УДК 517.983.51

Интегральные преобразования обобщенных функций в банаховых пространствах

М.В.Фалалеев

Аннотация

В заметке представлена методика построения фундаментальных решений сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах, использующая интегральные преобразования обобщенных функций (преобразования Лапласа и Фурье).

Объектом исследования в данной работе являются дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах. Редукцию к уравнениям такого типа допускают многочисленные начальные и краевые задачи математической физики моделирующие реальные динамические процессы: фильтрации, термоконвекции, деформации механических систем, электротехники, волновые процессы в электромагнитных анизотропных средах (волны в плазме, волны в ферромагнетиках во внешнем магнитном поле), волновые процессы в проводящих средах без дисперсии, колебания стратифицированной жидкости (модели Корпусова-Плетнера-Свешникова [8], Баренблатт-Желтова-Кочиной [9], Осколкова [10], Хоффа, Dolesal-а [11], Буссинеска [12], [13] и многие другие).

Как хорошо известно [7] такие задачи разрешимы в классе непрерывных функций не при всех начальных данных и правых частях, поэтому естественно возникает проблема построения обобщенных решений, которую в полном объеме удается разрешить с помощью конструкции фундаментальных оператор-функций соответствующих дифференциальных операторов исходных уравнений. В работах [3], [6], [4], [5] во фредгольмовском случае были построен фундаментальные оператор-функции для дифференциальных операторов 1-го, 2-го порядков, некоторых классов дифференциальных операторов N-го порядка (как обыкновенных, так и в частных производных), интегральных и интегро-дифференциальных 1-го порядка. Однако в этих работах ничего не говорилось о методике конструирования самих фундаментальных функций из-за громоздкости последней, в предлагаемой заметке предложена методика свободная от таких недостатков.

1 Распределения бесконечного порядка и обобщенные функции медленного роста в банаховых пространствах

Пусть E - банахово пространство, E^* - сопряженное банахово пространство. Отнесем к множеству *основных функций* $K(R^n;E^*)$ все финитные в R^n функции класса C^∞ со значениями в E^* и будем обозначать эти функции через $s(\bar{x})$, $\bar{x}\in R^n$. *Носителем* $supps(\bar{x})$ основной функции $s(\bar{x})$ назовем замыкание в R^n множества тех точек $\bar{x}$, для которых $s(\bar{x}) \neq 0$. Сходимость в $K(R^n; E^*)$ определяется следующим образом

Определение. Последовательность функций $s_k(\bar{x}) \in K(R^n; E^*)$ *сходится* к функции $s(\bar{x}) \in K(R^n; E^*)$, если

а) существует $R > 0$ такое, что $supp s_k(\bar{x}) \subset U_R \, \forall k \in N$, здесь U_R шар в R^n с центром в нуле и радиусом R;

б) $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ $\|D^\alpha s_k(\bar{x}) - D^\alpha s(\bar{x})\| \rightrightarrows 0$ равномерно по $\bar{x}$ при $k \to \infty$, здесь D^α мультииндекс.

Обобщенной функцией (распределением бесконечного порядка) назовем всякий линейный непрерывный функционал на основном пространстве $K(R^n; E^*)$. Всякая локально интегрируемая по Бохнеру функция $u(\bar{x})$ со значениями в E порождает по правилу

$$\Big(u(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R^n} < u(\bar{x}), s(\bar{x}) > d\bar{x}, \quad \forall\, s(\bar{x}) \in K(R^n; E^*)$$

регулярную обобщенную функцию. Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными.* Множество обобщенных функций будем обозначать $K'(R^n; E)$. Сходимость в $K'(R^n; E)$ определим как слабую.

Если $E = E^* = R^1$, то пространства $K(R^n; R^1)$ и $K'(R^n; R^1)$ следуя [2] будем обозначать через $D(R^n)$ и $D'(R^n)$ соответственно.

Из всего множества обобщенных функций $K'(R^n; E)$ выделим некоторые специальные классы. Через $K'(R^n_+; E)$ будем обозначать множество обобщенных функций, носители которых находятся в первом "октанте"пространства R^n. Таковыми будут, например, функции вида $u(\bar{x})g(\bar{x})$, где $u(\bar{x}) \in C^\infty(R^n; E)$, $g(\bar{x}) \in D'(R^n_+)$ или $u(\bar{x}) \in C^\infty(R^n_+; E)$, $g(\bar{x}) \in D'(R^n)$ действующие по правилу

$$\Big(u(\bar{x})g(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(g(\bar{x}), < u(\bar{x}), s(\bar{x}) >\Big) \quad \forall\, s(\bar{x}) \in K(R^n; E^*).$$

При $n = 1$ вместо $D'(R^1_+)$ принято [2] использовать обозначение D'_+.

