 - 2d_k(0)z(t)]^{-2}[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}, (k = 1, 2, \dots, n),$$

то формула (4.11) запишется

$$A_1(t) = S\Lambda(t)S', \tag{4.11$'$}$$

$$\Lambda(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma \int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta + \Lambda(0)\right]Q^2(t).$$

Теперь, поскольку функции $\mathbf{B}_2(t), A_2(t), A_1(t), v(t) = trA_2(t), u(t) = trA_1(t)$ нами определены, то покажем, что имеет место

Теорема 6. *Пусть вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ и матрицы $A_2(t), A_1(t)$ определяются соответственно формулами (3.15) и (4.10), (4.11). Пусть, кроме того, функция $v(t)$ имеет вид (3.18), а $u(t)$- решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом (4.12). Тогда задача Коши*

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = [2A_2(t) + \tau v(t)I]\mathbf{B}_1(t) + [2A_1(t) + \sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t),\ \mathbf{B}_1(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_1(0), \tag{4.13}$$

обладает следующим решением

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}} SQ(t)\left[\sigma\left(\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta\right)Q(t)S'\mathbf{B}_2(0) + \right. \tag{4.14}$$

$$\left. +2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\right].$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вектор-столбец

$$\mathbb{B}_1(t) = \sigma\left(\int_0^t [\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta) d\eta\right) Q(t) S' \mathbf{B}_2(0) + \tag{4.15}$$

$$+2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0).$$

Тогда формула (4.14) запишется

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} S Q(t) \mathbb{B}_1(t). \tag{4.16}$$

Дифференцируя (4.16) по времени, приходим к соотношению

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \frac{1}{p}[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}-1}\ddot z(t) S Q(t)\mathbb{B}_1(t) + [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left[S\dot Q(t)\mathbb{B}_1(t) + SQ(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t)\right].$$

Теперь, используя (3.19), (3.20), имеем

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = [2A_2(t) + \tau v(t) I]\mathbf{B}_1(t) + [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} S Q(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t). \tag{4.17}$$

Исходя из (4.15) вычислим $\dot{\mathbb{B}}_1(t)$. В результате получим

$$\dot{\mathbb{B}}_1(t) = \sigma[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}} u(t) S' \mathbf{B}_2(0) +$$

$$+2\sigma\left(\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta) d\eta\right)\dot z(t) Q^2(t) D(0) S'\mathbf{B}_2(0) +$$

$$+2\dot z(t) Q(t)\Lambda(0) S'\mathbf{B}_2(0) + 4z(t)\dot z(t) Q^2(t) D(0)\Lambda(0) S'\mathbf{B}_2(0).$$

Поскольку справедливо равенство (3.21), то

$$\dot{\mathbb{B}}_1(t) = \sigma[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}} u(t) S' \mathbf{B}_2(0) +$$

$$+2\sigma\left(\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta) d\eta\right)\dot z(t) Q^2(t) D(0) S'\mathbf{B}_2(0) +$$

$$+2\dot z(t) Q^2(t)\Lambda(0) S'\mathbf{B}_2(0).$$

После этого, нетрудно убедиться, что имеет место цепочка равенств

$$[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} S Q(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t) = \sigma u(t)\dot z(t) S Q(t) S'\mathbf{B}_2(0) +$$

$$+2[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} S\left(\sigma\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta) D(0) d\eta\right) Q^2(t) S' \times \dot z(t) S Q(t) S'\mathbf{B}_2(0) +$$

$$+2[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} S\Lambda(0) Q^2(t) S' \times \dot z(t) S Q(t) S'\mathbf{B}_2(0) = \sigma u(t)\dot z(t) S Q(t) S'\mathbf{B}_2(0) +$$

$$+2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}S\left[\sigma\int_0^t[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta+\Lambda(0)\right]Q^2(t)S'\times\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)=$$
$$=\sigma u(t)I\mathbf{B}_2(t)+2A_1(t)\mathbf{B}_2(t)=[2A_1(t)+\sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t).$$

Таким образом, с учетом этого соотношения уравнение (4.17) принимает вид

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t)=[2A_2(t)+\tau v(t)I]\mathbf{B}_1(t)+[2A_1(t)+\sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t).$$

Тем самым, мы показали, что функция $\mathbf{B}_1(t)$ определяемая согласно (4.14) является решением этого уравнения. Наконец, учитывая, что $z(0)=0,\dot{z}(0)=1,Q(0)=I$, легко проверить, что предъявленное решение (4.14) удовлетворяет начальному условию. Итак, функция $\mathbf{B}_1(t)$ является решением задачи Коши (4.13). Теорема доказана.

