Министерство образования и науки Российской федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

О. А. Романова

КРАТКИЙ КУРС МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИГУ
2012

УДК 517.2
ББК 22.1
Р69

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ ИГУ

**Издание выходит в рамках
Программы стратегического развития
ФГБОУ ВПО «ИГУ» на 2012–2016гг.,
проект Р121-01-002**

Рецензенты: М. В. Фалалеев, д-р физ.-мат. наук, проф.;
А. Л. Казаков, д-р физ.-мат. наук, проф.

Романова О. А.

Р69 Краткий курс математического анализа: учеб. пособие / О. А. Романова. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2012. – 110 с.

ISBN 978-5-9624–0673-2

Содержатся основные разделы математического анализа, такие как предел числовой последовательности, предел функции одной переменной, непрерывность и дифференциальное исчисление функции одной переменной, неопределенный интеграл. Кроме теоретических сведений приведено большое количество примеров. Многие из них рассмотрены с подробным решением. Большим преимуществом пособия является рассмотрение возможных приложений основных понятий курса в экономике.

Предназначено для студентов первого курса университета, обучающихся по направлениям «Экономика», «Математика» и «Прикладная математика и информатика».

Библиогр. 9 назв., ил. 29

УДК 517.2
ББК 22.1

ISBN 978-5-9624–0673-2

Оглавление

Предисловие

Данное пособие по математическому анализу предназначен для бакалавров направлений «Экономика», «Математика» и «Прикладная математика и информатика». В учебном пособии представлены следующие главы: «Введение в анализ», «Предел последовательности», «Предел и непрерывность», «Дифференциальное исчисление функции одной переменной», «Неопределенный интеграл». Текст сопровождается большим количеством примеров и упражнений. При изложении теории автором выделены наиболее важные положения и факты математического анализа. Строгое доказательство некоторых утверждений заменено на геометрические иллюстрации с целью увеличения наглядности. Пособие содержит ряд приложений основных понятий математического анализа в экономике.

Глава 1

Введение в анализ

1.1 Понятие множества

Множество – совокупность некоторых объектов. Примерами множеств являются множества чисел, множества точек прямой, множество линий и др. Каждое отдельное множество задается правилом или законом, позволяющим судить, принадлежит объект данному множеству или нет.

Множества обозначаются прописными буквами латинского или готического алфавита: $A, B, \ldots, M, K, \ldots$. Если множество A состоит из элементов $a, b, c, \ldots$, это обозначается с помощью фигурных скобок: $A = \{a, b, c, \ldots\}$. Если a есть элемент множества A, то это записывают следующим образом: $a \in A$. Если же a не является элементом множества A, то пишут $a \notin A$. Одним из важных множеств является множество N всех натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \ldots, \}$. Существует также специальное, так называемое пустое множество, которое не содержит ни одного элемента. Пустое множество обозначается символом $\emptyset$.

Условимся вводить определение, когда это будет удобно, посредством следующего символа $:=$ (равенства по определению), двоеточие ставится со стороны определяемого объекта.

Определение 1 (определение равенства множеств)**.** *Множества A и B равны, если они состоят из одних и тех же элементов, т. е., если из $x \in A$ следует $x \in B$ и обратно, из $x \in B$ следует $x \in A$.*

Формально равенство двух множеств записывается следующим образом:

$$(A = B) := \forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B)),$$

это означает, что для любого объекта x соотношения $x \in A$ и $x \in B$ равносильны.

Здесь $\forall$ – квантор всеобщности ($\forall x$ читается как «для каждого x»).

Определение 2 (определение подмножества)**.** *Множество A является подмножеством множества B, если любое x принадлежащее множеству A, принадлежит множеству B.*

$$(A \subset B) := \forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$$

Если $A \subset B$, но $A \neq B$, то A – собственное подмножество множества B.

Пример 1. *Множество $\{2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots\}$ является собственным подмножеством множества натуральных чисел. Пустое множество является подмножеством любого множества.*

1.2 Операции над множествами

1. **Объединение**

$$C = A \cup B := \{x : x \in A \ \text{ или } \ x \in B\}$$

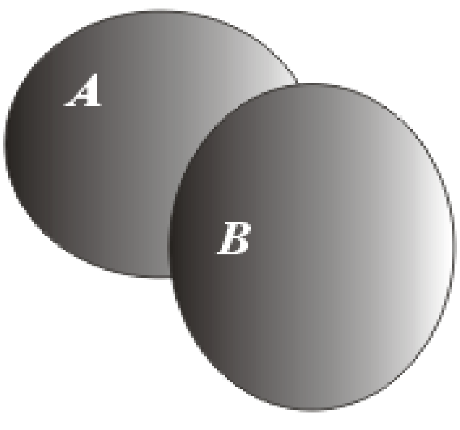

Рис.1

Пример 2. *Решить неравенство*

$$|2x+1| > 3.$$

Из данного неравенства следует либо неравенство

$$2x+1 > 3,$$

в случае, когда $2x+1 \geq 0$, *тогда* $x > 1$, *либо неравенство*

$$2x+1 < -3,$$

в случае, когда $2x+1 < 0$, *тогда* $x < -2$.

Множеством решений исходного неравенства является объединение найденных промежутков решения $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

Пример 3. $A = \{1, 3, 5, 7, ..., 2n-1, ...\}$ — *нечетные числа*

$B = \{2, 4, 6, 8, ...; 2n, ...\}$ — *четные числа*

$A \cup B = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}$ — *натуральный ряд*

2. **Пересечение**

   $C = A \cap B := \{x : x \in A \ \text{ и } \ x \in B\}$

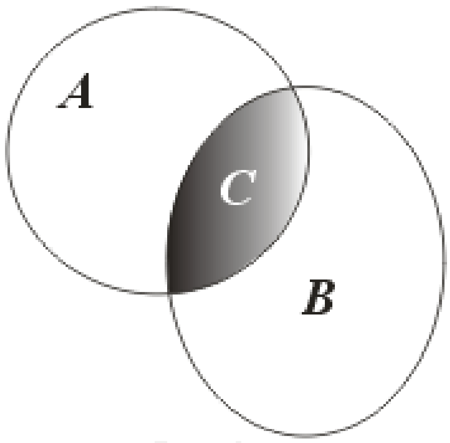

Рис.2

Пример 4. $A = \{2, 4, \ldots, 2n, \ldots\}, B = \{3, 6, 9, \ldots, 3n, \ldots\}$. *Тогда* $C = A \cap B = \{6, 12, \ldots, 6n, \ldots\}$.

3. **Вычитание** $A \backslash B := \{x : x \in A \ \text{ и } \ x \notin B\}$

   (рис. 3)

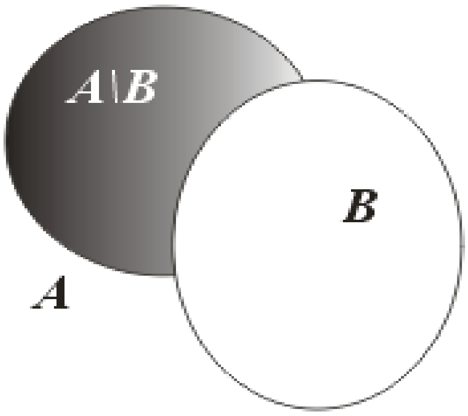

Рис.3

4. **Дополнение**

   Пусть U — универсальное множество (все остальные множества принадлежат U)

   $\overline{A} = CA := \{x : x \in U \text{ и } x \notin A\} = U \backslash A$ (рис. 4)

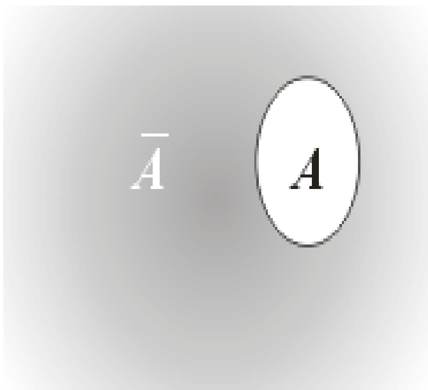

Рис.4

5. **Симметрическая разность**

   $A \Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$ (рис. 5).

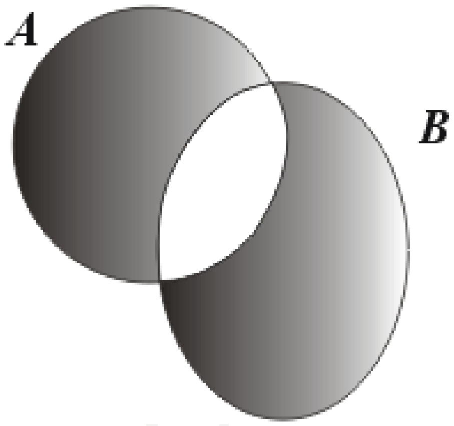

Рис.5

1.3 Свойства операций над множествами

Из определений объединения и пересечения множеств следует, что операции пересечения и объединения обладают следующими свойствами:

1. **Коммутативность**

   $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$

2. **Ассоциативность**

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. **Дистрибутивность**

   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
   $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

4. $A \cup A = A,\ A \cap A = A$
   $A \cup \emptyset = A,\ A \cap \emptyset = \emptyset$

5. **Законы де Моргана (законы двойственности)**

   1) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   2) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

Доказательство данных свойств проводится на основе определения равенства двух множеств.

Заметим, что закон ассоциативности при комбинировании операций объединения и вычитания, вообще говоря, не имеет места.

Пример 5. $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{3, 4, 5, 6\}$
$A \backslash B = \{1, 2\}$
$(A \backslash B) \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \neq A$
Но $(A \backslash B) \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$

Определение 3 (декартово произведение). *Декартовым (прямым) произведением множеств X и Y (обозначение $X \times Y$) называется множество всех упорядоченных пар (x, y), таких, что $x \in X,\ \ y \in Y$*

$$X \times Y := \{(x, y) : x \in X \ \ \textit{и} \ \ y \in Y\}.$$

Из определения декартова произведения следует, что, вообще говоря,

$$X \times Y \neq Y \times X,$$

равенство будет, если $X = Y$, в этом случае вместо $X \times X$ записывают X^2.

Пример 6. *Геометрический образ декартового произведения*

$$[a, b] \times [c, d]$$

приведен на рисунке 6.

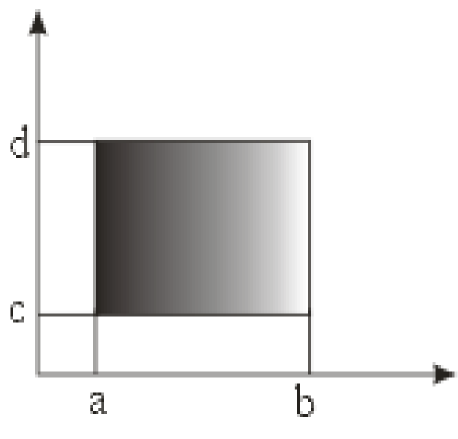

Рис. 6

Пример 7. *$R \times R = R^2$ — плоскость, где R – множество действительных точек на прямой.*

$R \times R \times R = R^3$ — пространство.

1.4 Функции и отображения

Определение 4. *Функцией f, действующей из множества X в множество $Y (f : X \to Y)$называется правило или закон, по которому каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один или несколько $y \in Y$. Если каждому x ставится в соответствие один y, то функция называется однозначной.*

Определение 5. *Образом множества $A \subset X$ при отображении $f : X \to Y$ называют множество*

$$f(A) := \{y \in Y : \exists x \in A \quad \text{и} \quad y = f(x)\}.$$

Пример 8. $y = x^2;\ A = [0, 1];\ f(A) = [0, 1]$.

Определение 6. *Множество*

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}$$

тех элементов X, образы которых содержатся в B, называется прообразом множества B.

Определение 7. *Отношением называется любое множество упорядоченных пар $(x, y) \subset X \times Y$.*

Если x связан с y отношением R, то это обозначают как xRy.

Определение 8. *Отношение называется функциональным, если*

$$(xRy_1) \ \text{и} \ (xRy_2) \Rightarrow (y_1 = y_2).$$

График функции $f : X \to Y$ – это подмножество $X \times Y$

$$\Gamma := \{(x, y) \in X \times Y, y = f(x)\}.$$

1.5 Виды отображений

Определение 9 (инъекция, сюръекция, биекция)**.** *Отображение называется инъекцией, если для любых элементов* $x_1, x_2 \in X$*, для которых* $f(x_1) = f(x_2)$ *следует, что* $x_1 = x_2$*(рис. 7).*

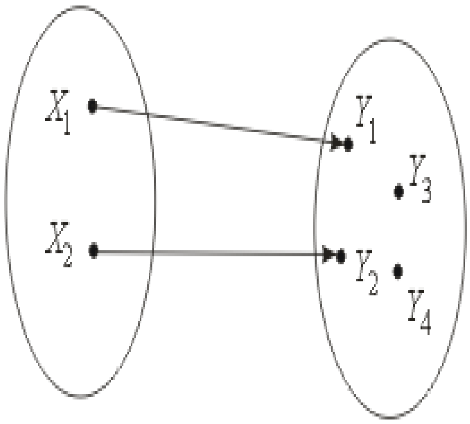

Рис.7

Сюръекцией (или отображением «на») называется отображение, при котором $f(X) = Y$ *(рис. 8).*

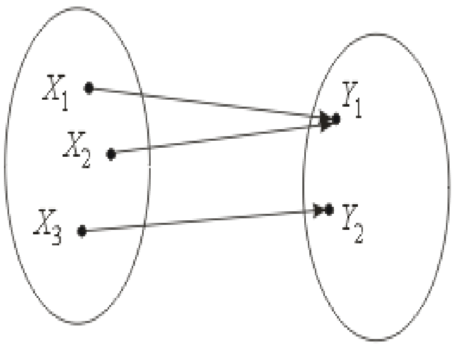

Рис.8

Биекция – это одновременно сюръекция и инъекция (рис. 9).

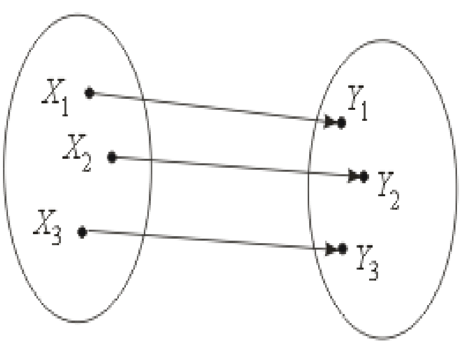

Рис.9

Пример 9. *1.* $y = x^2$, $R \to R_+$ *(R_+ – множество действительных положительных чисел) – сюръекция, но не инъекция, так как разным* x *соответствуют одинаковые* y.

2. $y = \frac{x}{x+1}$, $R_+ \to R_+$ *– инъекция, но не сюръекция, так как* $0 \leq y < 1$ *для любых* $x \geq 0$.

3. Отображение $y = 4x + 7$ *числовой оси* $(-\infty, \infty)$ *на себя – биекция.*

Если определены отображения $F : X \to Y$ и $G : Y \to Z$, то можно задать композицию этих отображений: $G \circ F : X \to Z$, значения которой определяются формулой $(G \circ F)(x) = G(F(x))$ (рис. 10).

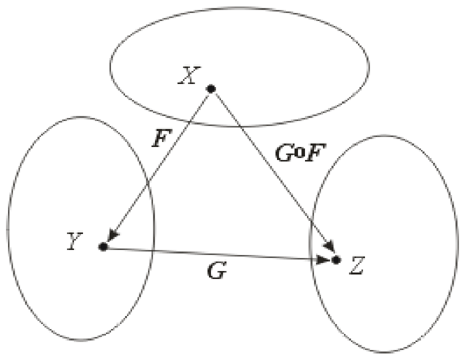

Рис.10

1.6 Мощность множеств

Как мы можем сравнить два конечных множества? Мы можем, например, сосчитать количество элементов в каждом из них и таким образом сравнить. Но можно поступить иначе, попытаться установить биекцию между элементами. Ясно, что биекцию между двумя конечными множествами можно установить только при условии, что количество элементов в них одинаково. Именно второй способ (установление биективного отображения между элементами множеств) годится для сравнения бесконечных множеств. Среди бесконечных множеств простейшим является множество натуральных чисел.

Определение 10 (эквивалентные множества)**.** *Два множества эквивалентны, если между их элементами можно установить биектив-*

ное отображение. Это обозначается следующим образом:

$$A \sim B.$$

Пример 10. $[a, b] \sim [0, 1]$, *что легко проверить, установив биекцию по формуле:* $y = a + (b - a)x$, *где* $x \in [0, 1]$.

Определение 11 (определение счетного множества)**.** *Счетное множество — это множество, эквивалентное множеству натуральных чисел.*

Рассмотрим примеры счетных множеств.

Пример 11. 1. *Множество всех целых чисел*

$$Z = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots,\}.$$

Соответствие между целыми и натуральными числами можно осуществить по схеме:

$$n \leftrightarrow 2n + 1 \quad \text{при} \quad n \geq 0; \quad n \leftrightarrow 2|n| \quad \text{при} \;\; n < 0.$$

2. *Множество всех четных положительных чисел. Соответствие по формуле* $n \leftrightarrow 2n$.

3. *Множество чисел* 2^n. *Соответствие осуществляется по формуле* $n \leftrightarrow 2^n$.

Приведем некоторые свойства счетных множеств.

Теорема 1 (свойства счетных множеств)**.** 1. *Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество.*

2. *Объединение конечного или счетного числа счетных множеств является счетным множеством.*

3. *Всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.*

Существуют и несчетные множества. Справедлива

Теорема 2 (теорема Кантора)**.** *Множество действительных чисел, заключенных между нулем и единицей, несчетно.*

Приведем примеры несчетных множеств.

Пример 12. *1. Множество точек любого отрезка $[a, b]$ или интервала (a, b).*

2. Множество точек на прямой.

3. Множество точек плоскости, пространства.

4. Множество иррациональных чисел.

Множества X и Y равномощны, если существует биективное отображение между элементами данных множеств. Из свойств биекции следует, что отношение равномощности является отношением эквивалентности. Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств.

Определение 12 (определение мощности множества)**.** *Класс эквивалентности, которому принадлежит множество X, называется мощностью или кардинальным числом множества X.*

Если множества эквивалентны, то их мощности равны, т. е.

$$A \sim B \Rightarrow cardA = cardB,$$

где $card\ A$ — мощность множества А. Для конечных множеств понятие мощности совпадает с понятием числа элементов множества. Мощность натуральных чисел (т. е. любого счетного множества) обозначается $\aleph_0$ (читается: «алеф нуль»).

Про множества, эквивалентные множеству действительных чисел отрезка $[0, 1]$, говорят, что они имеют мощность континуума. Эта мощность обозначается c или $\aleph$.

Глава 2

Действительные числа

2.1 Аксиоматика действительных чисел.

Определение 13 (пространство действительных чисел). *Множество R называется пространством действительных чисел, а его элементы – действительными числами, если выполнены следующие аксиомы:*

Аксиома 1 (сложения). $\forall (x, y) \in R \times R \ \ \exists z = x + y \in R$ *называемый суммой x и y. (Символ $\exists$ означает квантор существования и читается «существует».) При этом выполнены следующие свойства:*

1. $\exists$ *нейтральный элемент 0, называемый нулем, такой, что для любого $x \in R$*
$$x + 0 = 0 + x = x.$$
2. *Для любого элемента $x \in R$ существует элемент $-x \in R$, называемый противоположным к x, такой, что*
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$
3. *Операция сложения ассоциативна, т. е. для любых $x, y, z \in R$ выполнено условие*
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
4. *Операция сложения коммутативна, т. е. для любых $x, y \in R$*
$$y + x = x + y$$

Аксиома 2 (умножения)**.** *$\forall (x, y) \in R \times R$ ставится в соответствие элемент $z = x \cdot y \in R$, называемый произведением, при этом выполнены следующие условия:*

1. *Существует нейтральный элемент $1 \in R \setminus 0$, называемый единицей, такой, что $\forall x \in R$*

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2. *$\forall x \in R \backslash 0$ найдется элемент $x^{-1} \in R \backslash 0$, называемый обратным, такой, что*

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. *Операция умножения ассоциативна, т. е. $\forall x, y, z \in R \setminus 0$*

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4. *Операция умножения коммутативна, т. е. $\forall x, y \in R \setminus 0$*

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

Аксиома 3 (порядка)**.** *Между элементами множества R имеется отношение $\leq$, т. е. для элементов $x, y \in R$ установлено $x \leq y$ или нет. При этом выполняются следующие условия:*

1. *$x \leq x$;*

2. *$x \leq y$ и $y \leq x \Rightarrow y = x$;*

3. *$x \leq y$ и $y \leq z \Rightarrow x \leq z$;*

4. *$\forall x, y \in R$ $x \leq y$ или $y \leq x$.*

Аксиома 4 (связь порядка и сложения)**.** *Если $x, y, z \in R$, то из $x \leq y$ следует, что $x + z \leq y + z$.*

Аксиома 5 (связь порядка и умножения)**.** *Если*

$$x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad \text{то} \;\; x \cdot y \geq 0.$$

Аксиома 6 (непрерывности)**.** *Если $X, Y \subset R$ – непустые, и при $\forall x \in X$ и $\forall y \in Y$, выполнено условие $x \leq y$, то $\exists c \in R : x \leq c \leq y$.*

2.2 Числовые множества. Ограниченное множество. Принцип верхней грани

Геометрически множество действительных чисел R изображается точками числовой прямой. Между точками числовой прямой и множеством действительных чисел существует взаимно однозначное соответствие, т. е. каждой точке числовой прямой соответствует действительное число и наоборот. Множество всех действительных чисел будем называть числовой прямой и обозначать символом $(-\infty, \infty)$ или R. Приведем примеры часто используемых числовых множеств.
$[a, b] = \{x \in R, a \leq x \leq b\}$ —отрезок
$(a, b) = \{x \in R, a < x < b\}$ — интервал
$(a, b] = \{x \in R, a < x \leq b\}$ — полуинтервал
$[a, b) = \{x \in R, a \leq x < b\}$ — полуинтервал

Определение 14. *Окрестностью точки x называется любой интервал, содержащий эту точку.*

Окрестность точки x будем обозначать следующим образом $U(x)$.