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $\mathcal{K}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ сильно непрерывная оператор-функция класса C^∞, причем $\mathcal{K}^*(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ существует при почти всех $\bar{x} \in R^n$, $f(\bar{x}) \in D'(R^n)$, тогда формальный символ $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ назовем *обобщенной оператор-функцией. Сверткой* [3] обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ и обобщенной функции $v(\bar{x}) \in K'(R^n; E_1)$ назовем обобщенную функцию $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}) \in K'(R^n; E_2)$ (если она существует), действующую по формуле

$$\Big(\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y}))\Big) \quad \forall s(\bar{x}) \in K(R^n; E_2^*).$$

Поскольку функция $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$ не финитна в R^{2n}, то сформулированное определение будет корректно лишь в том случае, когда носитель "прямого произведения" обобщенных функций $f(\bar{x})$ и $v(\bar{y})$, т.е. множество $supp f(\bar{x}) \otimes supp v(\bar{y})$, пересекается с носителем $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$ по ограниченному в R^{2n} множеству. В этом случае $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$ можно заменить на финитную функцию $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, совпадающую с $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$ на пересечении $[supp f(\bar{x}) \otimes supp v(\bar{y})] \cap supp \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$, тогда значение $(f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y})))$ уже будет корректно определено и оно не зависит от выбора значений $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ вне пересечения $[supp f(\bar{x}) \otimes supp v(\bar{y})] \cap supp \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}+\bar{y})$. Приведем некоторые достаточные условия, при которых свертка заведомо существует.

Пример1. Если $n = 1$, $f(t) \in D'_+$, $v(t) \in K'(R^1_+; E_1)$, то свертка $\mathcal{K}(t)f(t) * v(t)$ существует, причем если $A \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ и существует $A^* \in \mathcal{L}(E_3^*, E_2^*)$, то справедливо свойство ассоциативности

$$A\delta^{(k)}(t) * (\mathcal{K}(t)f(t) * v(t)) = (A\delta^{(k)}(t) * \mathcal{K}(t)f(t)) * v(t),$$

где $A\delta^{(k)}(t) * \mathcal{K}(t)f(t) \stackrel{\text{def}}{=} (A\mathcal{K}(t)f(t))^{(k)}$. Эти же утверждения справедливы и в случае $n > 1$, если $f(\bar{x}) \in D'(R^n_+)$ и $v(\bar{x}) \in K'(R^n_+; E_1)$. Для замкнутого оператора A приведенное здесь равенство будем считать выполненным по определению.

Пример 2. Если одна из функций $f(\bar{x})$ или $v(\bar{x})$ финитна, то свертка $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x})$ существует.

Доказываются утверждения из этих двух примеров такими же рассуждениями, что и соответствующие теоремы в [2] см. стр. 130-141.

Пример 3. Если $v(t, \bar{x}) \in K'(R^1_+ \otimes R^n; E_1)$ (т.е. $suppv(t, \bar{x}) \subset R^1_+ \otimes R^n \equiv \{t \geq 0\}$ - полупространство в R^{n+1}), $\mathcal{K}(t, \bar{x})f(t, \bar{x}) = k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1)$, $g(t) \in D'_+$, $\bar{y}_1$ - фиксированный вектор (т.е. $supp\mathcal{K}(t, \bar{x})f(t, \bar{x}) \equiv \{t \geq 0,\ \bar{x} = \bar{y}_1\}$ - луч в R^{n+1}), то свертка $k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1) * v(t, \bar{x})$ при сделанных предположениях существует. Если $A \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ и $A^* \in \mathcal{L}(E_3^*, E_2^*)$, то справедливо свойство ассоциативности

$$A\delta^{(k)}(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_2) * \Big(k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1) * v(t, \bar{x})\Big) =$$

$$= \Big(A\delta^{(k)}(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_2) * k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1)\Big) * v(t, \bar{x}),$$