Тем самым, все подготовлено для того, чтобы перейти к исследованию разрешимости задачи Коши для ОДУ (3.4.6). Покажем, что в этом случае справедлива

Теорема 7. *Пусть вектор-столбцы $\mathbf{B}_2(t),\mathbf{B}_1(t)$ и скалярная функция $C_2(t)$ определяются согласно (3.15), (4.14) и (3.16). Пусть помимо этого функция $v(t)=trA_2(t)$ имеет вид (3.18), а $u(t)=trA_1(t)$- решение линейного уравнения Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом (4.12). Тогда задача Коши*

$$\dot{C}_1(t)=\tau v(t)C_1(t)+\sigma u(t)C_2(t)+2\left(\mathbf{B}_1(t),\mathbf{B}_2(t)\right),C_1(t)|_{t=0}=C_1(0),\qquad(4.18)$$

имеет следующее решение

$$C_1(t)=[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\Bigg[C_1(0)+2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$
$$+2z^2(t)\Big(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\Big)+\sigma\left(\int_0^t[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\times\qquad(4.19)$$
$$\times\left[C_2(0)+z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\right]-$$
$$-\sigma\left(\int_0^t z(\eta)[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\Bigg],$$

где функция $z(t)$ определяется из (3.10) и удовлетворяет соотношению (3.19).

Доказательство. Для упрощения записи формулы (4.19) уместно ввести обозначение

$$\begin{gathered}\mathbb{C}_1(t) = C_1(0) + 2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\ +2z^2(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \sigma\left(\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\times \\ \times\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\right] - \\ -\sigma\left(\int_0^t z(\eta)[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2.\end{gathered} \tag{4.20}$$

Тем самым, формула (4.19) принимает вид

$$C_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\mathbb{C}_1(t). \tag{4.21}$$

Прежде всего отметим, что $z(0) = 0, \dot{z}(t) = 1$. Таким образом, легко видеть, что предъявленная функция (4.19) удовлетворяет начальному условию $C_1(t)|_{t=0} = C_1(0)$. Дифференцируя (4.21) по времени и принимая во внимание соотношения (3.19), (4.20) имеем

$$\dot{C}_1(t) = \tau v(t)C_1(t) + [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\dot{\mathbb{C}}_1(t). \tag{4.22}$$

Теперь, исходя из (4.20), нужно вычислить $\dot{\mathbb{C}}_1(t)$. Итак, учитывая формулу (3.20) получим

$$\begin{gathered}\dot{\mathbb{C}}_1(t) = 2\dot{z}(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\ +4z(t)\dot{z}(t)\left(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\ +4z(t)\dot{z}(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\ +8z^2(t)\dot{z}(t)\left(Q^3(t)\Lambda(0)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\ +\sigma[\dot{z}(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\right] + \sigma\left(\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\times \\ \times\Bigg\{\dot{z}(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + 2z(t)\dot{z}(t)\left(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\ +\dot{z}(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2 + 4z(t)\dot{z}(t)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\Bigg\} - \\ -4\sigma\dot{z}(t)\left(\int_0^t z(\eta)[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right).\end{gathered}$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках можно упростить. В самом деле, используя (3.21), нетрудно убедиться, что имеет место соотношение

$$\dot{z}(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + 2z(t)\dot{z}(t)\left(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+\dot{z}(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2 + 4z(t)\dot{z}(t)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) =$$

$$= 2\dot{z}(t)\left(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right).$$

Таким образом, заключаем, что

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t) = 2\dot{z}(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+4z(t)\dot{z}(t)\left(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+4z(t)\dot{z}(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+8z^2(t)\dot{z}(t)\left(Q^3(t)\Lambda(0)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+\sigma[\dot{z}(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\right] +$$

$$+2\sigma\dot{z}(t)\left(\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) -$$

$$-4\sigma\dot{z}(t)\left(\int_0^t z(\eta)[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right).$$