Определение 15. *$U_\epsilon(x_0)$ эпсилон окрестностью точки x_0 называется интервал длины 2ϵ с центром в точке x_0*

$$|x - x_0| < \epsilon$$

(рис. 11).

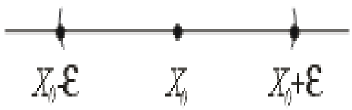

Рис. 11

Определение 16. *Расстоянием в R между x и y называется $\rho(x, y) = |x - y|$.*

Определение 17 (ограниченное множество)**.** *Множество X называется ограниченным сверху (снизу), если для всех элементов из X, существует такое число a, что $x \leq a (x \geq a)$.*
Множество X называется ограниченным, если найдутся a и b : $\forall x \in X,\ a \leq x \leq b,\ x \in [a, b]$.

Эквивалентное определение ограниченного множества можно сформулировать следующим образом.

Определение 18. *Множество X ограничено, если существует такое число $c > 0$, что для всех $x \in X$ выполнено неравенство $|x| \le c$.*

Приведем примеры, иллюстрирующие данные понятия.

Пример 13.

1. *Множество N натуральных чисел ограничено снизу и не ограничено сверху.*

2. *Множество действительных чисел, принадлежащих отрезку $[a,b]$ или интервалу (a,b) ограничено.*

3. *Числовая прямая R есть множество, не ограниченное ни сверху, ни снизу.*

Определение 19. *Элемент $c \in X$ называется максимальным (минимальным), если $\forall x \in X,\ x \le c (x \ge c)$.*

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 14.

1. *Множество целых чисел*

$$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

не имеет ни максимального элемента, ни минимального.

2. *Множество натуральных чисел*

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

имеет минимальный элемент, равный единице, но не имеет максимального.

3. *Множество действительных чисел, принадлежащих отрезку $[a, b]$ имеет как минимум, равный a, так и максимум, равный b.*

4. *Множество действительных чисел, принадлежащих интервалу (a, b) не имеет ни максимума, ни минимума.*

Пусть множество X ограничено сверху. Тогда оно имеет бесконечное множество верхних граней. Действительно, если S – верхняя грань X, то и любое число $S' > S$ также является верхней гранью. *Наименьшая из верхних граней множества X называется точной верхней гранью множества X.* Обозначается точная верхняя грань через $supX$ (супремум).

Учитывая вышесказанное, можно дать эквивалентное определение точной верхней грани.

Определение 20 (определение точной верхней грани)**.** *Число S называется точной верхней гранью множества X ($S = supX$), если выполняются следующие свойства:*

1. $x \leq S \quad \forall x \in X$;

2. $\forall \epsilon > 0 \ \exists x_\epsilon \in X \ \ x_\epsilon > S - \epsilon$.

Аналогично определяется и точная нижняя грань, которая обозначается $infX$ (инфимум).

Определение 21 (определение точной нижней грани)**.** *Число I называется точной нижней гранью множества X ($I = infX$), если выполняются следующие свойства:*

1. $x \geq I \quad \forall x \in X$;

2. $\forall \epsilon > 0 \ \exists x_\epsilon \in X \ \ x_\epsilon < I + \epsilon$.

В случае, когда множество X имеет максимум или минимум, то они совпадают соответственно с $supX$ и $infX$. Если множество X не ограничено сверху, то будем считать, что $supX = \infty$. Аналогично, если множество не ограничено снизу, то $infX = -\infty$. Проиллюстрируем эти понятия на примерах.

Пример 15. *1. Для множества натуральных чисел N*

$$infN = minN = 1, \quad supN = \infty.$$

2. $X = \{n/n+1,\ n \in N\} = \{1/2, 2/3, 3/4, ...\}$ $infX = minX = 1/2, supX = 1$. *Отметим, что* 1 *не принадлежит данному множеству. Покажем, что* $supX = 1$ *на основании определения. Очевидно, что* $x_n = \frac{n}{n+1} < 1$. *Проверим, что* $\forall\epsilon > 0 \quad \exists x_\epsilon > 1-\epsilon$. *Для этого решим неравенство*

$$\frac{n_\epsilon}{n_\epsilon + 1} > 1 - \epsilon.$$

Отсюда $n_\epsilon > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$. *Задавая* ϵ *можно определить* n, *зависящее от* ϵ. *Таким образом, число* $1 - \epsilon$ *не является точной верхней гранью данного множества.*

Теорема 3 (принцип верхней грани). *Всякое непустое ограниченное сверху подмножество множества действительных чисел имеет единственную точную верхнюю грань.*

Доказательство. X — непустое, ограниченное сверху подмножество, $X \subset R$. Построим $Y = \{y \in R : \forall\ x \in X,\ x \le y\}$ — множество верхних границ. По аксиоме полноты $\exists\ c \in R,\ x \le c \le y$, т. е. $c \in Y, c = minY \Rightarrow c = supX$.

□

Справедлива аналогичная теорема.

Теорема 4. *Всякое непустое ограниченное снизу подмножество множества действительных чисел имеет единственную точную нижнюю грань.*

Глава 3

Предел числовой последовательности

3.1 Предел последовательности. Основные определения и примеры

Определение 22 (определение последовательности)**.** *Функция $f : N \to X$, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью.*

Если $f : N \to R$, то последовательность называется числовой. Иначе говоря, числовая последовательность – это функция натурального аргумента: $x_n = f(n)$. Обозначают числовую последовательность $\{x_n\}$.

Примеры числовых последовательностей:

Пример 16. $1)1, 2, \ldots, n, \ldots;$
$2)1, -1, 1, -1, \ldots, (-1)^n, \ldots;$
$3)1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots.$

Определение 23.

1. *Последовательность называется ограниченной сверху (снизу), если $\exists M(m)$, такое, что для любого $n \in N$ $x_n \leq M(x_n \geq m)$.*

2. *Последовательность называется ограниченной, если она ограничена и сверху, и снизу, т. е. $\exists\ c > 0$ такое, что $|x_n| \leq c$ для любого $n \in N$. Заметим, что в данном определении $c = \max\{|m|, |M|\}$.*

Пример 17. *1.* $1, 2, \ldots, n, \ldots$ — *ограничена снизу, но неограничена сверху;*

2. $\{1/n\}$ *– ограничена, так как* $0 < x_n \leq 1$*;*

3. $\{(-1)^n\}$ *– ограничена.*

Определение 24. *Последовательность* x_n *называется неограниченной, если*

$$\forall\ c > 0\ \exists\ N : |x_N| > c.$$

Неограниченная последовательность может быть односторонне ограниченной, т. е. ограниченной или сверху, или снизу. Пример неограниченной сверху последовательности: $x_n = n$.

Понятие предела числовой последовательности хорошо иллюстрируется на следующем примере. Пусть задана последовательность $x_n = 1/n$. Изобразим ее члены точками на числовой оси (рис. 12).

Рис.12

Можно заметить, что члены последовательности с ростом номера n как угодно близко приближаются к 0. При этом величина x_n становится все меньше и меньше. Очевидно, что пределом данной последовательности будет 0.

Дадим строгое определение предела числовой последовательности.

Определение 25 (определение предела последовательности)**.** *Число* A *называется пределом последовательности* x_n*, если*

$$\forall U(A) \exists N : \forall n > N\ x_n \in U(A).$$

Приведем другое определение предела, которое является эквивалентным первому.

Определение 26 (определение предела последовательности)**.** *Число* A *называется пределом* x_n*, если*

$$\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n > N\ |x_n - A| < \epsilon.$$

Заметим, что здесь использованы логические символы: квантор всеобщности $\forall$ (вместо слова «для любого») и квантор существования $\exists$ (вместо слова «найдется»).

Предел числовой последовательности обозначается $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ или $x_n \to A$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящейся, в противном случае расходящейся.

Пример 18. *Пусть* $x_n = 1/n$, *покажем, что*

$$\lim_{n\to\infty} 1/n = 0.$$

Для этого запишем определение:

$$\forall\epsilon > 0 \ \ \exists N : \forall n > N \ \ |x_n| < \epsilon.$$

Для данного примера $1/n < \epsilon$ *при* $n > N = [1/\epsilon]$.

Пример 19.

$$x_n = \frac{n+1}{n}.$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$

$\forall\ \epsilon > 0 \ \exists\ N : \forall n > N \ |\frac{n+1}{n} - 1| < \epsilon$.
$1/n < \epsilon \Rightarrow \quad n > 1/\epsilon \ \ N = [1/\epsilon]$.
Если $\epsilon = 1/10$, *то* $N = 10$ *и при* $n > 10$ *следует выполнение нужного неравенства.*

Выясним геометрический смысл понятия предела последовательности. Расположим члены последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ на числовой прямой. Неравенство $|x_n - A| < \epsilon$ равносильно следующему $A - \epsilon < x_n < A + \epsilon$, которое говорит о том, что члены последовательности x_n попадают в ϵ-окрестность точки A (рис. 13). Вне этой ϵ-окрестности может быть лишь конечное число членов данной последовательности.

Рис. 13

3.2 Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности и их свойства

Определение 27 (бесконечно малая последовательность). *Бесконечно малая последовательность — последовательность, предел которой равен 0. То есть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

или более подробно с учетом определения предела $\forall\ \epsilon > 0\ \exists N : \forall\ n > N\ |x_n| < \epsilon$.

Пример 20. *Последовательность* $x_n = 1/n$ *является бесконечно малой последовательностью.*

Определение 28 (бесконечно большая последовательность). x_n *– бесконечно большая последовательность, если* $\forall\ c > 0\ \exists N : \forall\ n > N\quad |x_n| > c$.

Пример 21. *Последовательности* $n,\ 2^n$ *являются бесконечно большими.*

Следует различать неограниченную и бесконечно большую последовательности. Всякая бесконечно большая последовательность является неограниченной, однако неограниченная не обязательно является бесконечно большой. Рассмотрим следующий пример.

Пример 22. *Пусть* $x_n = 1, 1/2, 3, 1/3, 5, 1/4, \ldots$, *нетрудно заметить, что данная последовательность состоит из двух составляющих, а именно* $x_{2k-1} = 2k-1, x_{2k} = 1/(k+1)$. *Данная последовательность неограниченная, так как содержит неограниченную составляющую* $x_{2k-1} = 2k-1$, *но не является бесконечно большой, так как содержит вторую часть* $x_{2k} = 1/(k+1)$.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 1. *Если* $\alpha_n, \alpha_n \neq 0$ *— бесконечно малая последовательность, то* $1/\alpha_n$ *—бесконечно большая последовательность.*

Пример 23. *Пусть* $\alpha_n = 1/n$, *которая является бесконечно малой, тогда последовательность* $\beta_n = 1/\alpha_n = n$ *будет бесконечно большой.*

Теорема 5. *Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ имела предел, равный A, необходимо и достаточно, чтобы ее члены имели вид*

$$x_n = A + \alpha_n,$$

где

$$lim_{n\to\infty}\alpha_n = 0.$$

Справедливы следующие свойства бесконечно малых последовательностей, которые легко получить из определения бесконечно малой последовательности.

Теорема 6. (свойства бесконечно малых последовательностей)

1. *Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*

2. *Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность является бесконечно малой последовательностью.*

Следствие 1. *Произведение конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых последовательностей является бесконечно малой последовательностью.*

3.3 Свойства предела последовательности

Общие свойства

Определение 29. *Последовательность называется финально постоянной, если $\exists A \in R$ и $\exists N$, что для всех $n > N$ $x_n = A$.*

Теорема 7. (свойства предела последовательности)

1. *Финально постоянная последовательность сходится.*

2. *Если последовательность сходится, то предел единственен.*

3. *Сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство. 1. Если $x_n = A$ при $n > N$, то для любой окрестности U(A) имеем $x_n \in U(A)$ при $n > N$, т. е. $\lim_{n\to\infty} x_n = A$.

2. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A_1$ и $\lim_{n\to\infty} x_n = A_2, \quad A_1 \neq A_2$, тогда выберем ϵ-окрестности точек $A_1, \quad A_2$, так, чтобы они не пересекались. В качестве ϵ можно взять число $\epsilon = 1/2|A_1 - A_2|$. По определению предела $\exists N_1, N_2$, что при $n > N_1 \ \ x_n \in U(A_1)$, а при $n > N_2 \ \ x_n \in U(A_2)$. Следовательно, при $n > \max\{N_1, N_2\} x_n \in U(A_1) \cap U(A_2)$, что невозможно, так как $U(A_1) \cap U(A_2) = \emptyset$.

3. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = A$, положим в определении предела $\epsilon = 1$, тогда $\forall \ n > N \ \ |x_n - A| < 1$, значит $|x_n| < |A| + 1$. Выберем $C > \max\{|x_1|, \ldots, |x_N|, |A| + 1\}$, тогда получим, что при $\forall n \in N \ \ |x_n| < C$.

$\square$

Арифметические операции над последовательностями

Определение 30. *Если x_n, y_n – числовые последовательности, то их суммой, разностью, произведением, частным при $y_n \neq 0$ называются соответственно последовательности*

$$\{(x_n \pm y_n)\}, \{(x_n y_n)\}, \{(x_n/y_n\}.$$

Справедлива теорема.

Теорема 8 (предел суммы, произведения, частного)**.** *Пусть*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \lim_{n\to\infty} y_n = B,$$

тогда

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$;

2. $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = AB$;

3. $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = A/B$, *при* $y_n \neq 0, \ B \neq 0$.

Доказательство теоремы 8 опирается на результат теоремы 6.

Предел и неравенства

Теорема 9. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,$$
$$\lim_{n\to\infty} y_n = B,$$

и $A < B$, *то* $\exists\ N : \forall n > N\ \ x_n < y_n$.

Теорема 10 (о трех последовательностях)**.** *Пусть последовательности* x_n, y_n, z_n *удовлетворяют при любом* $n > N$ *условию:* $x_n \le y_n \le z_n$, *причем*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

Тогда

$$lim_{n\to\infty} y_n = A.$$

Доказательство. Согласно определению предела $\forall\epsilon > 0\ \exists\ N_1 : \forall\ n > N_1$ выполняется $A - \epsilon < x_n < A + \epsilon\ \forall\ \epsilon > 0\ \exists\ N_2 : \forall\ n > N_2, A - \epsilon < z_n < A + \epsilon$ Если $N = max(N_1, N_2)$, тогда при $n > N$ получим $A - \epsilon < x_n \le y_n \le z_n < A + \epsilon$. Следовательно,

$$|y_n - A| < \epsilon.$$

□

Утверждение 1. *Если все члены последовательности принадлежат отрезку* $[a, b]$, *и* $\exists\ lim_{n\to\infty} x_n = c$, *то* $c \in [a, b]$.

3.4 Фундаментальные последовательности. Критерий Коши

Определение 31. *Последовательность* x_n *называется фундаментальной или последовательностью Коши, если*

$$\forall\ \epsilon > 0\ \exists N : \forall\ n > N, \forall\ m > N,\ |x_n - x_m| < \epsilon.$$

Справедливо также и другое определение фундаментальной последовательности, эквивалентное данному.

Определение 32 (последовательность Коши). *Последовательность x_n называется фундаментальной или последовательностью Коши, если*

$$\forall\, \epsilon > 0\, \exists N : \forall\, n > N, \forall\, p - \text{натурального},\ |x_{n+p} - x_n| < \epsilon.$$

Теорема 11 (Критерий Коши). *Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она является фундаментальной.*

Пример 24. *Используя критерий Коши можно доказать, что последовательность $(-1)^n$ не имеет предела . Очевидно, что $|x_n - x_{n+1}| = 2$, поэтому если выбрать $\epsilon = 1$, то получим отрицание утверждения, что последовательность фундаментальна. А именно:*

$$\exists \epsilon > 0,\ \ \exists n > N, \exists m > N, |x_n - x_m| \geq \epsilon.$$

Пример 25. *Рассмотрим последовательность*

$$x_n = 1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n$$

Для исследования на сходимость воспользуемся определением фундаментальности. Так как

$$|x_{n+p} - x_n| = 1/(n+1) + ... + 1/(n+p) > p/(n+p),$$

то при $p = n$

$$|x_{n+p} - x_n| > n/2n = 1/2 = \epsilon.$$

Очевидно, что определение фундаментальной последовательности не выполняется. В силу критерия Коши эта последовательность не имеет предела.

3.5 Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса

Определение 33. 1. *Последовательность x_n возрастает (убывает), если $\forall\, n \in N$ $x_n < x_{n+1} (x_n > x_{n+1})$*

2. *x_n не убывает (не возрастает), если $\forall\ n \in N\ x_n \le x_{n+1} (x_n \ge x_{n+1})$*

Теорема 12 (теорема Вейерштрасса)**.** *Неубывающая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху.*

Доказательство. Необходимость. Если последовательность имеет предел, то она ограничена.
Достаточность. Пусть x_n — ограниченная сверху последовательность. Существует $S = \sup x_n$, т. е. $\forall\ \epsilon > 0\ \exists x_N :\ \ x_N > S - \epsilon$. Так как последовательность неубывающая, то

$\forall n > N \Rightarrow x_n \ge x_N \Rightarrow S - \epsilon < x_N \le x_n \le S < S + \epsilon$. Следовательно, $|x_n - S| < \epsilon$.

□

Пользуясь теоремой Вейерштрасса, можно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} (1 + 1/n)^n = e.$$

Доказательство данного факта можно посмотреть в книге В. А. Зорича [2].

Пример 26. *Рассмотрим последовательность $x_n = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \ldots + \sqrt{2}}}$. Возрастание x_n с ростом n следует непосредственно из формулы для x_n. Докажем, что $x_n < 2\ \ \forall n$. Доказательство можно провести по индукции. Заметим, что $x_1 < 2$, предположим, что $x_n < 2$ и покажем, что $x_{n+1} < 2$. Из формулы для x_n следует, что $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$, учитывая, что $x_n < 2$, получим, что $x_{n+1} < 2$. Тогда по теореме Вейерштрасса существует предел данной последовательности. Обозначим его через A. Для определения A перейдем к пределу в рекуррентном соотношении $x_n = \sqrt{2 + x_{n+1}}$. Тогда $A = \sqrt{2 + A}$, отсюда $A = 2$. То есть $\lim_{n\to\infty} x_n = 2$.*

3.6 Понятие подпоследовательности. Частичные пределы последовательности

Определение 34 (определение подпоследовательности)**.** *Как мы уже знаем (см. определение последовательности) последовательность это* *функция, заданная на множестве натуральных чисел. Если вместо множества всех натуральных чисел взять некоторое его бесконечное подмножество $n_k, k = 1, 2, \ldots, \quad n_k < n_{k+1}$, то получим подпоследовательность x_{n_k}.*

Пример 27. *Рассмотрим последовательность $x_n = n$, тогда $x_{n_k} = \{1, 3, ..., 2n-1, ...\}$ — подпоследовательность последовательности x_n.*

Определение 35 (определение частичного предела)**.** *Предел любой подпоследовательности, если он существует, называется частичным пределом данной последовательности.*

Отметим, что частичный предел последовательности является предельной точкой этой последовательности. Справедливо следующее определение предельной точки последовательности.