где

$$A\delta^{(k)}(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_2) * k(t)g(t) \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1) \stackrel{\text{def}}{=} (Ak(t)g(t))^{(k)} \cdot \delta(\bar{x} - \bar{y}_1 - \bar{y}_2).$$

Если $E_1,\ E_2$ - банаховы пространства, $\mathcal{K}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ та же сильно непрерывная оператор-функция класса C^∞, что и выше, то *действием оператор-функции* $\mathcal{K}(\bar{x})$ на обобщенную функцию $v(\bar{x}) \in K'(R^n; E_1)$ называется обобщенная функция $\mathcal{K}(\bar{x})v(\bar{x}) \in K'(R^n; E_2)$ действующая по формуле

$$\Big(\mathcal{K}(\bar{x})v(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(v(\bar{x}), \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x}))\Big) \quad \forall s(\bar{x}) \in K(R^n; E_2^*).$$

Если $\mathcal{K}(\bar{x}) \equiv A$, то $\forall v(\bar{x}) \in K'(R^n; E_1)$ справедливо равенство

$$AD^\alpha\delta(\bar{x}) * v(\bar{x}) = AD^\alpha v(\bar{x}),$$

действительно $\forall s(\bar{x}) \in K(R^n; E_2^*)$

$$\Big(AD^\alpha\delta(\bar{x}) * v(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) = \Big(D^\alpha\delta(\bar{x}), (v(\bar{y}), A^*s(\bar{x} + \bar{y}))\Big) =$$

$$= (-1)^{|\alpha|}\Big(\delta(\bar{x}), (v(\bar{y}), A^*D^\alpha s(\bar{x} + \bar{y}))\Big) = (-1)^{|\alpha|}\Big(v(\bar{y}), A^*D^\alpha s(\bar{y})\Big) = \Big(AD^\alpha v(\bar{y}), s(\bar{y})\Big).$$

Аналогично можно убедиться в справедливости равенства

$$\mathcal{K}(\bar{x})\delta(\bar{x}) * v(\bar{x}) = \mathcal{K}(0)v(\bar{x}),$$

а (при необходимости) получить представление и для свертки $\mathcal{K}(\bar{x})D^\alpha\delta(\bar{x}) * v(\bar{x})$.

Наряду с основным пространством $K(R^n; E^*)$ введем еще одно. Отнесем к множеству *основных функций* $S(R^n; E^*)$ все функции класса C^∞ со значениями в E^*, убывающие по норме пространства E^* при $|\bar{x}| \to +\infty$ вместе со всеми своими производными быстрее любой степени $|\bar{x}|^{-1}$. Сходимость в $S(R^n; E^*)$ определяется следующим образом

Определение. Последовательность функций $s_k(\bar{x}) \in S(R^n; E^*)$ *сходится* к функции $s(\bar{x}) \in S(R^n; E^*)$, если $\forall \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\forall \beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha_i, \beta_i \in \{0\} \cup N$ $\|\bar{x}^\beta D^\alpha s_k(\bar{x}) - \bar{x}^\beta D^\alpha s(\bar{x})\| \rightrightarrows 0$ равномерно по $\bar{x} \in R^n$ при $k \to +\infty$.

Как и пространство $K(R^n; E^*)$ пространство $S(R^n; E^*)$ линейно, $K(R^n; E^*) \subset S(R^n; E^*)$, из сходимости в $K(R^n; E^*)$ следует сходимость в $S(R^n; E^*)$, $K(R^n; E^*)$ плотно в $S(R^n; E^*)$.

Обобщенной функцией медленного роста назовем всякий линейный непрерывный функционал на основном пространстве $S(R^n; E^*)$. Множество всех обобщенных функций медленного роста будем обозначать $S'(R^n; E)$, сходимость в $S'(R^n; E)$ (как и в $K'(R^n; E)$) определим как слабую. Очевидно $S'(R^n; E) \subset K'(R^n; E)$ и из сходимости в $S'(R^n; E)$ следует сходимость в $K'(R^n; E)$.