Умножая последнее соотношение на $[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}$ и принимая во внимание формулу (3.21), несложно проверить, что справедлива цепочка равенств

$$[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\dot{\mathbb{C}}_1(t) = 2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(Q(t)[I + 2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+4z(t)[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(Q^2(t)\Lambda(0)[I + 2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+\sigma u(t)C_2(t) + 2\sigma[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) -$$

$$-4\sigma[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int_0^t z(\eta)[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) =$$

$$= \sigma u(t)C_2(t) + 2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(Q^2(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+4z(t)[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(Q^3(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+2\sigma[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)-$$

$$-4\sigma[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int_0^t z(\eta)[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)=$$

$$=\sigma u(t)C_2(t)+2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)).$$

Подставляя это выражение в формулу (4.22) приходим к ОДУ

$$\dot{C}_1(t)=\tau v(t)C_1(t)+\sigma u(t)C_2(t)+2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)).$$

Таким образом, заключаем, что скалярная функция $C_1(t)$, определяемая посредством формулы (4.19) является решением задачи Коши (4.18). Теорема доказана.

Замечание 4. Нетрудно проверить, что если вместо $u(t)$ ввести в рассмотрение функцию

$$u_0(t)=u(t)[\dot{z}(t)]^{-\frac{1}{p}}, \tag{4.23}$$

тогда $u_0(t)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_0(t)=\sigma\int_0^t K_0(t,\eta)u_0(\eta)d\eta+f_0(t), \tag{4.24}$$

с ядром

$$K_0(t,\eta)=\dot{z}(\eta)tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)], \tag{4.25}$$

и свободным членом

$$f_0(t)=tr[Q^2(t)\Lambda(0)]. \tag{4.26}$$

Итак, суммируя результаты теорем 3, 4, 6, 7, приходим к следующему ключевому результату, используемому для разрешимости системы АДУ (3.4).

Теорема 8. *Пусть заданы вещественные симметричные матрицы $A_1(0), A_2(0)\in M_n(\Re)$, обладающие свойством (4.7), вектор-столбцы $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)\in M_{n,1}(\Re)$ и скаляры $C_1(0), C_2(0)\in\Re$. Пусть $z(t)$ и $u(t)$- соответственно вещественные решения задачи Коши (3.10) и линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (4.24) с ядром (4.25) и свободным членом (4.26). Тогда существует вещественное решение матрично- векторно-скалярной задачи Коши*

(3.11)-(3.13), (4.2), (4.13), (4.18), определяемое формулами

$$A_2(t) = \dot{z}(t) S Q(t) D(0) S' = \dot{z}(t) S Q(t) S' A_2(0), \tag{4.27}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \dot{z}(t) S Q(t) S' \mathbf{B}_2(0), \tag{4.28}$$

$$C_2(t) = \dot{z}(t) \left[C_2(0) + z(t) \left(Q(t) S' \mathbf{B}_2(0), S' \mathbf{B}_2(0) \right) \right], \tag{4.29}$$

$$A_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{p}} S \left[\sigma \int_0^t \dot{z}(\eta) u_0(\eta) Q^{-1}(\eta) D(0) d\eta + \Lambda(0) \right] Q^2(t) S', \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{p}} S Q(t) \Bigg[\sigma \left(\int_0^t \dot{z}(\eta) u_0(\eta) Q^{-1}(\eta) d\eta \right) Q(t) S' \mathbf{B}_2(0) + \\ + 2 z(t) Q(t) \Lambda(0) S' \mathbf{B}_2(0) + S' \mathbf{B}_1(0) \Bigg], \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned} C_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{p}} \Bigg[C_1(0) + 2 z(t) \left(Q(t) S' \mathbf{B}_1(0), S' \mathbf{B}_2(0) \right) + \\ + 2 z^2(t) \Big(Q^2(t) \Lambda(0) S' \mathbf{B}_2(0), S' \mathbf{B}_2(0) \Big) + \\ + \sigma \left(\int_0^t \dot{z}(\eta) u_0(\eta) d\eta \right) \left[C_2(0) + z(t) \left(Q(t) S' \mathbf{B}_2(0), S' \mathbf{B}_2(0) \right) + \right. \\ \left. + z(t) |Q(t) S' \mathbf{B}_2(0)|^2 \right] - \sigma \left(\int_0^t z(\eta) \dot{z}(\eta) u_0(\eta) d\eta \right) |Q(t) S' \mathbf{B}_2(0)|^2 \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Помимо этого, $A_1(t), A_2(t)$- вещественные симметричные матрицы, соответственно, для всех $t \in domain A_1(t), t \in domain A_2(t)$, где $Q(t)$- диагональная матрица вида (3.17); $S \in M_n(\Re)$- произвольная ортогональная матрица; $\Lambda(0) = S' A_1(0) S; D(0) = S' A_2(0) S; \sigma = \lambda p / \xi; \xi = p(\lambda + 1) - \lambda; \lambda, p, \xi \in \Re \backslash \{0\}$.