Определение 36 (определение предельной точки)**.** *Точка $a \in R$ называется предельной точкой последовательности x_n, если в любой ϵ-окрестности этой точки содержится бесконечно много элементов последовательности x_n.*

Замечание 1. *Если последовательность сходится, то по теореме 7 она имеет единственную предельную точку. Последовательность x_n может не иметь предела, однако она может иметь несколько предельных точек (и, вообще, бесконечно много предельных точек).*

Пример 28. *Рассмотрим последовательность $x_n = (-1)^n$. Так как $x_{2k} = 1, \quad x_{2k+1} = -1$, то данная последовательность имеет два частичных предела, или иначе говоря, две предельные точки.*

Если последовательность ограничена сверху, то множество всех частичных пределов тоже ограничено сверху. Можно доказать, что это множество обязательно содержит максимальный элемент. Этот максимальный элемент называется верхним пределом последовательности и обозначается $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$.

Если последовательность не ограничена сверху, то

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty.$$

Аналогично определяется $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ – нижний предел последовательности. Если последовательность не ограничена снизу, то

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = -\infty.$$

Определение 37. *Нижним пределом последовательности называется наименьший частичный предел последовательности.*

Верхним пределом последовательности называется наибольший частичный предел последовательности.

Условие существования предела последовательности эквивалентно условию равенства верхнего и нижнего пределов этой последовательности.

Вычисление верхнего и нижнего пределов последовательности сводится к тому, что выделяют сходящиеся подпоследовательности и сравнивают их пределы.

Пример 29. *Пусть дана последовательность* $x_n = n^{(-1)^n}, \quad n \in N$. *Так как* $x_{2k} = 2k, \quad x_{2k+1} = 1/(2k+1)$, *то* $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n = +\infty$. *и* $\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n = 0$.

Теорема 13 (теорема Больцано – Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности действительных чисел, можно выделить сходящуюся подпоследовательность.*

3.7 Приложение последовательностей в экономике

На финансовом рынке кредитор получает доход от предоставления денег в долг в виде, например, помещения денег на сберегательный счет, покупки акций, выдачи ссуды и т. д. Получаемый доход называется процентами и определяется кредитной ставкой.

Различают два вида процентных ставок – простые и сложные. Начисления при ставке простого процента предполагает применение ставки только к первоначальной сумме на протяжении всего срока долга.

Пусть S_n – наращенная сумма долга через n периодов после предоставления ссуды в размере P денежных единиц, а простая ставка процента за период равна i процентов. Тогда в каждом периоде процентные начисления постоянны и равны $(iP)/100$. Найдем наращенную сумму долга в каждом из периодов:

$$S_0 = P, \ \ S_1 = P + (iP)/100 = P(1 + i/100),$$

$$S_n = S_{n-1} + (iP)/100 =$$
$$= P(1 + ((n-1)i)/100) + (iP)/100 = P(1 + (ni)/100).$$

Данная формула

$$S_n = P(1 + (ni)/100), n = 0, 1, \ldots,$$

называется формулой *простых процентов*, $(1 + (ni)/100)$ – множителем наращения.

Рассмотрим теперь как изменяется сумма долга при начислении сложного процента. В этом случае доход определяется применением процентной ставки к первоначальной сумме вместе с начисленными в предыдущих периодах процентами.

При первоначальной сумме P и сложной ставке за период начисления $i\,\%$ наращенная сумма меняется следующим образом:

$$S_0 = P, \ \ S_1 = P + (iP)/100 = P(1 + i/100),$$

$$S_2 = S_1 + (iS_1)/100 = S_1(1 + i/100) = P(1 + i/100)^2,$$
$$S_n = S_{n-1} + S_{n-1}(1 + (i)/100) = P(1 + i/100)^n.$$

Формула

$$S_n = P(1 + i/100)^n, \ \ n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (3.1)$$

называется формулой *сложных процентов.*

Пример 30. *Пусть ссуда в 2000 рублей предоставляется на пять лет при простой ставке* 3 % *годовых. Тогда наращенная сумма через пять лет составит*

$$S_5 = 2000(1 + 5 \cdot 0,03) = 2300.$$

При той же ставке сложных процентов сумма через пять лет составит

$$S_5 = 2000(1 + 0,03)^5 = 2319.$$

Очевидно, что сумма растет быстрее при сложной ставке процента, при этом рост будет выше при большей ставке процента.

Отметим, что формулы типа (3.1) используются в демографических расчетах (прирост народонаселения) и в экономических прогнозах (увеличение валового национального продукта).

Если предположить, что вклады вносятся каждый период, то по формуле (3.1) легко подсчитать общую сумму дохода.

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_n = P(1 + i/100) + \cdots + P(1 + i/100)^n =$$

$$= P(1 + i/100)(1 + (1 + i/100) + \cdots + +(1 + i/100)^{n-1}).$$

Используя формулу для нахождения суммы геометрической прогрессии, получим

$$G = P(1 + i/100)((1 + i/100)^n - 1)/(i/100). \qquad (3.2)$$

Пример 31. *Университет производит замену персональных компьютеров каждые три года. При этом университет может выделять 300 000 рублей ежегодно, размещая их под 8 % годовых. Какая сумма поступит в распоряжение университета по окончании трехлетнего срока?*

Решение. *Для решения данной задачи воспользуемся формулой (3.2)*

$$G = 300\ 000 \cdot 1.08(1.08^3 - 1)/0.08 = 1\ 051\ 833.6$$

Упражнение 1. *Компании необходимо производить замену оборудования каждые 8 лет. Для этого выделяются определенные средства. Если компания может выделить 100 000 рублей ежегодно и разместить их под 4 % годовых, то какая сумма будет в ее распоряжении по окончании восьми лет?*

Пусть первоначальный депозит Q_0 помещен в банк под $i = 100$ % годовых, тогда через год сумма депозита удвоится. Предположим, что через полгода счет закрыт с результатом $Q_1 = Q_0(1 + 1/2) = 3/2Q_0$ и эта сумма снова помещается на депозит. В конце года депозит будет равен $Q_2 = Q_0(1+1/2)^2 = 2,25Q_0$. Аналогично, при ежеквартальном размещении депозит в конце года будет равен $Q_3 = Q_0(1+1/3)^3 \approx 2,37Q_0$. Если ежемесячно повторять ту же операцию, то $Q_{12} = Q_0(1+1/12)^{12} \approx 2,61Q_0$, при ежечасной операции $Q_{8720} = Q_0(1+1/8720)^{8720} \approx 2,718Q_0$. Заметим, что последовательность значений увеличения первоначального вклада Q_n/Q_0 совпадает с последовательностью $x_n = (1 + 1/n)^n$, предел которой равен e.

В общем случае, если i – процент начисления и год разбит на n частей, то через t лет сумма депозита будет равна:

$$Q_n = Q_0(1 + i/(100n))^{nt}$$

или

$$Q_n = Q_0((1 + i/(100n))^{100n/i})^{(it)/100}.$$

Введем новую переменную $m = 100n/i$, при $n \to \infty$ получим $m \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{m\to\infty} ((1 + 1/m)^m)^{(it)/100} = Q_0 e^{(it)/100}.$$

Данная формула называется формулой *непрерывных процентов.*

Пример 32. *Пусть темп инфляции составляет* 1 % *в день. Насколько уменьшится первоначальная сумма через полгода? Используем формулу сложных процентов*

$$Q = Q_0(1 - 1/100)^{182},$$

или

$$Q = Q_0((1 - 1/100)^{-100})^{-182/100} \approx Q_0 e^{-1,82},$$

т. е. инфляция уменьшит первоначальную сумму примерно в 6 раз.

Пусть в некоторый фонд вносится разовый взнос, и лицо, которое произвело этот взнос, получает определенные суммы денег через определенные промежутки времени. В такой ситуации наиболее распространенной формой выплаты является договор об аннуитете. Оценим стоимость аннуитета на момент заключения договора. Заметим, что данная задача является обратной для выше рассмотренной. Обозначим каждую выплату как S, процентную ставку как i %, а $(1 + i/100) = q$ – процентный коэффициент, n – период действия аннуитета. По формуле (3.1) будем иметь текущую стоимость выплаты, произведенной в конце года n

$$P_n = S/q^n.$$

Общая стоимость аннуитета V является суммой всех выплат:

$$V = S(1/q + 1/q^2 + \cdots + 1/q^n).$$

Тогда, используя формулу для суммы геометрической прогрессии, получим

$$V = S(1/q^n)((q^n - 1)/(q - 1)). \tag{3.3}$$

Пример 33. *Определить текущую стоимость аннуитета при регулярных выплатах в размере 15 000 рублей ежегодно в течение 5 лет и процентной ставке в размере 4 % годовых.*

Применяя формулу (3.3), получим

$$V = 15\ 000((1.04)^5 - 1)/(0.04 \cdot (1.04)^5) = 66\ 777$$

Для того чтобы приобрести аннуитет, нужно заплатить один раз, и затем можно получать регулярные ежемесячные или ежегодные выплаты. В предыдущем примере текущая стоимость аннуитета равна 66 777 рублей. Если Вам предлагают купить данный аннуитет за 60 000 рублей, то данная стоимость его ниже текущей, и это выгодное предложение. Однако, если для получения ежегодных выплат в размере 15 000 рублей Вам предлагают заплатить 73 000 рублей, то следует проанализировать данное предложение.

Пример 34. *Пусть стоимость аннуитета 73 000 рублей, ежегодные выплаты равны 15 000 рублей, процентная ставка 4 % годовых. Сколько лет должны производиться выплаты, чтобы их стоимость превысила стоимость аннуитета?*

Применяя формулу (3.3), получим

$$73000 = 15000(1/1.04^n)((1.04^n - 1)/0.04)$$

или

$$1.04^n = 1.2417219.$$

Отсюда

$$n \approx 6.$$

Таким образом, аннуитет должен выплачиваться в течение не менее 6 лет, чтобы его стоимость превысила стоимость его приобретения.

Ипотечная ссуда также может рассматриваться с точки зрения аннуитета. Определенная сумма берется в долг, обычно для покупки дома или квартиры, и постепенно выплачивается на протяжении нескольких лет таким образом, что к концу срока возвращаются долг и проценты за него. Если сумма V берется в долг на срок n лет под i % годовых и $q = (1+i/100)$, то ежегодная выплата будет определяться из формулы (3.3):

$$S = Vq^n(q-1)/(q^n-1).$$

Упражнение 2. *Определить размер ежегодных выплат для ипотечной ссуды в 200 000 рублей на срок 10 лет под 11 % годовых.*

Контрольные вопросы

1. Дать определение предела числовой последовательности.
2. Какие последовательности называются бесконечно малыми и бесконечно большими?
3. Сформулируйте основные свойства предела числовой последовательности.
4. Какие последовательности называются фундаментальными? Сформулируйте критерий Коши сходимости числовой последовательности.
5. Дайте определение подпоследовательности, частичного предела последовательности. Сформулируйте теорему Больцано — Вейерштрасса.

Глава 4

Предел функции. Условия существования предела функции.

4.1 Предел функции. Определения и примеры

Пусть $E \subset R$ и a – предельная точка множества E. Пусть $f : E \to R$. Приведем несколько формулировок определения предела функции. Для разных оценок бывает удобна то одна, то другая.

Определение 38 (предела по Коши). *Число A называется пределом функции $f(x)$ и это обозначается следующим образом $lim_{x\to a}f(x) = A$ если $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta(\epsilon) > 0 : \forall\ x$ удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполнено неравенство$|f(x) - A| < \epsilon$.*

Пример 35. *Доказать, что* $\lim_{x\to 1}(2x + 3) = 5$.

Запишем определение предела для данного примера $\forall\epsilon > 0\exists\delta(\epsilon) > 0\forall x$ удовлетворяющих условию: $0 < |x - 1| < \delta$ должно быть выполнено неравенство $|2x + 3 - 5| < \epsilon$ или $2|x - 1| < \epsilon$. Отсюда следует, что неравенство $2|x - 1| < 2\delta < \epsilon$ выполнится, если $\delta \le \epsilon/2$. Если $\epsilon = 0,1$, то $\delta = 0,05$, при $\epsilon = 0,01, \delta = 0,005$ и т. д. Таким образом, решение задачи состоит в нахождении δ, зависящего от ϵ.

Определение 39. *Проколотой окрестностью точки называется окрестность точки, из которой исключена эта точка.*

Обозначается проколотая окрестность символом $\dot{U}(a)$.

Определение 40 (на «языке окрестностей»). *Для любой окрестности* $U(A)$ *существует* $\dot{U}(a) : \forall\, x \in \dot{U}(a),\; f(x) \in U(A)$.

Приведем еще одно эквивалентное определение предела на «языке последовательностей».

Определение 41 (по Гейне). $A = lim_{x \to a} f(x)$ *означает, что*

$$\forall\, x_n \to a \;\; \text{при} \;\; n \to \infty; x_n \neq a, f(x_n) \to A \;\; \text{при} \;\; n \to \infty.$$

Пример 36. *Покажем, что не существует предела* $f(x) = \sin(1/x)$ *при* $x \to 0$. *Для этого используем определение предела на языке последовательностей. Выберем две последовательности* $x_{n1} = 1/\pi n,\;\; x_{n2} = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$, *которые обе сходятся к нулю при* $n \to \infty$. *Тогда* $\sin x_{n1} = \sin \pi n = 0,\;\; \sin x_{n2} = \sin(\pi/2 + 2\pi n) = 1$. *Таким образом,* $f(x_{n1})$ *и* $f(x_{n2})$ *сходятся к разным числам, поэтому определение предела на «языке последовательностей» не выполняется.*

Пример 37. *Рассмотрим функцию Дирихле*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q \\ 0, & \text{если } x \in R \setminus Q \end{cases}$$

Данная функция не имеет предела ни в одной точке a действительной прямой. Действительно, если выбрать последовательность рациональных чисел, сходящихся к a, то соответствующая последовательность значений функции сходится к единице. Если выбрать последовательность иррациональных значений, то значения функции сходятся к нулю. Следовательно, на основании определения предела по Гейне данная функция не имеет предела.

Рассмотрим геометрический смысл предела функции в точке. Неравенство $|f(x) - A| < \epsilon$ равносильно двойному $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$. Число A есть предел функции $f(x)$ при $x \to a$, если для любого $\epsilon > 0$ найдется такая δ-окрестность точки a, что для всех $x \neq a$ из этой окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ будут заключены в полосе $A - \epsilon < f(x) < A + \epsilon$ (см. рис. 14).

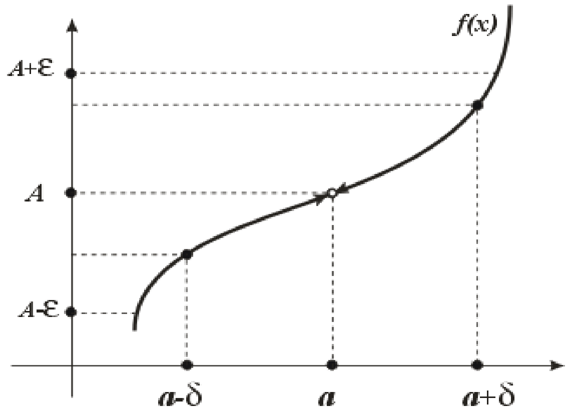

Рис. 14

Рассмотрим понятие предела функции в бесконечности.

Определение 42. $lim_{x\to\infty} = A$, *если* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta(\epsilon) > 0 : \forall\ x$ *таких, что* $|x| > \delta$, *выполняется* $|f(x) - A| < \epsilon$

Определение 43. $lim_{x\to a} f(x) = \infty$, *если* $\forall\ \epsilon > 0\ \ \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall\ x\ \ 0 < |x - a| < \delta, |f(x)| > \epsilon$.

$lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, *если* $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta(\epsilon) > 0 : \forall\ x\ \ |x| > \sigma,\ \ |f(x)| > \epsilon$

Аналогично формулируются определения при $x \to {}^{+}_{-}\infty$, а также определения, когда $A = {}^{+}_{-}\infty$.

Замечание 2. *Изученное понятие предела последовательности можно рассматривать как частный случай предела функции при* $x \to +\infty$.

Пример 38. *Доказать, что* $lim_{x\to 1} 1/(x-1)^2 = +\infty$.

$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta(\epsilon) > 0 : \forall\ x$ *выполняется* $0 < |x - 1| < \sigma \Rightarrow 1/(x-1)^2 > \epsilon$

$1/|x-1|^2 > 1/\delta^2 > \epsilon \Rightarrow \delta = 1/\sqrt{\epsilon}$.

Замечание 3. *Если при стремлении x к a переменная x принимает лишь значения, меньшие a или большие a и при этом $f(x)$ стремится к A, то говорят, что существуют односторонние пределы функции, т. е.* $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ *– предел слева или* $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$ *– предел справа. Очевидно, что если* $\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x) = A$, *то* $\lim_{x\to a} = A$. *Верно и обратное утверждение.*

Пример 39. *Покажем, что не существует предела* $f(x) = 2^{1/x}$, *при* $x \to 0$.

$lim_{x\to -0}2^{1/x} = lim_{x\to -0}2^{-\infty} = 0;$

$lim_{x\to +0}2^{1/x} = lim_{x\to +0}2^{+\infty} = +\infty.$

Пределы не равны $\Rightarrow$ $\lim_{x\to 0} 2^{1/x}$ *не существует.*

4.2 Свойства предела функции

Теорема 14.

1. *Если* $\exists\ lim_{x\to a}f(x) = A$, *то найдется проколотая окрестность точки a* $\dot{U}(a)$ *такая, что в этой окрестности функция* $f(x)$ *будет ограничена.*

2. *Если* $f(x)$ *есть постоянная* A *в некоторой окрестности точки* a, *то* $lim_{x\to a}f(x) = A$.

3. *Если* $lim_{x\to a}f(x) = A_1$ *и* $lim_{x\to a}f(x) = A_2$, *то* $A_1 = A_2$.

Утверждения данной теоремы вытекают из определения предела функции.

Теорема 15. *Если* $lim_{x\to a}f(x) = A,\ \ lim_{x\to a}g(x) = B$, *то*

1. $lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = A + B.$

2. $lim_{x\to a}f(x)g(x) = AB.$

3. $lim_{x\to a}f(x)/g(x) = A/B, B \neq 0,\ \ g(x) \neq 0.$

Эта теорема непосредственно следует из соответствующей теоремы о пределах последовательностей.

Теорема 16. *Пусть* $f : E \to R, g : E \to R, h : E \to R.$

1. *Если* $lim_{x\to}f(x) = A, lim_{x\to a}g(x) = B,$ *и* $A < B,$ *то* $\exists\ \dot{U}(a):$ $\forall\ x \in \dot{U}(a),\ \ f(x) < g(x).$

2. *Если для* $\forall x \in E,\ \ f(x) \le g(x) \le h(x)$ *и существует* $lim_{x\to a}f(x) = lim_{x\to a}h(x) = A,$ *то существует* $lim_{x\to a}g(x) = A.$

Пример 40 (Первый замечательный предел)**.**

$$\lim_{x\to 0}(\sin x)/x = 1.$$

Доказательство. 1. Покажем, что

$$\cos^2 x < (\sin x)/x < 1 \ \text{ при } \ 0 < |x| < \pi/2.$$

Так как $\cos^2 x, (\sin x)/x$ – четные функции, то достаточно рассмотреть случай $0 < x < \pi/2$. Из рис. 15 нетрудно увидеть соотношения между площадью сектора OCD, площадью треугольника AOB и площадью сектора AOB

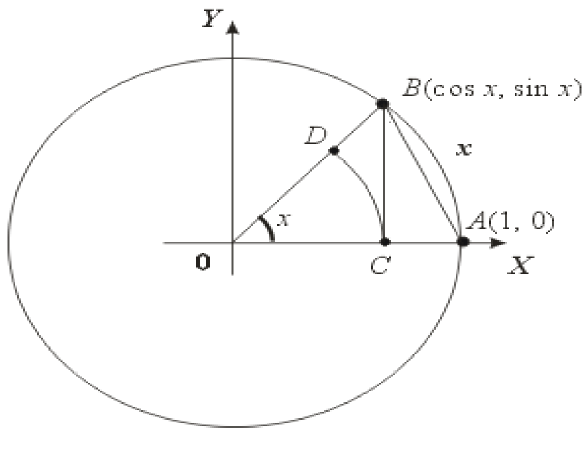

Рис. 15

$$S_{\prec OCD} = (1/2)|OC||\ \overset{\frown}{CD}\ | = (1/2)x\cos^2 x <$$

$$< S_{\triangle OAB} = (1/2)|OA||BC| = (1/2)\sin x <$$

$$< S_{\prec OAB} = (1/2)|OA||\ \overset{\frown}{AB}\ | = (1/2)x.$$

Разделив эти неравенства на $(1/2)x$, получим требуемый результат.