Если $f(\bar{x}) \in D'(R^n)$ - финитна, $\mathcal{K}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ сильно непрерывная оператор-функция класса C^∞, причем $\mathcal{K}^*(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ существует при почти всех $\bar{x} \in R^n$, $v(\bar{x}) \in S'(R^n; E_1)$, то существует свертка $\mathcal{K}(\bar{x}) f(\bar{x}) * v(\bar{x}) \in S'(R^n; E_2)$, причем она представима в виде

$$\Big(\mathcal{K}(\bar{x}) f(\bar{x}) * v(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) = \Big(f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \eta(\bar{x}) \mathcal{K}^*(\bar{x}) s(\bar{x} + \bar{y}))\Big)$$

здесь $\eta(\bar{x}) \in D'(R^n)$, $\eta(\bar{x}) = 1$ в окрестности $supp f(\bar{x})$ (см. [2] стр. 152 и 157.)

2 Интегральные преобразования обобщенных функций медленного роста

Поскольку $\forall s(\bar{x}) \in S(R^n; E^*)$ числовая функция $\|s(\bar{x})\|$ интегрируема по R^n, то на $S(R^n; E^*)$ определено преобразование Фурье

$$F[s](\bar{\xi}) = \int_{R^n} s(\bar{x}) e^{i(\bar{\xi}, \bar{x})} d\bar{x},$$

преобразование Фурье F преобразует основное пространство $S(R^n; E^*)$ в себя, причем взаимнооднозначно и непрерывно. В справедливости этих утверждений можно убедиться повторив соответствующие рассуждения из [2] стр. 158-159. Но тогда на пространстве $S'(R^n; E)$ определено *преобразование Фурье* по формуле $\forall v(\bar{x}) \in S'(R^n; E)$

$$\Big(F[v(\bar{x})](\bar{\xi}), s(\bar{\xi})\Big) = \Big(v(\bar{x}), F[s(\bar{\xi})](\bar{x}).\Big)$$

Соответственно обратное преобразование Фурье задается по правилу

$$F^{-1}[v(\bar{x})] = \frac{1}{(2\pi)^n} F[v(-\bar{x})].$$

Непосредственно из определений получаем

$$F[A D^\alpha \delta(\bar{x}) * v(\bar{x})] = F[A D^\alpha v(\bar{x})] = A F[D^\alpha v(\bar{x})] = (-i\bar{\xi})^\alpha A F[v(\bar{x})];$$

$$F[a D^\alpha \delta(\bar{x})] = (-i\bar{\xi})^\alpha a, \ \forall a \in E; \ \ F[v(\bar{x} - \bar{x}_0)] = e^{i(\bar{\xi}, \bar{x}_0)} F[v(\bar{x})].$$

При $n=1$ выделим из $K'(R^1_+;E)$ совокупность обобщенных функций $v(t)$ таких, что $v(t)e^{-\sigma t}\in S'(R^1_+;E)$ $\forall\sigma>a$. По аналогии с [2] стр. 178 преобразование Фурье $F[v(t)e^{-\sigma t}](-\omega)$ назовем преобразованием Лапласа функции $v(t)\in K'(R^1_+;E)$ и обозначим

$$v(t)\leftrightarrow\mathcal{F}(p)=F[v(t)e^{-\sigma t}](-\omega),\ \ p=\sigma+i\omega.$$

Дублированием соответствующих рассуждений из [2] стр.178 можно показать, что при любом фиксированном $\sigma_0>a$ справедливо представление

$$\Big(\mathcal{F}(p),s(\omega)\Big)=\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(v(t)e^{-\sigma_0 t},\eta(t)e^{-(p-\sigma_0)t}s(\omega)\Big)d\omega,\ \ Rep>\sigma_0,$$

здесь $\eta(t)\in C^\infty,\ \eta(t)\equiv1$ при $t>-\frac{\delta}{2},\ \eta(t)\equiv0$ при $t<-\delta,\ \delta>0$ - любое. Исходя из этого представления получаем, что $\forall a_0\in E$

$$a_0\delta^{(m)}(t)\leftrightarrow a_0p^m,\ \ \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}a_0\theta(t)\leftrightarrow\frac{1}{p^m},$$

$$A\delta^{(m)}*v(t)\leftrightarrow p^mA\mathcal{F}(p),\ \ A\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\theta(t)*v(t)\leftrightarrow\frac{1}{p^m}A\mathcal{F}(p).$$