Замечание 5. Методы исследования переопределенных систем АДУ и систем эволюционных уравнений, нагруженных дифференциальными связями, обсуждались соответственно в работах [34, 35]. Переопределенные системы АДУ возникают во многих прикладных исследованиях, например, при математическом моделировании процессов горения, химической кинетики с учетом диффузии и теплопроводности [36, 37] (помимо этого, см. [9]).

Во второй, заключительной, части работы будет показано, что исследование задачи Коши (3.11)-(3.13), (4.2), (4.13), (4.18), обладающей решением (4.27)-(4.32) и нагруженной алгебраическими уравнениями (3.4.7)-(3.4.9) распадается на два не пересекающихся случая: $p \neq 2$ и $p = 2$. При этом, в каждом их этих случаев, мы определим достаточные условия, при выполнении которых решение (4.27)-(4.32) задачи Коши (3.11)-(3.13), (4.2), (4.13), (4.18) удовлетворяет дополнительным условиям (3.4.7)-(3.4.9). Наконец, отметим, что настоящая работа является продолжением исследований [1,2,31,38-41].

References

[1] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии// Матем.заметки. 2000. Т.67, N2. С.250-256.

[2] Рудых Г.А. Существование точных неавтомодельных решений уравнения $u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u)$// Матем.заметки. (в печати).

[3] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности : обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры //Соврем.пробл.матем. Новешие достижения. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. Т.28. С.95-205.

[4] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

[5] Галактионов В.А., Посашков С.А. Неограниченное точное решение уравнения нелинейной теплопроводности с источником // Препринт ИПМ АН СССР N42. Москва, 1988.

[6] Галактионов В.А., Посашков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями //Журн.вычис.матем. и матем.физики.1989. Т.29, N 4. С.497-506.

[7] Галактионов В.А., Посашков С.А. Примеры несимметричного полного остывания и режимов с обострением для квазилинейных уравнений теплопроводности //Препринт. Инс-т прикл. матем. РАН N21. Москва, 1994. 24с.

[8] Галактионов В.А., Посашков С.А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии //Журн.вычис. матем. и матем.физики. 1994. Т.34, N 3. С.373-383.

[9] Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями //Дифференц.уравнения. 1995. Т.31, N 2. С.253-261.

[10] Galaktionov V.A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications //J.Differential and Integral Equations. 1990. V.3, N 5. P.863-874.

[11] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit so lution to evolution equations with quadratic nonlinearities //School of Mathematics. Univ.Bristol.1991. Report N AM-91-11, 39 p.

[12] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit so lution to evolution equations with quadratic nonlinearities //Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1995. V.125A. P.225-246.

[13] King J.R. Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations //Quart.J.Mech.Appl.Math. 1993. V. 46, N 3. P.419-436.

[14] Пухначев В.В. Преобразования взаимности радиальных уравнений нелинейной теплопроводности //Записки научных семинаров ПОМИ. 1994. Т.213. С.151-163.

[15] Пухначев В.В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии //Прикл.механика и технич.физика. 1995. Т.36, N 2. С.23-31.

[16] Bertsch M., Kersner R., Peletier L.A. Positivity versus localization in degenerate diffusion equations //Nonlinear Anal. Theory, Meth.Appl. 1985. V.9. N10. P.987-1008.