2. Из полученного выше результата следует, что

$$|\sin x| \leq |x| \ \ \forall x \in R.$$

3. Из 2) по теореме о предельном переходе в неравенствах вытекает, что

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0.$$

4. Теперь покажем, что

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)/x = 1.$$

Считая, что $|x| < \pi/2$, в силу полученного в 1) неравенства имеем

$$1 - \sin^2 x < \sin x/x < 1.$$

Но $\lim_{x\to 0}(1 - \sin^2 x) = 1$, значит, по теореме о предельном переходе в неравенствах следует, что

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)/x = 1.$$

$\square$

Следствие 2. $lim_{x\to 0}(tgx)/x = 1;$
$lim_{x\to 0}(arcsinx)/x = 1;$
$lim_{x\to 0}(arctgx)/x = 1.$

Пример 41. *Найти*

1. $\lim_{x\to 0}(\sin 6x)/4x;$

2. $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)/x^2.$

Решение.

$$\lim_{x\to 0}(\sin 6x)/4x = (3/2) \lim_{x\to 0}(\sin 6x)/6x = 3/2;$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\cos x)/x^2 = \lim_{x\to 0}(2 \sin^2 x/2)/x^2 = (1/2) \lim_{x\to 0}(\sin^2 x/2)/(x/2)^2 = 1/2.$$

Пример 42 (Второй замечательный предел)**.**

$$e = \lim_{x\to\infty} (1 + 1/x)^x$$

Доказательство данной формулы можно найти в учебнике Зорича В. А. [2].

Если в формуле положить $y = 1/x$, то получим другую запись для второго замечательного предела.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Пример 43. *Найти*

1. $\lim_{x\to\infty}(1+5/x)^{3x}$;

2. $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{2/x}$.

Решение. 1. $\lim_{x\to\infty}(1+5/x)^{3x} = \lim_{x\to\infty}(1+5/x)^{(x/5)^{(5/x)(3x)}} = \lim_{x\to\infty}(1+5/x)^{(x/5)^{15}} = e^{15}$;

2. $\lim_{x\to 0}(1-3x)^{2/x} = \lim_{x\to 0}(1-3x)^{(-1/(3x))^{(-3x)\cdot(2/x)}} = \lim_{x\to 0}(1-3x)^{(-1/(3x))^{(-6)}} = e^{-6}$.

Упражнение 3. *Доказать теоремы 14,15,16.*

4.3 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Определение 44. *Функция называется бесконечно малой при $x \to a$, если*

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0.$$

Пример 44. *Следующие функции являются бесконечно малыми:*

- $f(x) = 1/x,\ x\to\infty$
- $f(x) = x^2,\ x\to 0$
- $f(x) = 1-\cos x,\ x\to 0$

Заметим, что если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, равный A, то функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой в точке a. То есть, если функция $f(x)$ имеет предел A в точке a, то $f(x) = A+\alpha$, где $\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

Отметим некоторые свойства бесконечно малых функций.

Теорема 17. *1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция.*

2. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть бесконечно малая.

3. Произведение двух бесконечно малых является бесконечно малой.

Доказательство. Докажем для примера первое утверждение теоремы для двух бесконечно малых.

Из того, что существует $lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$, следует, что $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_1(\epsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < |x - a| < \delta_1$ выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \epsilon/2$. Аналогично, из существования предела $lim_{x \to a} \beta(x) = 0$, следует $\forall \epsilon > 0 \exists \delta_2(\epsilon) > 0$ такое, что $\forall x : 0 < |x - a| < \delta_2$ выполняется неравенство$|\beta(x)| < \epsilon/2$. Тогда $\forall x : 0 < |x - a| < \delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ выполнятся оба неравенства одновременно, т. е.

$$|\alpha(x) \pm \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \epsilon.$$

□

Определение 45. *Функция называется бесконечно большой, если для любого положительного числа ϵ найдется такое положительное $\delta(\epsilon)$, что для всех $x \neq a$ и удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$ будет выполнено неравенство $|f(x)| > \epsilon$.*

Аналогично можно дать определение бесконечно большой при $x \to \infty$. Приведем его в символической записи:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \quad \forall x : \ |x| > \delta \ \ |f(x)| > \epsilon.$$

Утверждение 2. *$\alpha(x)$ бесконечно малая функция при $x \to a \quad \Leftrightarrow 1/\alpha(x), x \to a$ — бесконечно большая.*

Пример 45. *$y = x^2$, $x \to 0$ – бесконечно малая функция, а $y = 1/x^2$, $x \to 0$ – бесконечно большая.*

4.4 Критерий Коши существования предела функции

Определение 46. *Будем говорить, что функция $f(x)$ удовлетворяет в точке a условию Коши, если для любого положительного числа ϵ найдется положительное $\delta(\epsilon)$, что для любых x_1, x_2, удовлетворяющих условию*

$$0 < |x_1 - a| < \delta, \;\; 0 < |x_2 - a| < \delta,$$

справедливо неравенство

$$|f(x_1 - f(x_2)| < \epsilon.$$

Теорема 18 (Критерий Коши)**.** $\exists \;\; lim_{x \to a} f(x) = A$ *тогда и только тогда, когда $f(x)$ удовлетворяет в точке a условию Коши.*

Аналогично формулируется критерий Коши существования пределов слева и справа в точке a, предела при $x \to \infty(+, -\infty)$.

4.5 Существование предела монотонной функции

Определение 47. *Пусть $f : E \to R$*

1. *Если для любых $x_1, x_2 \in E$ при $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$, то функция $f(x)$ возрастающая (убывающая).*

2. *Если для любых $x_1, x_2 \in E$ при $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) \leq f(x_2)(f(x_1) \geq f(x_2))$, то функция $f(x)$ неубывающая (невозрастающая).*

Определение 48. *(ограниченная функция). Функция называется ограниченной сверху (снизу) на множестве X, если $\exists M(m) \in R \; \forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M(f(x) \geq m)$.*

Определение 49. *(ограниченная функция). Функция называется ограниченной на множестве* X*, если* $\exists M, m \in R \; \forall x \in X \Rightarrow m \leq f(x) \leq M$.

Определение 50. *(точная верхняя и точная нижняя грани). Число* $M(m)$ *называется точной верхней (нижней) гранью функции* $f(x)$ *на множестве* X*, если выполнены следующие условия:*

1. $\forall x \in X \Rightarrow f(x) \leq M \; (f(x) \geq m)$.

2. $\forall \epsilon > 0 \;\; \exists x_0 \in X : f(x_0) > M - \epsilon \;\; (f(x_0) < m + \epsilon)$ *(рис. 16).*

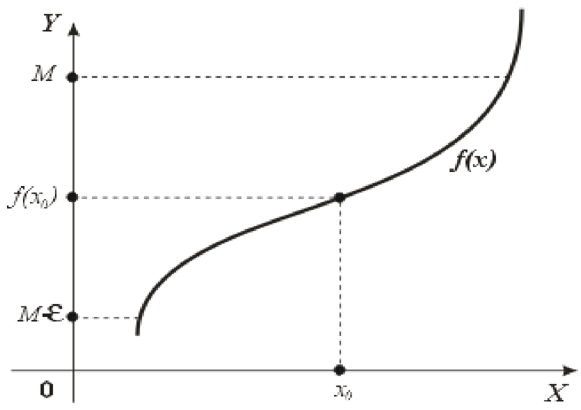

Рис. 16

Предположим, что числа (или символы $-\infty, +\infty$) $i = infE, s = supE$ являются предельными точками множества E.
Имеет место

Теорема 19. *Для того чтобы неубывающая на множестве* E *функция* $f : E \to R$ *имела предел при* $x \to s$*, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена сверху, а для того чтобы она имела предел при* $x \to i$ *необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена снизу.*

4.6 Сравнение асимптотического поведения функций

Определение 51. *Если для функций* $f(x), g(x)$ *существуют постоянные* $c > 0, \delta > 0$*, такие, что* $|f(x)| \leq c|g(x)|$ *при* $|x - a| < \delta, \;\; x \neq a$, *то говорят, что f является ограниченной по сравнению с g функцией в окрестности точки a и пишут, что $f(x) = O(g(x))$ при $x \to a$.*

Данное определение переносится и на случай, когда $x \to \infty$, $x \to \pm\infty$.

Пример 46. *1. Так как $|1/x^2| \leq |1/x|$ при $|x| \geq 1$, то $1/x^2 = O(1/x)$ при $x \to \infty$;*

2. $1/x = O(1/x^2)$ при $x \to 0$, так как $|1/x| \leq 1/x^2$ при $|x| \leq 1$.

Запись $f = O(1)$ при $x \to a$ означает, что функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a.

Определение 52. *Если $f = O(g)$ и $g = O(f)$ при $x \to a \Rightarrow f$ и g — одного порядка при $x \to a$.*

Пример 47. *Функции $f(x) = x(2+\sin 1/x)$ $g(x) = x$ $x \to 0$ являются бесконечно малыми одного порядка при $x \to a$, так как*

$$f/g = (x(2 + \sin 1/x))/x = 2 + \sin 1/x = |2 + \sin 1/x| \leq 3 \Rightarrow \ f = O(g)$$

$$g/f = 1/|2 + \sin 1/x| \leq 1 \ \Rightarrow \ g = O(f).$$

Определение 53. *Функции $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$, если $\exists \phi(x) : f(x) = \phi(x)g(x)$, где $\lim_{x\to a} \phi(x) = 1$.*

Иначе говоря, функции эквивалентны, если предел их отношения равен единице. Справедливы следующие соотношения, их еще называют асимптотическими равенствами:

$$\sin x \sim x \quad x \to 0; \tag{4.1}$$

$$tg\, x \sim x \ \ x \to 0;$$

$$\arcsin x \sim x \ \ x \to 0;$$

$$arctg\, x \sim x \ \ x \to 0;$$

$$e^x - 1 \sim x \ \ x \to 0;$$

$$\ln(1 + x) \sim x \ \ x \to 0; \tag{4.2}$$

$$(1 + x)^m - 1 \sim mx \ \ x \to 0. \tag{4.3}$$

Следующая теорема удобна для применения на практике для вычисления пределов.

Теорема 20. *Пусть* $f(x) \sim f_1(x), \quad g(x) \sim g_1(x)$ *при* $x \to a$ *Тогда, если существует предел*

$$\lim_{x\to a} f_1(x)/g_1(x),$$

то существует

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x),$$

причем

$$\lim_{x\to a} f_1(x)/g_1(x) = \lim_{x\to a} f(x)/g(x).$$

Пример 48. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}(\ln\cos x)/\sin x^2.$$

Решение. *Для решения воспользуемся асимптотическими равенствами (4.1), (4.2):*

$$\lim_{x\to 0}(\ln\cos x)/\sin x^2 = \lim_{x\to 0}(\ln(1-2\sin^2(x/2)))/x^2 =$$
$$= \lim_{x\to 0}(-2\sin^2(x/2))/x^2 = -2\lim_{x\to 0}(x^2/4)/x^2 = -1/2.$$

Определение 54. *Говорят, что функция* f *является бесконечно малой по сравнению с* g *при* $x \to a$, *и пишут* $f = o(g), \quad x \to a$, *если выполнено соотношение* $f(x) = \alpha(x)g(x)$, *где* $\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$. *Иначе говоря,* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a}\alpha(x) = 0$.

Пример 49.

1. $x^2 = o(x)$ *при* $x \to 0$, *так как* $lim_{x\to 0}x^2/x = lim_{x\to 0}x = 0$;

2. $1/x^2 = o(1/x)$ *при* $x \to +\infty$ *так как* $lim_{x\to\infty}x/x^2 = lim_{x\to\infty}1/x = 0$.

Справедлива теорема.

Теорема 21. *Для того чтобы функции* $f(x)$, $g(x)$ *были эквивалентными при* $x \to a$ *необходимо и достаточно, чтобы при* $x \to a$ *выполнялось хотя бы одно из условий:*

$$f(x) = g(x) + o(g(x))$$

или

$$g(x) = f(x) + o(f(x)).$$

Заметим, что функции $g(x)$ в первом условии и соответственно функция $f(x)$ во втором называются *главной частью функции.*

Пример 50. 1. *Функция* x *– главная часть функции* $\sin x$ *при* $x \to 0$, *так как* $\sin x = x + o(x)$ *при* $x \to 0$;

2. *Если* $P_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$, *то функция* $a_n x^n$ *является главной частью* $P_n(x)$ *при* $x \to \infty$, *так как* $P_n(x) = a_n x^n + o(x^n)$ *при* $x \to \infty$.

Метод выделения главной части бесконечно малых применяется к вычислению пределов.

Пример 51. *Найти предел*

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x+x^2}-1)/\sin 4x.$$

Решение. *Используя асимптотическое равенство (4.3) и асимптотическое равенство (4.1), найдем*

$$\lim_{x\to 0}(\sqrt{1+x+x^2}-1)/\sin 4x = \lim_{x\to 0}(1/2)(x+x^2+o(x^2))/(4x+o(x)) =$$

$$= (1/2)\lim_{x\to 0}(x+o(x))/(4x+o(x)) = 1/8.$$

Определение 55. *Если* $f = o(g)$ *при* $x \to a$ *и* $g(x)$*– бесконечно малая при* $x \to a$, *то говорят, что* $f(x)$ *- бесконечно малая более высокого по сравнению с* $g(x)$ *порядка при* $x \to a$.

Пример 52. x^2*– бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с* x *при* $x \to 0$.

Определение 56. *Если* $f(x)$, $g(x)$ *– бесконечно большие при* $x \to a$ *и* $f = o(g)$ *при* $x \to a$, *то говорят, что* g *– бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с* f.

Пример 53. *Функции* $f = x^3 + x^2 + 2x + 1$, $g = x^4 + 3x^2$ *– бесконечно большие при* $x \to \infty$, *и так как* $\lim_{x\to\infty} f/g = 0$, *то* g *— бесконечно большая более высокого порядка по сравнению с* f.

Отметим некоторые правила обращения с символами o(), O().

Утверждение 3. *1.* $o(f) + o(f) = o(f)$;

2. $o(f)$ *тем более есть* $O(f)$;

3. $O(f) + O(f) = O(f)$;

4. *Если* $g \neq 0$, *то* $o(f)/g = o(f/g)$, $O(f)/g = O(f/g)$.

Упражнение 4. *Найти пределы функций:*

1. $\lim_{x\to 1}(4x^5 + 9x + 7)/(3x^6 + x^3 + 1)$;

2. $\lim_{x\to 2}(x^3 + 3x^2 - 9x - 2)/(x^3 - x - 6)$;

3. $\lim_{x\to 0}(\sqrt{9 + 5x + 4x^2} - 3)/x$;

4. $\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{2x^2 - 3} - 5x)$;

5. $\lim_{x\to +\infty}(\sqrt{2x^2 + 3})/(4x + 2)$;

6. $\lim_{x\to\infty} 5^{2x/(x+3)}$;

7. $\lim_{x\to\pi/6}(\sin(x - \pi/6))/(\sqrt{3} - 2\cos x)$;

8. $\lim_{x\to 0}(tgx - \sin x)/x^3$;

9. $\lim_{x\to 0}(1 - \cos x)/x^2$;

10. $\lim_{x\to\infty}(1 + 1/x)^{7x}$;

11. $\lim_{x\to\infty}(x/(1 + x))^x$;

12. $\lim_{x\to 0}\ln(1 + x)/(3^x - 1)$;

13. $\lim_{x\to 0}(e^{4x} - 1)/tgx$;

14. $\lim_{x\to e}(\ln x - 1)/(x - e)$;

15. $\lim_{x\to\infty}((2x^2 + 3)/(2x^2 + 5))^{8x^2+3}$;

16. $\lim_{x\to 1}(1 + \sin\pi x)^{ctg\pi x}$.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определения предела функции в точке по Коши и по Гейне.

2. Какие свойства предела функции в точке справедливы?

3. Укажите два важных предела функции(первый и второй замечательный пределы).

4. Как асимптотически сравнивать функции?

Глава 5

Непрерывность функции

5.1 Определения непрерывной функции в точке

Пусть $f : E \to R$, a – точка области определения.

Определение 57. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если*

$$\forall U(f(a)) \ \ \exists U(a)\ (f(U(a)) \subset U(f(a))).$$

Дадим определение непрерывной функции в точке на «языке $\epsilon - \delta$» (ср. с определением предела по Коши.)

Определение 58. *Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке a, если $\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta(\epsilon) > 0\ \forall\ x\ \ |x - a| < \delta,\ |f(x) - f(a)| < \epsilon$.*

Замечание 4. *Если a – изолированная точка множества E, т. е. точка, в окрестности которой нет других точек множества E, кроме точки a, то $U(a) = a$. Следовательно, $f(U(a)) = f(a) \subset U(f(a))$, $\forall U(f(a))$. Таким образом, в любой изолированной точке функция непрерывна. Поэтому содержательная часть понятия непрерывности относится к случаю, когда a – предельная точка множества E.*

Из определения непрерывной функции следует, что

$$f : E \to R \ \text{ непрерывна в } a \in E, \text{где } a - \text{предельная точка} E \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Последнее равенство можно переписать в следующей форме

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x),$$

которое говорит о том, что непрерывные в точке функции перестановочны с операцией предельного перехода.

Приведем еще одно определение непрерывной функции.

Определение 59. *Функция называется непрерывной в точке* a, *если выполнено условие*

$$\lim_{\triangle x\to 0} \triangle y = 0,$$

где $\triangle y = f(a + \triangle x) - f(a)$.

Пример 54. *Функция* $f(x) = \sin x$ *непрерывна на* R. *Действительно,*

$$|\sin x - \sin a| = 2|\cos((x+a)/2)\sin((x-a)/2)| \le 2|\sin((x-a)/2)| \le$$

$$\le |x-a|/2 = |x-a| < \epsilon,$$

как только $|x - a| < \delta = \epsilon$.

Пример 55. *Любая последовательность* $f : N \to R$ *есть функция, непрерывная на множестве* N, *так как каждая точка множества* N *является его изолированной точкой.*

5.2 Точки разрыва и их классификация

Пример 56. *Исследовать на непрерывность*

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \ge 0 \\ x-1, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

(рис. 17)

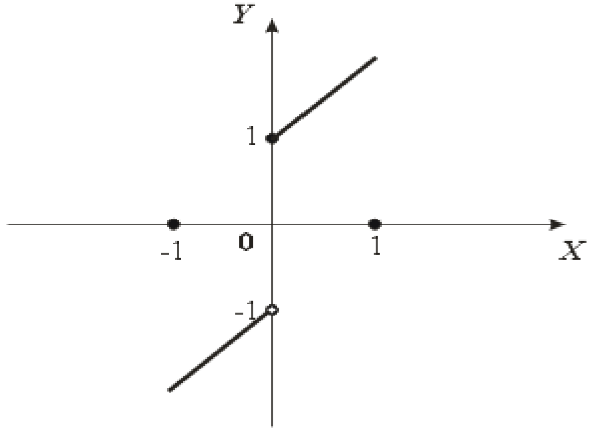

Рис. 17

По графику видно, что функция не является непрерывной в точке $x = 0$. Существуют односторонние пределы функции справа и слева в точке $x = 0$, которые не равны $\lim_{x\to -0} f(x) = -1$, $\lim_{x\to +0} f(x) = 1$. Т. е. определение непрерывной функции не выполнено, и точка $x = 0$ – точка разрыва функции.

Определение 60. *Точка a называется точкой разрыва функции $f(x)$, если эта функция не является непрерывной в данной точке.*

Записав отрицание определения непрерывной функции, получим определение точки разрыва.

Определение 61. *a - точка разрыва f, если*

$$\exists \epsilon > 0 \;\; \forall \delta(\epsilon) > 0 \;\; \exists x \in E : |x - a| < \delta \;\Rightarrow |f(x) - f(a)| > \epsilon.$$

Различают точки разрыва первого рода (когда существуют конечные односторонние пределы функции слева и справа при $x \to a$, не равные друг другу) и второго рода (когда хотя бы один из односторонних пределов слева или справа равен бесконечности или не существует). Так в примере на рис. 17 $x = 0$ является точкой разрыва первого рода. Точка a является точкой *устранимого разрыва*, если предел функции при $x \to a$ существует, но не равен значению функции в этой точке.

Пример 57. *Функция Дирихле разрывна во всех точках и все точки разрыва второго рода, так как на любом интервале есть рациональные и иррациональные числа.*

5.3 Свойства функций, непрерывных в точке

Отметим основные локальные свойства непрерывных функций.