При $n=2$ из $K'(R^2_+;E)$ выделим совокупность обобщенных функций $v(x,y)$ таких, что $v(x,y)e^{-\sigma_1x-\sigma_2y}\in S'(R^2_+;E)$ $\forall\sigma_1,\sigma_2>a$, тогда преобразование Фурье $F[v(x,y)e^{-\sigma_1x-\sigma_2y}](-\omega_1,-\omega_2)$ назовем двумерным преобразованием Лапласа функции $v(x,y)\in K'(R^2_+;E)$ и обозначим

$$v(x,y)\leftrightarrow\mathcal{F}(p,q)=F[v(x,y)e^{-\sigma_1x-\sigma_2y}](-\omega_1,-\omega_2),\ \ p=\sigma_1+i\omega_1,\ q=\sigma_2+i\omega_2.$$

Как и в одномерном случае для $\mathcal{F}(p,q)$ можно получить представление

$$\Big(\mathcal{F}(p,q),s(\omega_1,\omega_2)\Big)=$$

$$=\int\int_{R^2}\Big(v(x,y)e^{-\sigma_1x-\sigma_2y},\eta_1(x)\eta_2(y)e^{-(p-\sigma_1)x-(q-\sigma_2)y}s(\omega_1,\omega_2)\Big)d\omega_1d\omega_2,$$

$$Rep>\sigma_1,Req>\sigma_2,$$

функции $\eta_1(x)$, $\eta_2(y)$ удовлетворяют тем же условиям, что и в представлении одномерного преобразования Лапласа. Соответственно $\forall a_0\in E$

$$a_0\delta^{(m)}(x)\delta^{(l)}(y)\leftrightarrow a_0p^mq^l,\ \ \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}a_0\theta(x,y)\leftrightarrow\frac{1}{p^m}\frac{1}{q^l},$$

$$A\delta^{(m)}(x)\delta^{(l)}(y)*v(x,y)\leftrightarrow p^mq^lA\mathcal{F}(p,q),$$

$$A\frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{y^{m-1}}{(m-1)!}\theta(x,y)*v(x,y)\leftrightarrow\frac{1}{p^m}\frac{1}{q^l}A\mathcal{F}(p,q).$$

3 Фундаментальные оператор-функции дифференциальных операторов с фредгольмовым оператором при старшей производной

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L}(\mathcal{D}) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} A_\alpha \mathcal{D}^\alpha = \sum_{|\alpha|=0}^{N} A_\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

где A_α - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{\cap_{|\alpha|=0}^{N} D(A_\alpha)} = E_1$, и соответствующую ему обобщенную оператор-функцию

$$\mathcal{L}(\delta(\bar{x})) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} A_\alpha \delta^{(\alpha_1)}(x_1) \cdot \ldots \cdot \delta^{(\alpha_n)}(x_n).$$

Фундаментальной оператор-функцией дифференциального опреатора $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ на классе $K'(R^n; E_2)\,(S'(R^n; E_2))$ называется такая обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}(\bar{x})$, что $\forall u(\bar{x}) \in K'(R^n; E_2)\,(S'(R^n; E_2))$ на основном пространстве $K(R^n; E_2^*)\,(S(R^n; E_2^*))$ справедливо равенство

$$\mathcal{L}(\delta(\bar{x})) * \mathcal{E}(\bar{x}) * u(\bar{x}) = u(\bar{x}).$$

Таким образом, если существует свертка $\mathcal{E}(\bar{x}) * g(\bar{x})$, то она является решением уравнения $\mathcal{L}(\delta(\bar{x})) * u(\bar{x}) = g(\bar{x})$ (в соответствующем пространстве), что в свою очередь позволяет строить обобщенные (и классические) решения дифференциального уравнения $\mathcal{L}(\mathcal{D})u(\bar{x}) = f(\bar{x})$ [2], [3].

Теорема 1. Если A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{R(B)} = R(B)$, $D(B) \subset D(A)$, $\overline{D(A)} = \overline{D(A)} = E_1$, оператор B фредгольмов, $n = \dim N(B) = \dim N(B^*)$, существуют полные жордановы наборы $\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i\}$ и $\{\psi_i^{(j)},\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, p_i\}$, тогда дифференциальный оператор $(B\delta^N(t) - A\delta(t))$ на классе $S'(R_+^1; E_2)$ (как и на классе $K'(R_+^1; E_2)$) имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t) = \Gamma \mathcal{U}_N(A\Gamma t)\Big[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle A \varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k} \langle \cdot, \psi_i^{(j)} \rangle \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(N\cdot k)}(t)\Big],$$