[17] Косыгина Е.Р. Об анизотропных точных решениях многомерного уравнения нестационарной фильтрации//Журн.вычис.матем. и матем. физики.1995. Т.35, N 2. С.241-259.

[18] Антонцев С.Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986.

[19] Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка //УМН. 1987. Т.42, N 2 (254). С.135-176.

[20] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.:Наука, 1978.

[21] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[22] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[23] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях //Дифференц.уравнения. 1983.Т.19, N 7.С.1215-1223.

[24] Kaplan W. Some methods for analysis of the flow in phase spase // Proc.of the symposium on nonlinear circuit analysis. New York.1953. P.99-106.

[25] Berger M.S. Nonlinearity and functional analysis (Lecture on nonlinear problems in mathematical analysis). N.Y.: Acad.Press, 1977.

[26] Вайнберг М.М. Функциональный анализ. М. Просвещение, 1979.

[27] Веселов А.П., Дынников И.А. Интегрируемые градиентные потоки и теория Морса //Алгебра и анализ. 1996. Т.8, N 3. С.78-103.

[28] Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989.

[29] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.

[30] Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов //В кн. Солитоны. Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. М.: Мир, 1983. С.175-192.

[31] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Построение точных решений многомерного квазилинейного уравнения теплопроводности //Журн. вычис. матем. и матем. физики. 1993. Т.33, N 8.С.1228-1239.

[32] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

[33] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.

[34] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. North-Holland. Elsevier. New-York. 1989.

[35] Капцов О.В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей // Матем. сборник. 1998. Т.189. N12. С.103-118.

[36] Вольперт А.И., Худяев С.И. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.

[37] Вольперт А.И., Иванова А.Н. Математические модели в химической кинетике// Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения в математической физике. М.: Наука, С. 57-102.

[38] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии //Сиб. матем.журн. 1997. Т.38, N 5.С.1130-1139.

[39] Рудых Г.А., Семенов Э.И. О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком) //Журн. вычис. матем. и матем. физики. 1998. Т.38, N 6.С.971-977.

[40] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии //Сиб. матем. журн.1998. Т.39, N 5.С.1129-1138.

[41] Рудых Г.А. Точные неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии //Докл. РАН. 1998. Т.358, N 3. С.323-324.

УДК 517.956+517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНЫХ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ.I.

Г.А.Рудых

Предлагается и исследуется нетривиальная конструкция точного неотрицательного решения многомерного уравнения нелинейной диффузии в виде "конечной суммы". После подстановки предъявленной конструкции в исходное уравнение приходим к исследованию системы алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ), которая является переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций) и, как известно, может вообще не иметь решений. Поэтому в настоящей части работы доказано существование решения задачи Коши для матрично-векторно-скалярной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), входящей в изучаемую переопределенную систему АДУ. Помимо этого, в зависимости от вещественных параметров, проведено качественное исследование решений задачи Коши для некоторого вспомогательного скалярного, нелинейного ОДУ, позволяющее проанализировать поведение точных неавтомодельных, анизотропных по пространственным переменным, явных неотрицательных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии.
Библ. 41 наименований.

Рудых Геннадий Алексеевич
Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН,
664033, г.Иркутск, ул. Лермонтова, 134
тел.раб. (395-2) 31-14-09
тел.дом. (395-2) 46-76-65
E-mail: rudykh@icc.ru.

NON SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF THE MULTIDIMENSIONAL EQUATION OF NONLINEAR DIFFUSION

Rudykh G.A.

The nontrivial construction of exact nonnegative solution of multidimensional equation of the nonlinear diffusion in the form "finite sum "is proposed and investigated. After substitution of produced construction to the initial equation we come to research of the system of algebro-differential equations (ADE) that is overdetermined (the number of equations exceeds the number of desired functions). Because the overdetermined system of equations is not solvabale, then it is proved that the obtained system of ADE posseses the other solutions than are nontrivial ones. On the basis of this result the exact non self-similar anizotropic over spatial variables explicit nonnegative solutions both of the class equations of porous medium (nonstationary filtration) and the class of equations of fast diffusion are constructed. In particular this class includes so-called limit equation of fast diffusion. Basically, obtained exact nonnegative solutions for above equations are not invariant in view of the groups of point-wise transformations and Lee-Baklund's groups.
References, 41.