Теорема 22. *Пусть $f : E \to R$ – функция, непрерывная в точке a. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Функция $f(x)$ ограничена в некоторой окрестности точки a;*

2. *Если $f(a) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки a все значения функции положительны или отрицательны вместе с $f(a)$.*

3. *Если $f(x)$, $g(x)$ – непрерывны в точке a, то функции: $f(x) + g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$ (при $g(a) \neq 0$) непрерывны в точке a;*

4. *Если функция $g(x) : Y \to R$ непрерывна в точке $b \in Y$, а функция $f : E \to Y$ непрерывна в точке $a, f(a) = b$, тогда композиция $g \circ f$ также непрерывна в точке a.*

Теорема 22 следует из определения непрерывности функции и соответствующих свойств предела функции.

Определение 62. *Функция называется непрерывной на множестве, если она непрерывна в каждой точке множества.*

То, что $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ обозначается следующим образом: $f(x) \in C_{[a,b]}$.

Перечислим основные глобальные свойства непрерывных функций.

Теорема 23. 1. *Если функция $f(x) \in C_{[a,b]}$, то она ограничена на $[a, b]$ (рис.18).*

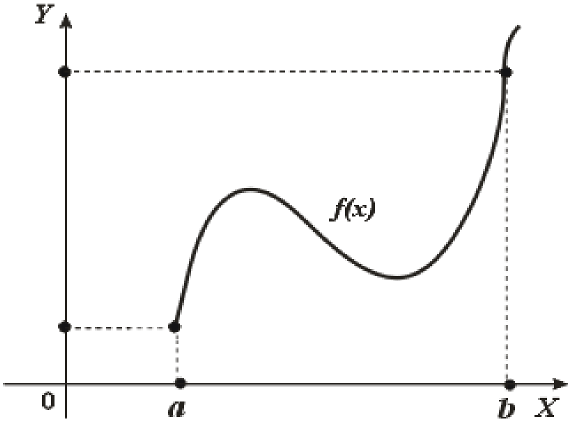

Рис.18

2. *Если* $f(x) \in C_{[a,b]}$, *то она достигает на* $[a, b]$ *наименьшего и наибольшего значения (рис. 19).*

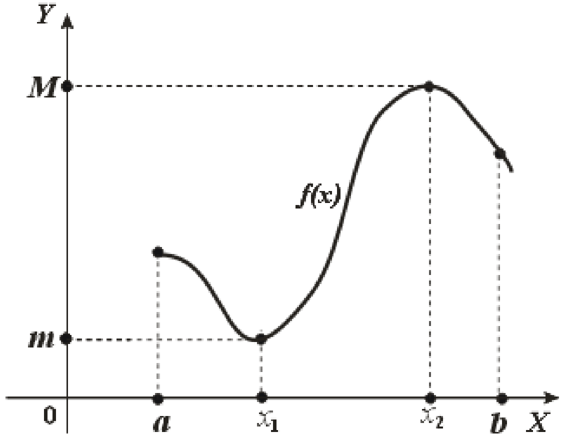

Рис.19

3. *Если* $f(x) \in C_{[a,b]}$ *и* $f(a)f(b) < 0$, *то существует* $c \in (a, b)$, $f(c) = 0$*(рис. 20).*

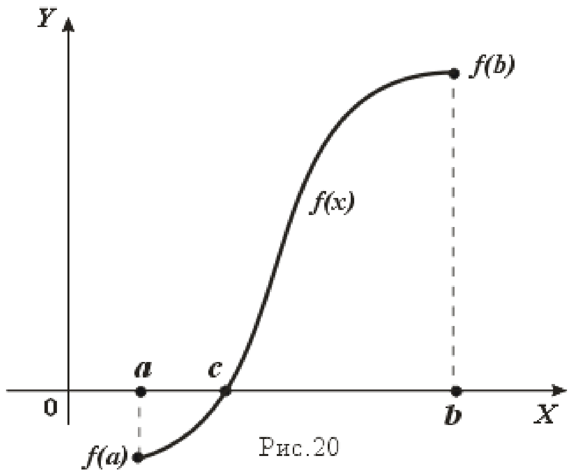

Рис.20

Пример 58. *Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$ и установить характер разрыва функции в этой точке:*

1. $f(x) = 1/(1 + 2^{1/x})$.

   Решение.

$$\lim_{x\to -0} 1/(1 + 2^{1/x}) = 1,$$

$$\lim_{x\to +0} 1/(1 + 2^{1/x}) = 0,$$

так как

$$\lim_{x\to +0} 2^{1/x} = \infty, \quad \lim_{x\to -0} 2^{1/x} = 0.$$

Следовательно, $f(x)$ в точке $x = 0$ имеет разрыв первого рода.

2.

$$f(x) = \begin{cases} 1/5(2x^2 + 3), & \textit{при } -\infty < x \le 1, \\ 6 - 5x, & \textit{при } 1 < x < 3, \\ x - 3 & \textit{при } 3 \le x < \infty \end{cases}$$

Решение. *Заметим, что на интервалах $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$, $(3, \infty)$ функция непрерывна. Поэтому разрывы возможны лишь в точках $x = 1$, $x = 3$, в которых изменяется аналитическое задание функции.*

$$\lim_{x\to 1-0} 1/5(2x^2 + 3) = 1;$$

$$\lim_{x\to 1+0} (6 - 5x) = 1;$$

$$f(1) = 1.$$

Таким образом, в точке $x = 1$ функция непрерывна. Так как

$$\lim_{x\to 3-0} (6 - 5x) = -9;$$

$$\lim_{x\to 3+0} (x - 3) = 0,$$

то точка $x = 3$ – точка разрыва первого рода.

Упражнение 5. *Исследовать на непрерывность*

1.

$$f(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & \textit{при } x \neq 0, \\ 0, & \textit{при } x = 0; \end{cases}$$

2. $f(x) = E(x) -$ *целая часть числа;*

3. $f(x) - arctg 1/(x-5)$ *в точке* $a = 5$;

4.

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \textit{при } x < 2, \\ x^2 - 1, & \textit{при } x \geq 2. \end{cases}$$

Глава 6

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

6.1 Понятие производной

Рассмотрим задачу, которая приводит к понятию производной. Пусть функция $u(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t. Найдем производительность труда в момент t_0. За период от t_0 до $t_0 + \triangle t$ количество продукции изменится от $u(t_0)$ до $u_0 + \triangle u = u(t_0 + \triangle t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период $z = \triangle u / \triangle t$. Тогда производительность труда в момент t_0:

$$z = \lim_{\triangle t \to 0} \triangle u / \triangle t.$$

Определение 63. *Производной функции $y = f(x)$ в фиксированной точке x называется предел*

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y / \triangle x$$

при условии существования этого предела.

Производная обозначается $f'(x)$ или y'.

Пример 59. *Вычислить производную функции $y = \sin x$. Найдем приращение функции:*

$$\triangle y = \sin(x + \triangle x) - \sin x = 2\sin(\triangle x/2)\cos(x + \triangle x/2).$$

По определению производной

$$(\sin x)' = \lim_{\triangle x \to 0} \triangle y / \triangle x = \lim_{\triangle x \to 0} (\cos(x + \triangle x/2)(\sin \triangle x/2)/(\triangle x/2)) =$$

$$= \cos x,$$

так как

$$\lim_{\triangle x \to 0} \cos(x + \triangle x/2) = \cos x.$$

Таким образом,

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Определение 64. *Правой (левой) производной в точке x называется предел справа(слева) в точке x $\lim_{\triangle x \to +0} \frac{\triangle y}{\triangle x}(\lim_{\triangle x \to -0} \frac{\triangle y}{\triangle x})$, если эти пределы существуют.*

Для обозначения правой (левой) производной в точке x используют символ: $f'(x+0)(f'(x-0))$. Необходимым и достаточным условием существования производной в точке x является равенство $f'(x+0) = f'(x-0)$.

Пример 60. *Доказать, что $f(x) = 3|x| + 1$ не имеет производной в точке $x = 0$. Составим $\triangle y = 3(0 + \triangle x) + 1 - 1 = 3 \triangle x$ при $\triangle x > 0$. При $\triangle x < 0$ $\triangle y = -3(0 + \triangle x) + 1 - 1 = -3 \triangle x$, значит*

$$\lim_{\triangle x \to -0} \triangle y / \triangle x = -3,$$

$$\lim_{\triangle x \to +0} \triangle y / \triangle x = 3.$$

Поэтому данная функция не имеет производной в точке $x = 0$.

6.2 Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, определенной и непрерывной на (a, b). Зафиксируем произвольную точку x на (a, b), и зададим приращение $\triangle x \neq 0$, причем $x+\triangle x \in (a, b)$. Пусть точки M, P – точки на графике $f(x)$, абсциссы которых равны $x, x+\triangle x$ (рис. 21). Координаты точек M и P имеют вид $M(x, f(x))$, $\quad P(x+\triangle x, f(x+\triangle x))$. Прямую, проходящую через точки M, P графика функции $f(x)$ будем называть секущей. Обозначим угол наклона секущей MP к оси X через $\phi(\triangle x)$.

Определение 65. *Если существует предельное положение секущей MP при стремлении точки P к точке M ($\triangle x \to 0$), то это предельное положение называется касательной к графику функции $f(x)$ в данной точке M этого графика.*

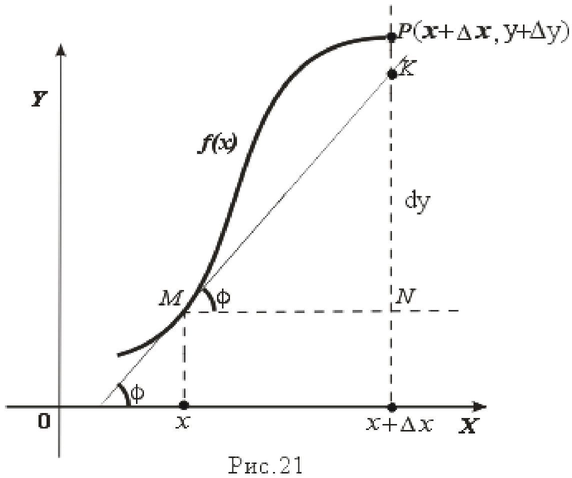

Рис.21

Из данного определения следует, что для существования касательной к графику $f(x)$ в точке M достаточно, чтобы существовал предел $\lim_{\triangle x \to 0} \phi(\triangle x) = \phi$, который равен углу наклона касательной к оси OX.

Справедливо утверждение.

Утверждение 4. *Если $f(x)$ имеет в данной точке x производную, то существует касательная к графику функции $f(x)$ в точке $M(x, f(x))$, причем угловой коэффициент этой касательной равен производной $f'(x)$.*

Из этого утверждения вытекает *геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0.*

Тогда уравнение касательной к кривой $f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Пример 61. *Составить уравнение касательной к кривой* $y = 2x^2 - x + 5$ *при* $x = -0,5$.

Решение. *Найдем производную в точке* $x = -0,5$;

$$y' = 4x - 1, \;\; y'(-0,5) = -3.$$

Уравнение касательной имеет вид:

$$y = 6 - 3(x + 0,5) \text{ или } y = -3x + 4,5.$$

6.3 Дифференцируемая функция

Пусть функция определена на интервале (a, b).

Определение 66. *Функция* $f(x)$ *называется дифференцируемой в точке* x, *если приращение* $\triangle y$ *этой функции в точке* x *представимо в виде*

$$\triangle y = A \triangle x + \alpha(\triangle x) \triangle x, \tag{6.1}$$

где A *– некоторое число, не зависящее от* $\triangle x$, *а* $\lim_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$.

В дальнейшем будем считать, что $\alpha(0) = 0$. В этом случае функция $\alpha(x)$ будет непрерывной в точке $\triangle x = 0$. Равенство 6.1 можно переписать иначе, так как функции $\alpha(\triangle x)$, $\triangle x$ – бесконечно малые в точке $\triangle x = 0$ и их произведение тоже бесконечно малая функция, поэтому

$$\triangle y = A \triangle x + o(\triangle x) \tag{6.2}$$

Справедлива теорема

Теорема 24. *Для того чтобы функция была дифференцируема в точке* x, *необходимо и достаточно, чтобы она имела в этой точке конечную производную.*

Доказательство. Необходимость. Пусть функция дифференцируема, тогда ее приращение представимо в виде (6.1). Поделив (6.1) на $\triangle x \neq 0$, получим

$$\triangle y / \triangle x = A + \alpha(\triangle x).$$

Переходя к пределу в последнем выражении при $\triangle x \to 0$, получим, что $A = f'(x)$.

Достаточность. Пусть существует конечная производная $f'(x)$, т. е. существует конечный предел

$$\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y / \triangle x = f'(x).$$

Обозначим $\alpha(\triangle x) = \triangle y / \triangle x - f'(x)$. Отсюда вытекает представление (6.1). □

Пример 62. *Доказать, что функция $|x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.*

Решение. *Найдем приращение функции в точке $x = 0$:*

$$\triangle y = |\triangle x|.$$

Поэтому

$$\lim_{\triangle x \to -0} \triangle y / \triangle x = -1,$$

$$\lim_{\triangle x \to +0} \triangle y / \triangle x = 1,$$

следовательно, функция $|x|$ в точке $x = 0$ не дифференцируема.

Следующая теореме выражает связь между непрерывностью и дифференцируемостью.

Теорема 25. *Если функция дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.*

Доказательство. Так как функция дифференцируема в точке x, то ее приращение представимо в виде (6.1), из которого следует, что $\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y = 0$, что означает непрерывность функции в данной точке. □

Заметим, что из непрерывности в данной точке не следует дифференцируемость в этой точке. Это видно из рассмотренного выше примера 62.

Производная непрерывной функции не обязательно непрерывна. Если функция имеет непрерывную производную на некотором множестве X, то функция называется *гладкой* на этом множестве. Если производная допускает конечное число точек разрыва (причем первого рода), то такая функция называется *кусочно гладкой.*

6.4 Правила дифференцирования

Приведем основные правила для нахождения производной:

1. Производная постоянной равна нулю, т. е. $c' = 0$.

2. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, т. е.
$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

3. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т. е.
$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

   Следствие 3. *Постоянный множитель можно выносить за знак производной:*
$$(cu(x))' = cu'(x).$$

4. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле при условии, что $v(x) \neq 0$
$$(u(x)/v(x))' = (u'(x)v(x) - u(x)v'(x))/v^2(x).$$

6.5 Дифференцирование сложной и обратной функций

Приведем правило по которому можно найти производную сложной функции $y = f(\phi(t))$.

Теорема 26. *Пусть функция $x = \phi(t)$ дифференцируема в точке t, а функция $y = f(x)$ дифференцируема в соответствующей точке $x = \phi(t)$. Тогда сложная функция $y = f(\phi(t))$ дифференцируема в точке t, причем справедлива формула*

$$(f(\phi(t)))' = f'(x)\phi'(t). \tag{6.3}$$

Доказательство. Зададим $x = \phi(t)$ отличное от нуля приращение $\triangle t$. Этому приращению отвечает приращение $\triangle x = \phi(t+\triangle t) - \phi(t)$ функции $x = \phi(t)$. Приращению $\triangle x$ отвечает приращение $\triangle y = f(x+\triangle x) - f(x)$. Так как функция $y = f(x)$ дифференцируема, то ее приращение $\triangle y$ представимо в виде (6.1):

$$\triangle y = f'(x) \triangle x + \alpha(\triangle x) \triangle x,$$

где $\lim_{\triangle x \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$. Поделив данное выражение на $\triangle t \neq 0$, будем иметь:

$$\triangle y / \triangle t = f'(x) \triangle x / \triangle t + \alpha(\triangle x) \triangle x / \triangle t.$$

Из дифференцируемости функции $x = \phi(t)$ в точке t вытекает, что

$$\lim_{\triangle t \to 0} \triangle x / \triangle t = \phi'(t).$$

Отметим, что из дифференцируемости функции $x = \phi(t)$ следует, что $\triangle x \to 0$ при $\triangle t \to 0$. Следовательно, $\lim_{\triangle t \to 0} \alpha(\triangle x) = 0$. Таким образом, получим необходимую формулу (6.3). □

Пример 63. *Найти y', если $y = 5^{\cos x}$.*

$$y' = 5^{\cos x}(-\sin x) \ln 5 = -5^{\cos x} \sin x \ln 5.$$

Для нахождения производной обратной функции существует следующее правило, а именно справедлива теорема.

Теорема 27. *Пусть функция $y = f(x)$ возрастает (или убывает) и непрерывна в некоторой окрестности точки x. Пусть, кроме того, эта функция дифференцируема в точке x и $f'(x) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности соответствующей точки $y = f(x)$ определена обратная функция $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция дифференцируема в точке $x = f^{-1}(y)$ и для ее производной справедлива формула*

$$(f^{-1}(y))' = 1/f'(x).$$

Доказательство. Так как функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки x, то существует обратная функция $x = f^{-1}(y)$, которая является строго монотонной и непрерывной в некоторой окрестности точки $y = f(x)$.

Пусть $\triangle y \neq 0$ приращение для y, а $\triangle x$ – соответствующее приращение обратной функции $x = f^{-1}(y)$. Тогда справедливо равенство

$$\triangle x / \triangle y = 1/(\triangle y / \triangle x).$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $\triangle y \to 0$ и учитывая, что в силу непрерывности обратной функции $\triangle x \to 0$, получим

$$\lim_{\triangle y \to 0} \triangle x / \triangle y = 1/(\lim_{\triangle x \to 0} \triangle y / \triangle x).$$

Т. е. $x'(y) = 1/y'(x)$. $\square$

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Пусть M – точка графика функции $f(x)$ (рис. 22), производная $f'(x)$ равна тангенсу угла наклона α касательной, проходящей через M, к оси OX, а производная обратной функции $(f^{-1}(y))'$ в соответствующей точке $y = f(x)$ равна тангенсу угла наклона β той же самой касательной к оси OY. Так как углы наклона связаны формулой $\alpha + \beta = \pi/2$, то формула нахождения производной обратной функции выражает очевидный факт: $tg\beta = 1/tg\alpha$.

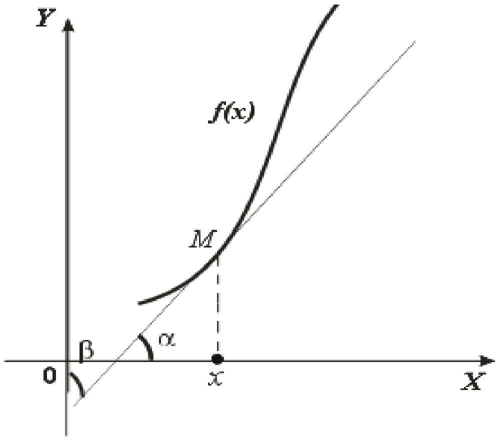

Рис.22

Пример 64. *Найти* x'_y, *если* $y = 2x^3 + 3x^5 + x$. *Имеем* $y' = 6x^2 + 15x^4 + 1$, *тогда* $x'_y = 1/y'_x = 1/(6x^2 + 15x^4 + 1)$.

6.6 Таблица производных основных элементарных функций

Легко получить следующую таблицу производных основных элементарных функций, используя определение производной. Для более подробного изучения данного материала рекомендуем использовать учебник [3].

1. $(u^\alpha(x))' = \alpha u^{\alpha-1}(x)u'(x)$, в частности,

$$(1/u(x))' = -u'(x)/u^2(x), \quad (\sqrt{u(x)})' = u'(x)/2\sqrt{u(x)};$$

2. $(\log_a u(x))' = (u'(x)\log_a e)/u(x)$ при $0 < a \neq 1$, $u(x) > 0$, в частности, $(\ln u(x))' = u'(x)/u(x)$;

3. $(a^{u(x)})' = a^{u(x)} \ln a u'(x)$ при $0 < a \neq 1$, в частности, $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$;

4. $(\sin u(x))' = \cos u(x)u'(x)$;

5. $(\cos u(x))' = -\sin u(x)u'(x)$;

6. $(tgu(x))' = u'(x)/\cos^2 u(x)$ $x \neq \pi/2 + \pi n$, $n = 0, + - 1, \ldots;$

7. $(ctgu(x))' = -u'(x)/\sin^2 u(x)$ $x \neq \pi n$, $n = 0, + - 1, \ldots;$

8. $(\arcsin u(x))' = u'(x)/\sqrt{1-u^2(x)},\ -1 < u(x) < 1;$

9. $(\arccos u(x))' = -u'(x)/sqrt1 - u^2(x),\ -1 < u(x) < 1;$

10. $(arctgu(x))' = u'(x)/(1+u^2(x));$

11. $(arcctgu(x))' = -u'(x)/(1+u^2(x)).$

Пример 65. *Найти y', если*

1. $y(x) = x^3 \arcsin x.$

$$y' = 3x^2 \arcsin x + x^3/\sqrt{1-x^2}.$$

2. $y(x) = \ln \sin(x^2+1).$

$$y' = (2x\cos(x^2+1))/\sin(x^2+1) = 2xctg(x^2+1)$$

Замечание 5. *Производная любой элементарной функции является элементарной функцией, т. е. операция дифференцирования не выводит элементарную функцию из класса элементарных функций.*

6.7 Производная степенно-показательной функции

Пусть задана функция $y = f(x)^{g(x)},\ f(x) > 0$, причем $f(x), g(x)$ – дифференцируемые функции в данной точке. Вычислим производную этой функции.