где Γ - оператор Шмидта для B и

$$\mathcal{U}_N(A\Gamma t) = \sum_{i=1}^{\infty} (A\Gamma)^{i-1} \frac{t^{i\cdot N-1}}{(i\cdot N-1)!}.$$

Доказательство. В соответствии с определением $\mathcal{E}_N(t)$, $\forall u(t) \in S'(R_+^1; E_2)$ справедливо равенство

$$(B\delta^N(t) - A\delta(t)) * \mathcal{E}_N(t) * u(t) = u(t)$$

на основном пространстве $S(R^1_+; E_2^*)$. Применим к этому равенству преобразование Лапласа (одномерное)

$$(p^N B - A)\mathcal{F}[\mathcal{E}_N(t) * u(t)] = \mathcal{F}[u(t)]$$

(здесь и далее аргумент p у изображений $\mathcal{F}[\mathcal{E}_N(t)*u(t)](p)$ и $\mathcal{F}[u(t)](p)$ опущен), тогда

$$\mathcal{F}[\mathcal{E}_N(t) * u(t)] = \Big(B - \frac{1}{p^N}A\Big)^{-1}\frac{1}{p^N}\mathcal{F}[u(t)].$$

Но

$$\Big(B - \frac{1}{p^N}A\Big)^{-1} = \Gamma\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(A\Gamma)^l}{p^{Nl}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{p^{2Np_i}}{p^{Np_i}-1}\cdot\sum_{j,k=1}^{p_i}\frac{1}{p^{(j+k-2)N}}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(k)},$$

и значит

$$\mathcal{F}[\mathcal{E}_N(t) * u(t)] = \Big(\Gamma\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(A\Gamma)^l}{p^{N(l+1)}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{p^{2Np_i}}{p^{Np_i}-1}\cdot\sum_{j,k=1}^{p_i}\frac{1}{p^{(j+k-1)N}}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(k)}\Big)\mathcal{F}[u(t)] =$$

$$= \Big(\Gamma\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(A\Gamma)^l}{p^{N(l+1)}} - \sum_{i=1}^{n}\Big(1+\frac{1}{p^{Np_i}}+\frac{1}{p^{2Np_i}}+\dots\Big)\sum_{j,k=1}^{p_i}\frac{p^{Np_i}}{p^{(j+k-1)N}}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(k)}\Big)\mathcal{F}[u(t)].$$

Осуществим перегруппировку слагаемых следующим образом

$$\mathcal{F}[\mathcal{E}_N(t) * u(t)] = \Big(\Gamma\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{(A\Gamma)^l}{p^{N(l+1)}}\Big[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big] -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}p^{Nk}\Big]\Big)\mathcal{F}[u(t)]$$

отсюда возвращаясь в пространство оригиналов имеем

$$\mathcal{E}_N(t) * u(t) = \Big(\Gamma\sum_{l=1}^{+\infty}\frac{(A\Gamma)^{l-1}t^{Nl-1}}{(Nl-1)!}\Big[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(Nk)}(t)\Big]\Big) * u(t)$$

что и завершает доказательство.

Теорема 1 доказана.

Замечание 1. При $N=1$ $\mathcal{U}_1(A\Gamma t) = e^{A\Gamma t}$, а при $N=2$, $\mathcal{U}_2(A\Gamma t) = \frac{\sinh(\sqrt{A\Gamma}t)}{\sqrt{A\Gamma}}$, причем здесь $\sqrt{A\Gamma}$ формальный символ.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y))$ на классе $S'(R^2_+; E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(x,y) = \Gamma\mathcal{V}_N(A\Gamma)(x,y)\Big[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(x,y) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(N\cdot k)}(x)\cdot\delta^{(N\cdot k)}(y)\Big],$$

где

$$\mathcal{V}_N(A\Gamma)(x,y)=\sum_{l=1}^{\infty}(A\Gamma)^{l-1}\frac{x^{l\cdot N-1}}{(l\cdot N-1)!}\cdot\frac{y^{l\cdot N-1}}{(l\cdot N-1)!}.$$

Доказательство. В соответствии с определением $\mathcal{E}_N(x,y)$ справедливо равенство

$$(B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y)-A\delta(x)\cdot\delta(y))*\mathcal{E}_N(x,y)*u(x,y)=u(x,y).$$

Применим к этому равенству двумерное преобразование Лапласа

$$(p^Nq^NB-A)\mathcal{F}[\mathcal{E}_N(x,y)*u(x,y)]=\mathcal{F}[u(x,y)]$$

далее осталось повторить все рассуждения проведенные при доказательстве теоремы 1, заменяя везде символ p на произведение pq.