При этих ограничениях функция $z(x) = \ln y(x) = g(x)\ln f(x)$ будет дифференцируемой в силу теоремы о дифференцируемости сложной функции. Используя правило дифференцируемости произведения, найдем

$$(\ln y(x))' = g'(x)\ln f(x) + (g(x)f'(x))/f(x).$$

Или

$$y'(x)/y(x) = g'(x)\ln f(x) + (g(x)f'(x))/f(x).$$

Отсюда

$$y'(x) = (f(x))^{g(x)}(g'(x)\ln f(x) + (g(x)f'(x))/f(x)).$$

Пример 66. *Найти y', если $y = (\sin x)^x$. Найдем*

$$\ln y = x \ln \sin x,$$

тогда дифференцируя обе части равенства, получим

$$y'/y = \ln \sin x + (x \cos x)/\sin x.$$

Тогда

$$y' = (\sin x)^x (\ln \sin x + (x \cos x)/\sin x).$$

6.8 Понятие дифференциала и его геометрический смысл. Инвариантность формы первого дифференциала

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, дифференцируемую в данной точке x. Приращение $\triangle y$ ее представимо в виде

$$\triangle y = f'(x) \triangle x + \alpha(\triangle x) \triangle x,$$

где первое слагаемое линейно относительно $\triangle x$, а второе является при $\triangle x \to 0$ бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем $\triangle x$. Если $f'(x) \neq 0$, то первое слагаемое представляет собой главную часть приращения $\triangle y$. Эта главная часть приращения является линейной функцией аргумента $\triangle x$ и называется дифференциалом функции $y = f(x)$. Если $f'(x) = 0$, то дифференциал функции по определению считается равным нулю.

Определение 67. *Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется главная линейная относительно $\triangle x$ часть приращения $\triangle y$, равная произведению производной на приращение независимой переменной*

$$dy = f'(x) \triangle x.$$

Заметим, что дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной $dx = \triangle x$. Поэтому формулу для дифференциала договоримся записывать в следующем виде:

$$dy = f'(x)dx. \tag{6.4}$$

Выясним каков геометрический смысл дифференциала. Возьмем на графике функции $y = f(x)$ произвольную точку $M(x, y)$ (рис. 21). Проведем касательную к кривой $y = f(x)$ в точке M, которая образует угол α с положительным направлением оси OX, то есть $f'(x) = tg\alpha$. Из прямоугольного треугольника MKN

$$KN = MNtg\alpha = \triangle xtg\alpha = f'(x) \triangle x,$$

т. е. $dy = KN$.

Таким образом, дифференциал функции есть приращение ординаты касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в данной точке, когда x получает приращение $\triangle x$.

Отметим основные свойства дифференциала, которые аналогичны свойствам производной.

1. $dc = o$;
2. $d(cu(x)) = cdu(x)$;
3. $d(u(x) \pm v(x)) = du(x) \pm dv(x)$;
4. $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x) + u(x)dv(x)$;
5. $d(u(x)/v(x)) = (v(x)du(x) - u(x)dv(x))/v^2(x),\ v(x) \neq 0$.

Укажем еще на одно свойство, которым обладает дифференциал, но не обладает производная. Рассмотрим функцию $y = f(u)$, где $u = \phi(x)$, т. е. рассмотрим сложную функцию $y = f(\phi(x))$. Если каждая из функций f и ϕ является дифференцируемой, то производная сложной функции согласно теореме (6.3) равна $y' = f'(u) \cdot u'$. Тогда дифференциал функции

$$dy = f'(x)dx = f'(u)u'dx = f'(u)du,$$

так как $u'dx = du$. Таким образом,

$$dy = f'(u)du. \tag{6.5}$$

Последнее равенство означает, что формула дифференциала не изменяется, если вместо функции от x рассматривать функцию от переменной u. Это свойство дифференциала получило название *инвариантности формы первого дифференциала.*

Замечание 6. *Отметим, что в формуле (6.4) $dx = \triangle x$, а в формуле (6.5) du яляется лишь линейной частью приращения этой функции.*

6.9 Производные и дифференциалы высших порядков

Предположим, что функция $f'(x)$ является дифференцируемой в некоторой точке x интервала (a, b), т. е. имеет в этой точке производную. Тогда данную производную называют второй производной и обозначают $f^{(2)}(x), f''(x)$ или $y^{(2)}, y''(x)$. Аналогично можно ввести понятие второй , третьей и т. д. производных. По индукции можно ввести понятие производной n-го порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'. \tag{6.6}$$

Функцию, имеющую на некотором множестве конечную производную порядка n, называют n раз дифференцируемой на этом множестве. Методика нахождения производных высших порядков предполагает умение находить производные первого порядка, о чем говорит формула (6.6).

Если $u(x),\ v(x)$ две дифференцируемые функции, то для нахождения производной их произведения справедлива формула Лейбница

$$(u(x)v(x))^{(n)} = u^{(n)}v + nu^{(n-1)}v' + (n(n-1)/2)u^{(n-2)}v'' + \ldots + uv^{(n)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)},$$

где

$$C_n^k = (n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1))/k!, \ \ u^{(0)} = u, \ \ v^{(0)} = v.$$

Данная формула Лейбница особенно эффективна в случае, когда одна из перемножаемых функций имеет конечное число отличных от нуля производных и легко вычислить производные другой функции.

Пример 67. *Пусть* $y = e^x(x^2-1)$. *Найти* $y^{(10)}$. *Положим* $u(x) = e^x$, $v(x) = (x^2-1)$. *Согласно формуле Лейбница*

$$y^{(10)} = (e^x)^{(25)}(x^2-1) + 10(e^x)^{(9)}(x^2-1)' + (10\cdot 9/2)(e^x)^{(8)}(x^2-1)'',$$

так как следующие слагаемые равны нулю. Поэтому

$$y^{(10)} = e^x(x^2-1) + 10e^x 2x + (10\cdot 9/2)e^x(2) = e^x(x^2+20x+89).$$

Рассмотрим выражение для первого дифференциала

$$dy = f'(x)dx.$$

Пусть функция, стоящая в правой части, является дифференцируемой функцией в данной точке x. Для этого достаточно, чтобы $y = f(x)$, была дифференцируема два раза в данной точке x, а аргумент либо является независимой переменной, либо представляет собой дважды дифференцируемую функцию.

Определение 68. *Значение* $\delta(dy)$ *дифференциала от первого дифференциала (6.4) при* $\delta x = dx$, *называется вторым дифференциалом функции* $y = f(x)$ *и обозначается* d^2y.

Таким образом,

$$d^2y = \delta(dy)|_{\delta x = dx}.$$

Дифференциал d^ny можно ввести по индукции.

Определение 69. *Значение* $\delta(d^{n-1}y)$ *дифференциала от (n-1)-го дифференциала при* $\delta x = dx$, *называется дифференциалом n-го порядка от функции* $y = f(x)$ *и обозначается* d^ny. *Таким образом,* $d^ny = \delta(d^{n-1}y)|_{\delta x = dx}$.

Найдем выражение для d^2y. При этом рассмотрим два случая, когда x – независимая переменная и когда $x = \phi(t)$, т. е. является функцией переменной t.

1. Пусть $x = \phi(t)$, тогда

$$d^2 = \delta(dy)|_{\delta x = dx} = \delta(f'(x)dx)|_{\delta x = dx} =$$

$$= \{\delta(f'(x))dx + f'(x)\delta(dx)\}|_{\delta x = dx} = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x.$$

Итак,

$$d^2y = f''(x)(dx)^2 + f'(x)d^2x. \tag{6.7}$$

2. Пусть x – независимая переменная, тогда

$$d^2y = f''(x)(dx)^2,$$

так как в этом случае $\delta(dx) = (dx)'\delta x = 0$.

Аналогично, по индукции легко получить следующую формулу, если x - независимая переменная:

$$d^ny = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Из этой формулы следует, что $f^{(n)} = d^ny/(dx)^n$.

В заключение отметим, что дифференциалы второго и более высоких порядков не обладают свойством инвариантности, что сразу видно из формулы для дифференциала второго порядка (6.7).

6.10 Нахождение производных параметрически и неявно заданных функций

Пусть $x = \phi(t), y = \psi(t), t \in [a, b]$ – достаточно гладкие функции. Тогда говорят, что функция задана параметрически. Примером параметрически заданной функции является уравнение окружности: $x = a\cos t, y = a\sin t, t \in [0, 2\pi]$. Рассмотрим вопрос о нахождении производных $y = y(x)$ по переменной x.

В силу свойства инвариантности формы первого дифференциала следует, что $y' = dy/dx, dy = \psi'(t)dt, \ \ dx = \phi'(t)dt$. Поэтому

$$y'(x) = \psi'(t)/\phi'(t).$$

Используя формулу для второго дифференциала, получим

$$y^{(2)}(x) = d(y'(x))/dx = (\psi'(t)/\phi'(t))'dt/\phi'(t)dt =$$

$$= (\psi''(t)\phi'(t) - \phi''(t)\psi'(t))/(\phi'(t))^2.$$

Чтобы вычислить третью производную, запишем $y'''(x)$ в следующем виде

$$y'''(x) = d(y''(x))/dx.$$

Пример 68. *Функция задана параметрически*

$$x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t).$$

Наити $y''(x)$.

$$y'_t = a \sin t, \ x'_t = a(1 - \cos t).$$

Отсюда

$$y'(x) = (a \sin t)/(a(1 - \cos t)) = ctg(t/2), \ t \neq 2\pi k.$$

$$y''(x) = \frac{d(ctg(t/2))}{a(1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 t/2}.$$

Пусть функция задана неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Для нахождения производной функции, заданной неявно, нужно продифференцировать обе части уравнения, считая $y = y(x)$ функцией от x, а затем из полученного уравнения найти производную y'. Чтобы найти производные высших порядков, нужно дифференцировать необходимое число раз уравнение $F(x, y) = 0$, и затем выразить нужную производную.

Пример 69. *Найти* $y''(x)$, *если :*

$$x + y = e^{x-y}.$$

Дифференцируем данное уравнение по x, *считая* y *функцией от* x.

$$1 + y'_x(x) = e^{x-y}(1 - y'_x(x)), \text{откуда } y'_x = (e^{x-y} - 1)/(1 + e^{x-y}).$$

Дифференцируя уравнение еще раз, получим

$$y''_x(x) = e^{x-y}(1 - y'_x(x))^2 - e^{x-y}y''_x(x),$$

следовательно,

$$y''_x(x) = (1 - y'_x)^2 e^{x-y}/(1 + e^{x-y}) = 4e^{x-y}/(1 + e^{x-y})^3.$$

6.11 Основные теоремы дифференциального исчисления

Рассмотрим ряд важных теорем, которые полезны при исследовании функции.
Справедлива

Теорема 28. *(теорема Ролля) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), $f(a) = f(b)$. Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна точка ξ, такая, что $f(\xi) = 0$.*

Доказательство. Известно, что непрерывная на отрезке функция достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Если оба значения достигаются на концах отрезка, то они равны по условию, а это означает, что функция тождественно постоянна на $[a, b]$. Тогда производная такой функции равна нулю. Если же хотя бы одно из значений - максимальное или минимальное - достигается внутри отрезка, то производная равна нулю в силу теоремы Ферма. □

Геометрический смысл этой теоремы хорошо иллюстрируется на рисунке (рис. 23): по теореме Ролля существует хотя бы одна точка, в которой касательная к графику функции будет параллельна оси абсцисс, в этой точке производная равна нулю.

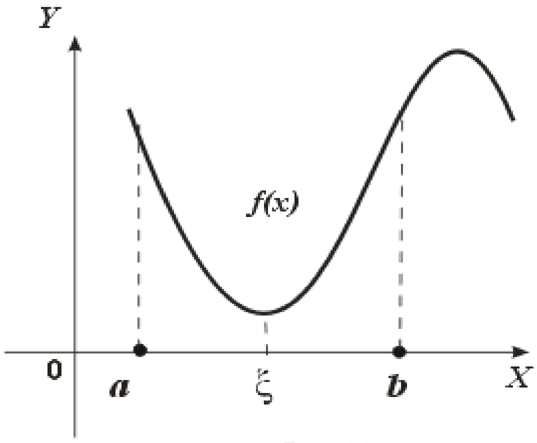

Рис.23

Отметим, что все условия теоремы существенны, при невыполнении хотя бы одного из них утверждение теоремы неверно.

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Теорема 29. *(теорема Лагранжа.) Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b). Тогда внутри отрезка существует по крайней мере одна точка ξ, такая, что*

$$f'(\xi) = (f(b) - f(a))/(b - a). \tag{6.8}$$

Доказательство. Введем новую функцию

$$g(x) = f(x) - f(a) - (f(b) - f(a))(x - a)/(b - a).$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы Ролля: она непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b), $g(a) = g(b) = 0$. Следовательно, найдется точка $\xi \in (a, b)$, такая, что

$$g'(\xi) = f'(\xi) - (f(b) - f(a))/(b - a) = 0.$$

Отсюда

$$f'(\xi) = (f(b) - f(a))/(b - a).$$

□

Геометрическая интерпретация теоремы Лагранжа приведена на рис. 24.

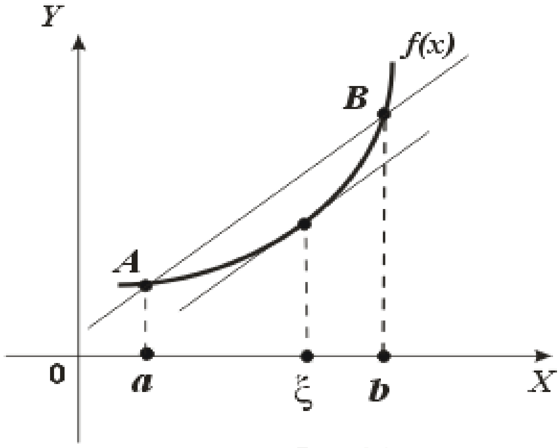

Рис.24

Заметим, что $(f(b) - f(a))/(b - a)$ является угловым коэффициентом секущей, проходящей через точки $A(a, f(a)), B(b, f(b))$ кривой $y = f(x)$, а $f'(\xi)$ есть угловой коэффициент касательной к той же кривой, проходящий через точку $C(\xi, f(\xi))$. Из теоремы Лагранжа следует, что на кривой $y = f(x)$ между точками A и B найдется такая точка C, касательная в которой параллельна секущей AB.

Следствие 4. *Если производная функции $f(x)$ равна нулю на некотором множестве, то функция тождественно постоянна на этом множестве.*

Данное следствие автоматически следует из формулы (6.8).

6.12 Правило Лопиталя

Будем говорить, что отношение функций $f(x)/g(x)$ представляет собой неопределенность вида $0/0$ при $x \to a$, если

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Раскрыть неопределенность – это значит вычислить предел $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$, если он существует. Аналогично можно ввести понятие неопределенности при $x \to a - 0 (x \to a + 0),\ \ x \to \pm\infty$.

Следующая теорема дает правило раскрытия неопределенности вида $0/0$.

Теорема 30. *(правило Лопиталя) Пусть множество* C_δ *– проколотая* δ*-окрестность точки* a*, функции* $f(x), g(x)$ *определены и дифференцируемы на* C_δ*,* $g'(x) \neq 0$*. Пусть*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

Тогда если существует $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$*, то существует и предел* $\lim_{x\to a} f(x)/g(x)$*, причем справедливо соотношение*

$$\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x).$$

Данная теорема без изменений переносится на случай неопределенности вида ∞/∞.

Замечание 7. *Данная теорема представляет собой лишь достаточное условие. То есть предел отношения функций может существовать и в случае, когда предел отношения производных не существует.*

Например, пусть $f(x) = x + \sin x, \quad g(x) = x - \sin x, \ x \to \infty$*. Попробуем применить правило Лопиталя*

$$\lim_{x\to\infty} (x + \sin x)/(x - \sin x) = \infty/\infty = \lim_{x\to\infty} (x + \sin x)'/(x - \sin x)' =$$

$$= \lim_{x\to\infty} (1 + \cos x)/(1 - \cos x),$$

но предел последнего выражения не существует, однако, если поделить числитель и знаменатель на x*, то легко получим конечное значение предела:*

$$\lim_{x\to\infty} (x + \sin x)/(x - \sin x) = \lim_{x\to\infty} (1 + \sin x/x)/(1 - \sin x/x) = 1.$$

Замечание 8. *Если производные* $f'(x), g'(x)$ *удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции, то правило Лопиталя можно применить повторно, т. е. предел отношения первых производных можно заменить пределом отношения вторых производных и т. д.*

Кроме рассмотренных выше видов неопределенностей вида $0/0$ и ∞/∞ часто встречаются неопределенности видов:

$$0 \cdot \infty, \ \infty - \infty, \ 1^\infty, \ 0^\infty, \ \infty^0.$$

Все эти неопределенности сводятся к двум вида $0/0$ и ∞/∞ путем алгебраических преобразований, продемонстрируем это на примере сведения неопределенностей вида $1^\infty,\ 0^\infty,\ \infty^0$. Каждая из этих неопределенностей имеет вид

$$y = f(x)^{g(x)}, \tag{6.9}$$

где $\lim_{x\to a} f(x) = 1; 0; \infty, \quad \lim_{x\to a} g(x) = \infty; 0$, Прологарифмировав выражение (6.9), получим (при $f(x) > 0$)

$$\ln y = g(x) \ln f(x).$$

Последнее выражение представляет собой при $x \to a$ неопределенность вида $0\cdot\infty$. Покажем, как свести неопределенность вида $0\cdot\infty$ к неопределенности вида $0/0$ или ∞/∞.

Пусть $y = f(x)g(x)$, где $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, а $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$. Но y можно записать иначе, а именно $y = f(x)/(1/g(x))$, а данное выражение представляет собой при $x \to a$ неопределенность вида $0/0$.

Проиллюстрируем на примерах применение правила Лопиталя.

Пример 70. *Применяя правило Лопиталя, вычислить пределы:*

1. $\lim_{x\to 0}(e^{ax}-e^{-2ax})/\ln(1+x) = 0/0 = \lim_{x\to 0}(ae^{ax}+2ae^{-2ax})/(1/(1+x)) = 3a$.

2. $\lim_{x\to\infty}(e^{1/x^2} - 1)/(2arctgx^2 - \pi) = 0/0 =$ $\lim_{x\to\infty}(-2x^{-3}e^{1/x^2})/(4x/(1 + x^4) = \lim_{x\to\infty} -e^{1/x^2}(1 + x^4)/2x^4 = -1/2$.

3. $\lim_{x\to 1}(1/\ln x - 1/(x - 1) = \infty - \infty = \lim_{x\to 1}(x - 1 - \ln x)/((x - 1)\ln x) = \lim_{x\to 1}(1-1/x)/(\ln x+1-1/x) = \lim_{x\to 1}(x-1)/(x\ln x+x - 1) = \lim_{x\to 1} 1/(\ln x + 2) = 1/2$.

4. $\lim_{x\to +0}(1/x)^{\sin x}$; *Пусть* $y = (1/x)^{\sin x}$, *тогда* $\ln y = \sin x \ln(1/x)$,

$$\lim_{x\to +0} \ln y = \lim_{x\to +0} \sin x \ln(1/x).$$

$$\lim_{x\to +0} \ln y = \lim_{x\to +0} \frac{-\ln x}{(1/\sin x)} =$$

$$= \lim_{x\to +0}((-1/x)/(-\cos x/\sin^2 x) = \lim_{x\to +0} \sin^2 x/(x\cos x) = 0.$$

Следовательно, $\lim_{x\to 0} \ln y = e^0 = 1$.

6.13 Выпуклость функции. Точки перегиба

Определение 70. *Множество точек на плоскости называется выпуклым, если отрезок, соединяющий любые две точки этого множества, целиком содержится в этом множестве.*

Примерами выпуклых множеств являются: треугольник, отрезок, полуплоскость, вся плоскость.

Определение 71. *Функция* $y = f(x)$ *называется выпуклой вниз (вверх) на множестве* X, *если для всех* $x_1, x_2 \in X$ *выполняется неравенство*

$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2) \ \ (f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2) \geq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)),$$

где $\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \ \lambda_1 + \lambda_2 = 1.$

Графики функций, выпуклых вниз и вверх, изображены на рис. 25a, 25b.