Теорема 2 доказана.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциально-разностный оператор $(B\delta^{(N)}(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x})))$ имеет на классе $S'(R^1_+\otimes R^n;E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t,\bar{x})=\Gamma\sum_{l=1}^{\infty}(A\Gamma)^{l-1}\frac{t^{Nl-1}}{(Nl-1)!}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^l+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}(-1)^k\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(k\cdot N)}(t)\cdot\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x})\Big],$$

здесь введены обозначения

$$(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^l=\underbrace{(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))*\ldots*(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))}_{l}=\sum_{\nu=0}^{l}(-1)^{\nu}C_k^{\nu}\delta(\bar{x}-\nu\bar{\mu}),$$

$$\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{k+\nu}^{k}\delta(\bar{x}-\nu\bar{\mu}),\ \ (\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^0=\mathcal{B}_0(\bar{x})=\delta(\bar{x}).$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции справедливо равенство

$$(B\delta^{(N)}(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x})))*\mathcal{E}_N(t,\bar{x})=I\delta(t)\cdot\delta(\bar{x}).$$

Применим к этому равенству преобразование Фурье по переменной $\bar{x}$

$$(B\delta^{(N)}(t)-(e^{i(\bar{\xi},\bar{\mu})}-1)A\delta(t))\overset{t}{*}F_{\bar{x}}[\mathcal{E}_N(t,\bar{x})]=I\delta(t)\cdot 1(\bar{x}).$$

Но оператор B имеет полный αA-жорданов набор ($\alpha=e^{i(\bar{\xi},\bar{\mu})}-1$), элементы которого выражаются через элементы A-жорданова набора по формулам $\tilde{\varphi}_i^{(j)}=\alpha^{j-1}\varphi_i^{(j)}$ и $\tilde{\psi}_i^{(j)}=\frac{1}{\alpha^{p_i+1-j}}\psi_i^{(j)}$, поэтому в силу теоремы 1

$$F_{\bar{x}}[\mathcal{E}_N(t,\bar{x})]=\Gamma\sum_{l=1}^{\infty}(A\Gamma)^{l-1}\frac{t^{Nl-1}}{(Nl-1)!}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)\cdot\alpha^l+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}(-1)^k\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(N\cdot k)}(t)\cdot\Big(-\frac{1}{\alpha}\Big)^{k+1}\Big].$$

Но

$$\alpha \leftrightarrow F_{\bar{x}}[\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x})], \quad -\frac{1}{\alpha} \leftrightarrow F_{\bar{x}}[\sum_{k=0}^{\infty}\delta(\bar{x}-k\bar{\mu})], \quad \Big(-\frac{1}{\alpha}\Big)^{k+1} \leftrightarrow F_{\bar{x}}[\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x})]$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Все представленные здесь результаты допускают обобщение на случай нетеровости [1] оператора B.

Список литературы

[1] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

[3] Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // СМЖ. 2000. Т41, №5. С. 1167-1182.

[4] Falaleev M.V., Sidorov N.A. Continuous and Generalized Solutions of Singular Partial Differential Equations // Future Generation Computer Systems, 2004 (in print)

[5] Falaleev M.V., Sidorov N.A., Romanova O.A. Generalized Jordan Sets in the Theory of Singular Partial Differential-Operator Equations //Computational Science - ICCS 2003, International Conference, June 2-4, 2003, Proceedings, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg. Part 2. P.523-532.

[6] Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.

[7] Сидоров Н.А., Романова О.А. О применениии некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19, №9. С. 1516-1626

[8] Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // ЖВМиМФ. 1999. Т39, №6. С. 1006-1022; ЖВМиМФ. 2000. Т40, №8. С. 1237-1249; ЖВМиМФ. 2003. Т43, №12. С. 1835-1869.

[9] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. матем. и механ. 1960. Т.24, №5. С. 58-73.

[10] Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр.МИАН СССР. М.: 1988. Т.179. С. 126-164.

[11] Dolizal V. Dynamics of linear systems. Prague. 1967.

[12] Кожанов А.И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т.65, №1. С. 70-75.

[13] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т.49, №4. С. 47-74.