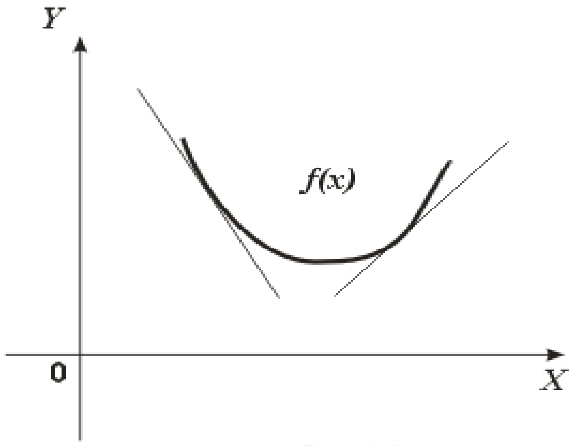

Рис.25a

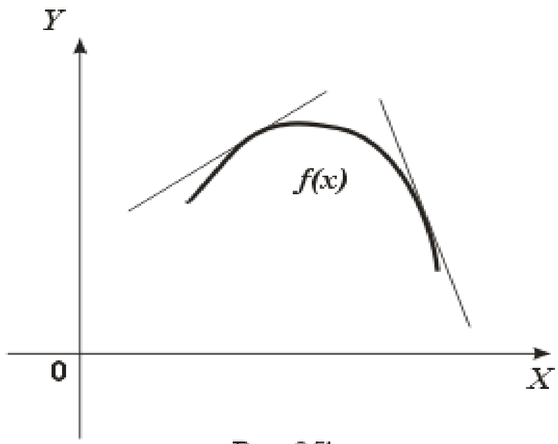

Рис.25b

Справедлива

Теорема 31. *Функция выпукла вниз (вверх) на множестве X тогда и только тогда, когда ее первая производная на этом промежутке монотонно возрастает (убывает).*

Геометрический смысл теоремы состоит в том, что если $f'(x)$ возрастает (убывает) на множестве X, то возрастает (убывает) угол наклона касательных к графику (рис. 26). Это и означает выпуклость функции вниз (вверх).

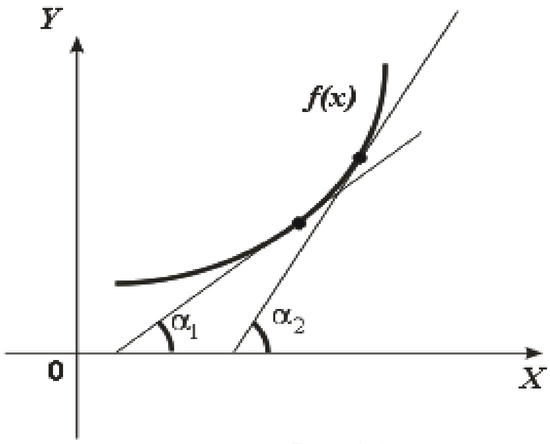

Рис.26

Приведем достаточное условие выпуклости функции вниз (вверх).

Теорема 32. *Если вторая производная дважды дифференцируемой функции положительна (отрицательна) на множестве X, то функция выпукла вниз (вверх) на этом множестве.*

Доказательство. Если $f''(x) > 0,\ x \in X$, то $f'(x)$ возрастает на множестве X и по предыдущей теореме функция выпукла вниз на множестве X. Аналогично рассматривается случай, когда $f''(x) < 0$. □

Необходимое условие выпуклости слабее: если функция выпукла вниз (вверх) на множестве X, то $f''(x) \geq 0,\ x \in X$ (или $f''(x) \leq 0$) $x \in X$. Например, функция $y = x^4$ выпукла вниз на всей числовой прямой, но $y'' = 12x^2$ обращается в ноль при $x = 0$.

Определение 72. *Точкой перегиба графика непрерывной функции называется точка, разделяющая интервалы, в которых функция имеет разные направления выпуклости.*

Нетрудно заметить, что точки перегиба – это точки экстремума первой производной. Отсюда следуют утверждения.

Теорема 33. *(необходимое условие перегиба). Вторая производная $f''(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой функции в точке перегиба x_0 равна нулю, т.е. $f''(x_0) = 0$.*

Теорема 34. *(достаточное условие перегиба). Если вторая производная дважды дифференцируемой функции при переходе через точку x_0, в которой $f''(x_0) = 0$ меняет свой знак, то x_0 есть точка перегиба ее графика.*

Заметим, что если в окрестности точки x_1 функция выпукла вниз, то график функции находится выше касательной, а если в окрестности точки x_2 функция выпукла вверх, то график функции находится ниже касательной. В точке перегиба x_0 касательная разделяет график - он лежит по разные стороны касательной (рис. 27).

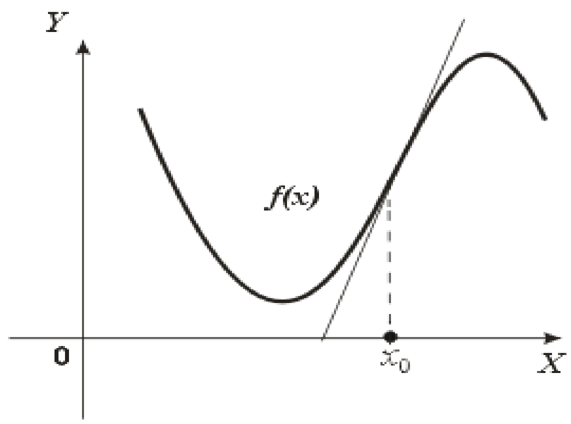

Рис.27

Рассмотрим пример, иллюстрирующий исследование функции на выпуклость и точки перегиба.

Пример 71. *Найти интервалы выпуклости и точки перегиба функции $y = x^4 + x^3 - 18x^2 + 24x - 12$.*

Решение. *Находим производные*

$$y' = 4x^3 + 3x^2 - 36x + 24,$$

$$y'' = 12x^2 + 6x - 36.$$

Отсюда $y'' = 0$ *при* $x_1 = -2,\ x_2 = 3/2$. *Следовательно,* $y'' > 0$ *на интервалах* $(-\infty, -2),\ (3/2, \infty)$ *и функция выпукла вниз;* $y'' < 0$ *на интервале* $(-2, 3/2)$ *и функция выпукла вверх на этом интервале. Так как при переходе через точки* $x_1 = -2$ *и* $x_2 = 3/2$ *вторая производная меняет знак, то точки (-2,-124) и (3/2,-129/16) являются точками перегиба.*

6.14 Асимптоты графика функции

Определение 73. *Прямая* $x = a$ *называется вертикальной асимптотой графика функции* $y = f(x)$, *если хотя бы один из пределов* $\lim_{x\to a+0} f(x)$ *или* $\lim_{x\to a-0} f(x)$ *равен* $+\infty$ *или* $-\infty$.

Пример 72. *График функции* $y = 1/(x-2)$ *имеет вертикальную асимптоту* $x = 2$, *так как* $\lim_{x\to 2+0} 1/(x-2) = +\infty,\ \ \lim_{x\to 2-0} 1/(x-2) = -\infty$ *(рис. 28).*

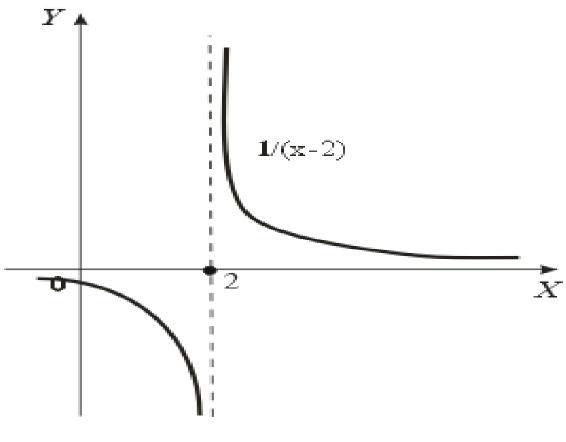

Рис.28

Определение 74. *Говорят, что прямая* $Y = kx + b$ *является наклонной асимптотой графика функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, *если* $f(x)$ *имеет вид*

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\lim_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

Справедлива

Теорема 35. *Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ асимптоту $Y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два предела*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = k, \quad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b.$$

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть график функции $y = f(x)$ имеет при $x \to +\infty$ асимптоту $Y = kx + b$, т. е. для $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

тогда

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)/x = (kx + b + \alpha(x))/x = k,$$
$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

2. Достаточность. Пусть существуют пределы, фигурирующие в условии теоремы. Тогда величина $f(x) - kx - b$ является бесконечно малой при $x \to +\infty$. Обозначив $f(x)-kx-b = \alpha(x)$ получим, что $f(x)$ имеет асимптоту согласно определению наклонной асимптоты.

□

Замечание 9. *Аналогично определяется наклонная асимптота и доказывается теорема 35 при $x \to -\infty$.*

Замечание 10. *Если $k = 0$ в определении наклонной асимптоты, то наклонная асимптота является горизонтальной.*

Пример 73. *Найти асимптоты кривой:*

$$y = 5x/(x - 3).$$

Решение. *Кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 3$, так как*

$$\lim_{x\to3\pm0} 5x/(x - 3) = \pm\infty.$$

Найдем наклонную асимптоту:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} y/x = \lim_{x\to\pm\infty} 5x/x(x - 3) = 0.$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(y - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} 5x/(x-3) = 5.$$

Итак, данная кривая имеет вертикальную асимптоту $x = 3$ и горизонтальную асимптоту $y = 5$.

6.15 Исследование функций и построение графиков

Для построения графика функции нужно провести следующие исследования:

1. Найти область определения функции.
2. Найти область значения функции.
3. Выяснить, является ли функция четной, нечетной или периодической.
4. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить характер разрывов.
5. Найти асимптоты графика функции.
6. Найти точки экстремума функции, установить интервалы монотонности функции.
7. Найти точки перегиба графика функции, определить интервалы выпуклости.
8. Найти точки пересечения с осями координат.

По полученным данным можно построить эскиз графика данной функции. Для примера построим график функции $y = 2x^3/(x^2 - 4)$.

1. Функция определена и непрерывна при всех $x \in R$, кроме точек $x = \pm 2$.
2. Область значения функции - $\forall y \in R$.

3. Функция нечетна, так как $y(-x) = -y(x)$, график функции симметричен относительно начала координат, поэтому достаточно провести исследование в интервале $[0, \infty)$.

4. Прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой, так как

$$\lim_{x \to 2 \pm 0} 2x^3/(x^2 - 4) = \pm\infty.$$

Найдем вертикальную асимптоту:

$$k = \lim_{x \to \infty} y/x = \lim_{x \to \infty} 2x^2/(x^2 - 4) = 2,$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (y - 2x) = \lim_{x \to \infty} 8x/(x^2 - 4) = 0,$$

т. е. данная кривая имеет наклонную асимптоту $y = 2x$.

5. Для нахождения промежутков возрастания и убывания найдем первую производную

$$y' = (6x^2(x^2 - 4) - 4x^4)/(x^2 - 4)^2 = 2x^2(x^2 - 12)/(x^2 - 4)^2.$$

В промежутке $[0, \infty)$ y обращается в нуль в точках $x = 0$, $x = 2\sqrt{3}$ и обращается в бесконечность в точке $x = 2$. Отметим, что в интервалах $[0, 2)$ и $(2, 2\sqrt{3})$ y' меньше нуля и функция убывает, а в интервале $(2\sqrt{3}, \infty)$ больше нуля и следовательно, функция возрастает. Очевидно, что точка $x = 2\sqrt{3}$ является точкой минимума.

6. Для нахождения промежутков выпуклости и точек перегиба, найдем вторую производную

$$y'' = 16x(x^2 + 12)/(x^2 - 4)^3.$$

y'' обращается в нуль в точке $x = 0$ и в бесконечность в точке $x = 2$. Ясно, что в интервале $(0, 2) y''$ меньше нуля и поэтому функция выпукла вверх, а в интервале $(2, 2\sqrt{3})$ и $(2\sqrt{3}, \infty)$ $y'' > 0$ и функция выпукла вниз. Кроме того, точка $x = 0$ является точкой перегиба, так как вторая производная меняет знак при переходе через эту точку.

7. $y(2\sqrt{3}) = 6\sqrt{3}$, $y(0) = 0$. Используя результаты исследования и учитывая нечетность функции, получим график (рис. 29).

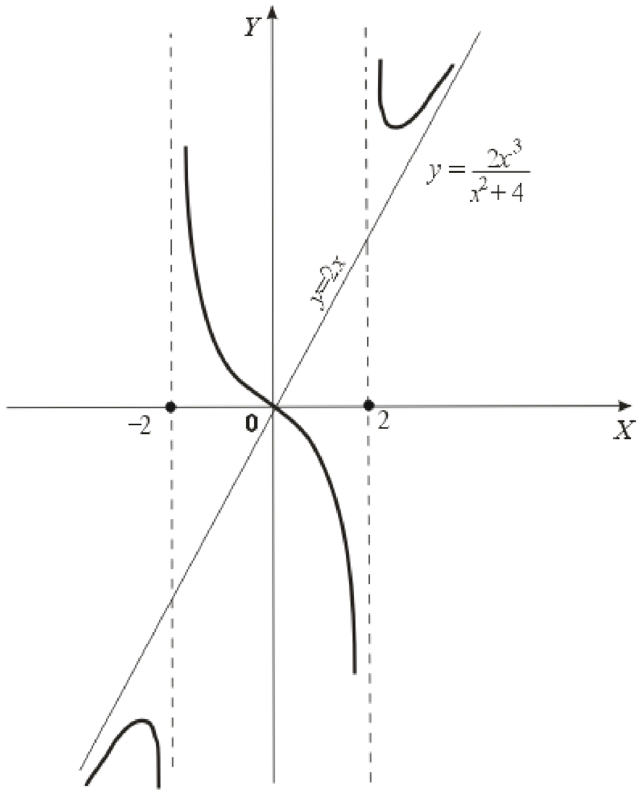

Рис. 29

Упражнение 6. *Провести исследование функций и построить их графики:*

1. $y = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 5$;

2. $y = x^2 e^{1/x}$;

3. $y = x + \ln(x^2 - 1)$;

4. $y = 1/2 \sin 2x + \cos x$.

6.16 Экономический смысл производной

Ранее (см. глава 7.1) было установлено, что производительность труда есть производная объема продукции по времени. Рассмотрим еще некоторые понятия, иллюстрирующие экономический смысл производной.

Пусть $y(x)$ – функция, характеризующая издержки производства, где x – количество выпускаемой продукции. Тогда $\triangle y/ \triangle x$ – среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная выражает предельные издержки производства. Аналогично можно определить предельную выручку, предельный доход, предельную полезность и другие предельные величины.

При исследовании экономических процессов важную роль играет понятие эластичности.

Определение 75. *Эластичностью функции $E_x(y)$ называется величина*

$$E_x(y) = \lim_{\triangle x \to 0} (\triangle y/y : \triangle x/x) = x/y \lim_{\triangle x \to 0} \triangle y/ \triangle x = x/y \cdot y'.$$

Рассмотрим некоторые свойства эластичности.

1. Эластичность функции равна произведению независимой переменной x на темп изменения функции $T_y = (\ln y)' = y'/y$, то есть
$$E_x(y) = xT_y.$$

2. Эластичность произведения (частного) двух функций равна сумме(разности) эластичностей этих функций:
$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v), \quad E_x(u/v) = E_x(u) - E_x(v).$$

Пример 74. *Как связаны предельные и средние полные затраты предприятия, если эластичность полных затрат равна 1?*

Решение. *Пусть затраты выражены функцией $y(x)$, где x – объем выпускаемой продукции. Тогда средние затраты равны y/x. Найдем эластичность отношения*

$$E_x(y/x) = E_x(y) - E_x(x) = E_x(y) - 1.$$

Но по условию $E_x(y) = 1$, поэтому $E_x(y/x) = 0$. Это означает, что с изменением объема продукции x средние затраты на единицу продукции не меняются, т. е. $y/x = c$, $y = cx$. Предельные издержки равны $y' = c$. Следовательно, предельные издержки совпадают со средними.

Пример 75. *Пусть известны функции спроса $q = 7 - p$ и функция предложения $s = p + 1$, где p – цена. Нужно найти равновесную цену и эластичности спроса и предложения.*

Решение. *Равновесная цена определяется из условия $q = s$, поэтому $7 - p = p + 1$, откуда $p = 3$. Найдем эластичность спроса и предложения*

$$E_p(q) = p/(p-7), \;\; E_p(s) = p/(p+1).$$

Для равновесной цены $p = 3$ получим $E_p(q) = -0,75$, $E_p(s) = 0,75$. Для значения $p = 3$ спрос является неэластичным, также как и функция предложения.

Упражнение 7. *Пусть функции спроса $d = (p+8)/(p+2)$ и предложения $s = p + 0,5$, где p – цена товара. Найти равновесную цену и эластичность спроса и предложения для этой цены.*

6.17 Максимизация прибыли

Пусть q – количество реализованного товара, $R(q)$ – функкия дохода, $C(q)$ – функция затрат на производство товара. Прибыль от реализации товара равна

$$P(q) = R(q) - C(q). \tag{6.10}$$

Из микроэкономики известно, что для того чтобы прибыль была максимальной, необходимо, чтобы предельный доход и предельные издержки были равны, т. е. $MR(q) = MC(q)$. Действительно, из необходимого условия экстремума для функции (6.10) следует, что $P'(q) = 0$, откуда и следует указанное равенство. Точка q_0, удовлетворяющая равенству $P'(q) = 0$, является подозрительной на экстремум. Согласно второму достаточному условию существования экстремума, если $P''(q_0) < 0$, то q_0 - точка максимума функции $P(q)$. Данное условие выполнится, если, например, $R''(q) < 0$, а $C''(q) > 0$, что согласуется с экономической теорией.

Пример 76. *Пусть*

$$R(q) = 100q - q^2, \;\; C(q) = q^3 - 37q^2 + 169q + 4000.$$

Тогда прибыль определяется формулой

$$P(q) = -q^3 + 36q^2 - 69q - 4000.$$

$$P'(q) = -3q^2 + 72q - 69 = 0,$$

или $q^2 - 24q + 23 = 0$. *Корни уравнения* $q_1 = 1,\ q_2 = 23$.

$$P''(q) = -6q + 72,\ \ P''(1) = 66,\ \ P''(23) = -66 < 0,$$

следовательно, при $q = 23\ \ P_{max} = 1290$.

6.18 Оптимизация налогообложения предприятий

Пусть t – налог с единицы выпускаемой продукции. Тогда общий налог с q единиц продукции составит $T = tq$. В этом случае функция прибыли будет иметь вид

$$P(q) = R(q) - C(q) - tq.$$

Исследуем вопрос о том, каким должен быть налог t, чтобы величина суммарного налога T была наибольшей? Рассмотрим следующий пример.

Пример 77. *Пусть* $R(q) = 16q - q^2,\ \ C(q) = q^2 + 1$, *тогда* $P(q) = 16q - 2q^2 - tq - 1$. *Найдем значение* q *максимизирующее функцию* $P(q)$. $P'(q) = 16 - 4q - t$. *Отсюда,* $q = 4 - t/4$. *Заметим, что* $P'' < 0\ \forall q:\ 0 < q < 16$. *Определим, при каких* t *суммарный налог* T *будет максимальным.*

$$T = qt = t(4 - t/4),\ \ T' = 4 - t/2 = 0,\ t = 8,\ \ T'' = -1/2 < 0,$$

следовательно, при $t = 8, q = 2,\ \ P(2) = 7,\ T_{max} = 16$. *Отметим, что при* $t = 0\ \ \ q = 4,\ \ \ P_{max} = 31$. *Следовательно, уменьшение налога стимулирует рост выпуска продукции и ведет к увеличению прибыли.*

Упражнение 8. *Общие затраты на производство q единиц товара определяются равенством $C(q) = aq + \lambda q^3$, $a < p$, $\lambda > 0$, p – цена за единицу товара. Найти оптимальный для производителя объем выпуска продукции и соответствующую ему прибыль.*

Глава 7

Интегральное исчисление функции одной переменной. Неопределенный интеграл

7.1 Понятие первообразной. Неопределенный интеграл

Определение 76 (первообразная). *Функция $F(x)$ называется первообразной функцией для функции $f(x)$ на множестве $X \subseteq R$, если в каждой точке этого множества $F'(x) = f(x)$.*

Например, функция $F(x) = x^2/2$ является первообразной для функции $f(x) = x$, так как $(x^2/2)' = x$. Очевидно, что если $F(x)$ – первообразная функция для функции $f(x)$ на множестве X, то функция $F(x) + C$, где C – некоторая постоянная, также является первообразной для функции $f(x)$, $x \in X$, так как $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$. Геометрически это означает, что если найдена одна кривая $y = F(x)$, являющаяся первообразной, то, сдвигая ее вдоль оси ординат, мы снова получим кривые, удовлетворяющие условию $(F(x) + C)' = f(x)$.

Справедлива

Теорема 36. *Если $F_1(x)$, $F_2(x)$ - первообразные для функции $f(x)$ на* *некотором множестве X, то найдется такое число C, что справедливо равенство $F_2(x) = F_1(x) + C$.*

Доказательство. Так как $(F_2(x) - F_1(x))' = F_2'(x) - F_1'(x) = f(x) - f(x) = 0,\ x \in X$, то $F_2(x) - F_1(x) = C$, то есть $F_2(x) = F_1(x) + C$. $\square$

Определение 77 (неопределенный интеграл)**.** *Совокупность всех первообразных функций для функции $f(x)$, определенных на множестве X, называется неопределенным интегралом от функции $f(x)$ на множестве X и обозначается*

$$\int f(x)dx.$$

Если $F(x)$ – некоторая первообразная для $f(x)$, то пишут

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

7.2 Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\int dF(x) = F(x) + C$. Справедливость этого равенства следует из очевидной цепочки равенств
$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C.$$
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$. Данная формула следует из равенства
$$d\int f(x)dx = d(F(x) + C) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx.$$
3. Если функции $f_1(x),\ f_2(x)$ имеют первообразные, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ тоже имеет первообразную, причем
$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$
4. Если функция $f(x)$ имеет первообразную и k — постоянная, то и функция $kf(x)$ также имеет первообразную, причем при $k \neq 0$ справедливо равенство
$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$$

Заметим, что свойства 3 и 4 следуют из свойств производной.

7.3 Таблица интегралов

Ранее была указана таблица производных от основных элементарных функций (см. 6.6). Приведем таблицу основных интегралов. Справедливость ниже указанных формул легко проверить дифференцированием.

1. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1)$,
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ (x \neq 0)$,
3. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C$,
4. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C, \quad (-\arccos x + C), \quad (|x| < 1)$,
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1);\ \int e^x dx = e^x + C$,
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$,
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C\ (x \neq \pi/2 + \pi n)$,
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C\ (x \neq \pi n)$,
10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = 1/(2a)\ln|\frac{x-a}{x+a}| + C, \quad (|x| \neq a)$,
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C, \quad (|x| > a)$,
12. $\int shdx = chx + C$,
13. $\int chxdx = shx + C$,
14. $\int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$,
15. $\int \frac{dx}{sh^2 x} = -cthx + C, x \neq 0$.

7.4 Метод подстановки

Замена переменной интегрирования является одним из эффективных методов сведения интеграла к табличному. Этот прием интегрирования называется методом подстановки.

Утверждение 5 (метод подстановки)**.** *Пусть функция $x = \phi(t)$ определена и дифференцируема на некотором множестве T, а X – множество значений этой функции, на котором определена $f(x)$. Тогда, если функция $f(x)$ имеет первообразную на X, то на T справедлива следующая формула*

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt. \tag{7.1}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на X, т. е. $F'(x) = f(x)$. Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$(F(\phi(t)))' = F'_x(\phi(t))\phi'(t) = f(\phi(t))\phi'(t).$$

Таким образом,

$$\int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C.$$

Так как $\int f(x)dx = F(x) + C$, то получим формулу (7.1). □

7.5 Интегрирование по частям

Утверждение 6 (метод интегрирования по частям)**.** *Пусть функции $u(x), v(x)$ дифференцируемы на множестве X, существует первообразная для функции $v(x)u'(x)$ на множестве X. Тогда на множестве X существует первообразная для функции $u(x)v'(x)$ и справедлива формула*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \tag{7.2}$$

Формулу (7.2) можно записать в виде

$$\int udv = u(x)v(x) - \int vdu$$

Доказательство. Производная от произведения функций находится по формуле $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$, умножая данное равенство на dx и вычисляя интеграл от обеих частей равенства, получим формулу (7.2). $\square$

Пример 78. *Вычислить интеграл*

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}.$$

Решение. *Отметим, что* $x \in (e^{-2}, e^2)$. *Произведем замену переменной* $t = \ln x \Rightarrow dt = \frac{dx}{x}$ *под знаком интеграла, в новой переменной интеграл имеет вид*

$$I = \int \frac{dt}{\sqrt{4-t^2}} = \arcsin\frac{t}{2} + C =$$

$$= \arcsin\frac{\ln x}{2} + C$$

Пример 79. *Вычислить интеграл*

$$I = \int x \arctan x dx.$$

Решение. *Положим* $\arctan x = u,\ xdx = dv$ *Отсюда следует, что* $du = \frac{dx}{1+x^2},\ v = \frac{x^2}{2}$*.Следовательно,*

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan x - (1/2)\int \frac{x^2dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - (1/2)\int \frac{x^2+1-1dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - (1/2)\int dx + (1/2)\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\arctan x - (1/2)x + (1/2)\arctan x + C$$

Окончательно,

$$I = \frac{x^2}{2}\arctan x - (1/2)x + (1/2)\arctan x + C$$

Упражнение 9. *Найти интегралы:*

1. $\int \ln x dx$;

2. $\int \arcsin x dx$;

3. $\int \sin x \ln(cos x) dx$;

4. $\int e^{2x} \sin bx dx$;

5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

6. $\int \frac{dx}{x \ln^5 x}$;

7. $\int \frac{x^2 dx}{x^6+4}$;

8. $\int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x}$;

7.6 Интегрирование рациональных дробей

Приведем примеры вычисления неопределенных интегралов от рациональных дробей, необходимый теоретический материал можно найти в учебнике [3].

Пример 80. *Вычислить интеграл*

$$I = \int \frac{(x^2 - x + 2)dx}{x^4 - 5x^2 + 4}.$$

Решение. *Разложим знаменатель на множители* $x^4 - 5x^2 + 4 = (x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$. *Подинтегральной функции отвечает сумма дробей*

$$\frac{(x^2 - x + 2)}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} + \frac{D}{x-2}.$$

Приводим данное равенство к общему знаменателю, получим равенство:

$$x^2 - x + 2 = A(x-1)(x-2)(x+2) + B(x+1)(x-2)(x+2) +$$

$$+ C(x+1)(x-1)(x-2) + D(x+1)(x-1)(x+2).$$

Чтобы найти коэффициенты A, B, C, D, *подставим в вышенаписанное равенство значения* $x = 1, x = -1, x = 2, x = -2$, *т. е. значения,* *обращающие знаменатель дроби в нуль. Получим систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными.*

$$x = 1: \;\; 2 = -6B \Rightarrow B = -1/3;$$

$$x = -1: \;\; 4 = 6A \Rightarrow A = 2/3;$$

$$x = 2: \;\; 4 = 12D \Rightarrow D = 1/3;$$

$$x = -2: \;\; 8 = -12C \Rightarrow C = -2/3.$$

Таким образом, справедливо разложение дроби на сумму дробей

$$\frac{(x^2 - x + 2)}{x^4 - 5x^2 + 4} = \frac{2}{3(x+1)} - \frac{1}{3(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-2)}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int \frac{(x^2 - x + 2)}{x^4 - 5x^2 + 4} dx = (2/3) \int \frac{dx}{x+1} - (1/3) \int \frac{dx}{x-1} -$$

$$-(2/3) \int \frac{dx}{x+2} + (1/3) \int \frac{dx}{x-2} =$$

$$(2/3) \ln|x+1| - (1/3) \ln|x-1| - (2/3) \ln|x+2| + (1/3) \ln|x-2| + C =$$

$$= (1/3) \ln|\frac{(x+1)^2(x-2)}{(x-1)(x+2)^2}| + C.$$

Пример 81. *Вычислить интеграл*

$$I = \int \frac{xdx}{x^3 + 1}.$$

Решение. *Разложим знаменатель на множители* $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$. *Подинтегральной функции отвечает сумма дробей*

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 - x + 1}.$$

Приводя данное равенство к общему знаменателю, получим равенство:

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Bx + C)(x + 1)).$$

Чтобы найти коэффициенты A, B, C, *приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях* x. *Получим систему из трех уравнений с тремя неизвестными.*

$$x^2 | A + B = 0,$$

$$x| -A+B+C=1,$$

$$x^0|A+C=0.$$

Решая данную систему уравнений, получим $A=-1/3,\quad B=1/3,\quad C=1/3$. *Таким образом, справедливо разложение дроби на сумму дробей*

$$\frac{x}{x^3+1}=\frac{-1}{3(x+1)}+\frac{1}{3(x^2-x+1)}.$$

Интегрируя, получим:

$$\int\frac{xdx}{x^3+1}=(-1/3)\int\frac{dx}{x+1}+(1/3)\int\frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}=-(1/3)\ln|x+1|+(1/3)I.$$

Вычислим интеграл

$$I_1=\int\frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}.$$

Предварительно выделим полный квадрат в знаменателе

$$x^2-x+1=(x-1/2)^2+3/4,$$

затем сделаем замену переменной $x-1/2=t$, *тогда*

$$I_1=\int\frac{(t+3/2)dt}{t^2+3/4}=\int\frac{tdt}{t^2+3/4}+(3/2)\int\frac{dt}{t^2+3/4}=$$

$$=(1/2)\ln(t^2+3/4)+\sqrt{3}\arctan\frac{2t}{\sqrt{3}}=$$

$$(1/2)\ln(x^2-x+1)+\sqrt{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

Таким образом,

$$I=\int\frac{xdx}{x^3+1}=-(1/3)\ln|x+1|+(1/6)\ln(x^2-x+1)+$$

$$(\sqrt{3}/3)\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$$

7.7 Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Пример 82. *Вычислить интеграл*

$$I = \int \frac{(\sqrt{x} + x^{1/3})dx}{x^{5/4} - x^{7/6}}.$$

Решение. *Сделаем подстановку*

$$x = t^{12},$$

чтобы избавиться от корней. Тогда

$$I = 12 \int \frac{t^6 + t^4}{t^{15} - t^{14}} t^{11} dt = 12 \int \frac{t^{15}(t^2+1)}{t^{14}(t-1)} dt =$$

$$= 12 \int \frac{t(t^2+1)dt}{t-1} = 12 \int (t^2 + t + 2)dt + 24 \int \frac{dt}{t-1} =$$

$$= 4t^3 + 6t^2 + 24t + 24 \ln|t-1| + C = 4x^{1/4} + 6x^{1/6} + 24x^{1/12} + 24 \ln|x^{1/12} - 1| + C.$$

Интегрирование биномиального дифференциала

Интеграл вида $\int x^m(a + bx^n)^p dx$, где m, n, p – рациональные числа, выражается через элементарные функции только в следующих случаях:

1. p – целое. Тогда, если $p > 0$, то используя формулу бинома Ньютона, можно легко проинтегрировать выражение, если $p < 0$, то полагаем $x = t^k$, где k – общий знаменатель дробей m, n.

2. $\frac{m+1}{n}$ – целое. Полагаем $a + bx^n = t^k$, где k – знаменатель дроби p.

3. $\frac{m+1}{n} + p$ – целое. Полагаем $a + bx^n = t^k x^n$, где k – знаменатель дроби p.

Пример 83. *Вычислить интеграл* $I = \int x^{1/3}(2 + \sqrt{x})^2 dx$.

Решение. *Здесь* $p = 2$*, поэтому возводим в квадрат выражение в скобках и вычисляем по таблице.*

$$I = \int x^{1/3}(2 + \sqrt{x})^2 dx = \int (x^{1/3}(x + 4x^{1/2} + 4)dx =$$

$$= \int (x^{4/3} + 4x^{5/6} + 4x^{1/3})dx =$$

$$= (3/7)x^{7/3} + (24/11)x^{11/6} + 3x^{4/3} + C.$$

Пример 84. *Найти интеграл* $\int x^{1/3}(2 + x^{2/3})^{1/4}dx$.

Решение. *В данном интеграле* $m = 1/3, n = 2/3, p = 1/4$, $\frac{m+1}{n} = \frac{1/3+1}{2/3} = 2$. *Поэтому делаем подстановку* $2 + x^{2/3} = t^4 \Rightarrow x = (t^4 - 2)^{3/2} \Rightarrow dx = 6t^3(t^4 - 2)^{1/2}dt$. *Запишем интеграл в новой переменной:*

$$I = 6\int (t^4-2)^{1/2}t^4(t^4-2)^{1/2}dt = 6\int t^4(t^4-2)dt = 6\int t^8dt - 12\int t^4dt =$$

$$= (2/3)t^9 - (12/5)t^5 + C =$$

$$= (2/3)(2 + x^{2/3})^{9/4} - (12/5)(2 + x^{2/3})^{5/4} + C.$$

Упражнение 10. *Найти интегралы:*

1. $\int \frac{(1+x^{1/4})^{1/3}}{\sqrt{x}}dx$;
2. $\int x^3(1 + x^2)^{1/2}dx$;
3. $\int \frac{dx}{x(1+x^{1/3})^2}$;
4. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$;
5. $\int \frac{x+x^{2/3}+x^{1/6}}{x(1+x^{1/3})}dx$;
6. $\int \sqrt{x^2 + x + 1}dx$.

7.8 Интегрирование тригонометрических функций

Интегралы вида $I = \int \sin^m x \cos^n x dx$, где m, n – рациональные числа, сводятся к интегралам от биномиального дифференциала. Причем,

1. Если n – нечетное, то используется подстановка $\sin x = t$.
2. Если m – нечетное, то используется подстановка $\cos x = t$.

3. Если $m+n$ – четное, то используется подстановка $\tan x = t$.

Пример 85. *Вычислить интеграл* $I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx$.

Решение. *Введем замену переменной* $\sin x = t \Rightarrow \cos x dx = dt$, *тогда*

$$I = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^6 x} = \int \frac{(1-t^2)dt}{t^6} =$$

$$= \int t^{-6} dt - \int t^{-4} dt = -\frac{t^{-5}}{5} + \frac{t^{-3}}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{1}{3\sin^3 x} + C.$$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$, где R – рациональная функция от $\sin x$, $\cos x$, приводятся к интегралам от рациональных функций подстановкой $\tan(x/2) = t$, $|x| < \pi$. Эта подстановка называется универсальной. Заметим, что

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Иногда вместо подстановки $\tan(x/2) = t$ целесообразно сделать подстановку $\cot(x/2) = t, 0 < x < 2\pi$. Как правило, универсальная подстановка приводит к громоздким вычислениям, поэтому для сокращения вычислений прибегают к другим подстановкам.

1. Если выполнено условие $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $\cos x = t$.

2. Если выполнено условие $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $\sin x = t$.

3. Если выполнено условие $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то применяют подстановку $\tan x = t$, или $\cot x = t$.

Пример 86. *Вычислить интеграл* $I = \int \frac{dx}{5+\sin x + 3\cos x}$.

Решение. *Сделаем подстановку* $\tan(x/2) = t, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, x = 2\arctan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$. *Тогда*

$$I == 2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{5 + \frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}} = 2\int \frac{dt}{2t^2+2t+8} = \int \frac{dt}{t^2+t+4} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1/2)^2 + 15/4} = \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan \frac{2t+1}{\sqrt{15}} + C =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{15}} \arctan \frac{2\tan(x/2)+1}{\sqrt{15}} + C.$$

Пример 87. *Вычислить интеграл* $I = \int \frac{2\tan x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx.$

Решение. *Разделим числитель и знаменатель на* $\cos^2 x$, *затем сделаем замену переменной* $\tan x = t \Rightarrow \frac{dx}{\cos^2 x} = dt$. *Получим*

$$\int \frac{2\tan x + 3}{\sin^2 x + 2\cos^2 x} dx = \int \frac{(2\tan x + 3)\frac{dx}{\cos^2 x}}{\tan^2 x + 2} =$$

$$= \int \frac{2t+3}{t^2+2} dt = \ln(t^2+2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= \ln(\tan^2 x + 2) + \frac{3}{\sqrt{2}} \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{2}} + C.$$

Упражнение 11. *Найти интегралы:*

1. $\int \frac{\sin x}{1+\sin x} dx;$

2. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin^3 x} dx;$

3. $\int \frac{dx}{\sin x(2+\cos x - 2\sin x)};$

4. $\int \tan^3 x;$

5. $\int \frac{1}{\cos^4 x \sin^2 x} dx;$

6. $\int \cot^6 x.$

Контрольные вопросы

1. Элементы теории множеств. Операции над множествами.
2. Виды отображений. Мощность множеств.
3. Пространство действительных чисел. Аксиоматика действительных чисел.
4. Числовые множества. Ограниченные множества. Принцип верхней грани.
5. Определение предела числовой последовательности. Примеры.
6. Свойства предела последовательности (теорема).

7. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности. Свойства. Примеры.
8. Арифметические операции над последовательностями.
9. Предельный переход и неравенства.
10. Существование предела монотонной последовательности. Теорема Вейерштрасса.
11. Число e.
12. Фундаментальные последовательности. Критерий Коши. Примеры.
13. Подпоследовательности. Частичный предел последовательности. Лемма Больцано – Вейерштрасса. Нижний и верхний предел последовательности.
14. Приложения последовательностей в экономике. Формулы простых и сложных процентов. Понятие об аннуитете.
15. Предел функции. Определение предела функции по Коши и по Гейне. Определение предела функции на «языке окрестностей».
16. Свойства предела функции (теорема).
17. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Примеры.
18. Арифметические операции над пределами функций.
19. Предельный переход и неравенства.
20. Первый замечательный предел.
21. Критерий Коши существования предела функции.
22. Второй замечательный предел.
23. Предел монотонной функции.
24. Сравнение асимптотического поведения функций. Символы o и O. Понятие эквивалентных функций. Примеры. Таблица эквивалентных функций.
25. Непрерывность функции в точке. Простейшие свойства непрерывных функций.
26. Точки разрыва и их классификация.
27. Глобальные свойства непрерывных функций. Теорема Коши о промежуточном значении непрерывной функции. Теоремы Вейерштрасса.

28. Равномерная непрерывность функций. Теорема Кантора.
29. Дифференцируемость функции в точке. Производная. Дифференциал. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Связь непрерывности и дифференцируемости функции.
30. Уравнение касательной к графику функции. Геометрический смысл производной и дифференциала.
31. Производные от неявно и параметрически заданных функций.
32. Правила дифференцирования сложной и обратной функций. Инвариантность формы первого дифференциала.
33. Основные правила дифференцирования.
34. Производные и дифференциалы высших порядков.
35. Основные теоремы дифференциального исчисления (Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши).
36. Правило Лопиталя.
37. Монотонность функции. Достаточные условия монотонности. Точки экстремума функции. Необходимое и достаточное условия экстремума.
38. Выпуклость и точки перегиба графика функции. Необходимое и достаточное условия существования точек перегиба.
39. Асимптоты графика функции.
40. Исследование функции и построение графика функции.
41. Приложение производной в экономике. Эластичность, ее свойства. Оптимизация прибыли, издержек, налогообложения.
42. Понятие первообразной функции и неопределенного интеграла.
43. Таблица основных интегралов.
44. Классы функций, интегрируемых в элементарных функциях.

Библиографический список

1. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по курсу математического анализа/ Б. П. Демидович. — М. : Изд-во Моск. ун-та ЧеРо, 1997. — 625 с.

2. Зорич В. А. Математический анализ.Т. 1/ В. А. Зорич. — М. : МЦНМО, 2002.—664с.

3. Ильин В. А. Математический анализ. Ч. 1 /В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. — М. : МГУ, 1985.— 662 с.

4. Красс М. С. Математика для экономических специальностей/М. С. Красс. — М. : «Инфра-М», 2003. — 704 с.

5. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов/Н. Ш. Кремер. — М. : «Юнити-Дана», 2007. — 479 с.

6. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1/Л. Д. Кудрявцев. — М. : Дрофа, 2003. — 704 с.

7. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах/И. А. Марон. —М. :Наука, 1970. — 400 с.

8. Сборник задач по математическому анализу. Т. 1 . Предел. Непрерывность. Дифференцируемость: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. /Л. Д. Кудрявцев [и др.] — М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. — 496 с.

9. Справочное пособие по математическому анализу/И. И. Ляшко [и др.] — М. : Едиториал УРСС, 2001. — 360 с.

Учебное издание

Романова Ольга Александровна

Краткий курс математического анализа

ISBN 978-5-9624-0673-2

Редактор Э. А. Невзорова

Темплан 2012 г. Поз. 164

Подписано в печать 17.11.2012. Формат 60x90 1/16
Уч.-изд. л. 6,0. Уч.-изд. л. 5,2. Тираж 100 экз. Заказ 178

Издательство ИГУ
664003, Иркутск, бульвар Гагарина, 36