# Задача Коши для вырожденных интегро-дифференциальных уравнений в банаховых пространствах

М.В. Фалалеев
Иркутский государственный университет
1, улица Карла Маркса
Иркутск 664000
Россия
email: mihail@ic.isu.ru

## 1 Постановка задачи

Рассматривается задача Коши

$$Bx^{(k)}(t) = D_{k-1}(x(t)) + \int_0^t k(t,s)x(s)ds + f(t), \tag{1}$$

$$x^{(i)}(0) = 0,\ i = \overline{0, k-1}, \tag{2}$$

здесь

$$D_{k-1} = A_{k-1}(t)\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}} + \cdots + A_1(t)\frac{d}{dt} + A_0(t),$$

$B,\ A_i(t),\ k(t,s)$ - замкнутые линейные операторы из $E_1$ в $E_2$, $E_1,\ E_2$ - банаховы пространства, оператор-функции $A_i(t)$ и $k(t,s)$ достаточное число раз сильно непрерывно дифференцируемы, $D(k) = D(k(t,s))$ и $A = \bigcap_{i=0}^{k} D(A_i(t))$ не зависят от $t$, $\overline{R(B)} = R(B)$, $D(B) \subset D(k) \bigcap A$, $\overline{D(B)} = \overline{D(k)} = \overline{A} = E_1$, $B-$ фредгольмов, $f(t)$ - достаточно гладкая функция $t$ .

Пусть $\varphi_i,\ i = \overline{1,m}$ - базис ядра $N(B)$ , $\psi_i,\ i = \overline{1,m}$ - базис ядра $N(B^*)$ , $\gamma_i,\ i = \overline{1,m}$ и $z_i,\ i = \overline{1,m}$ - соответствующие им биортогональные системы элементов из $E_2$ и $E_1^*$ , через $\Gamma$ будем обозначать оператор Шмидта [1] , соответствующий $B$ , а через $B^+$ псевдообратный оператор [2] , связанный с $\Gamma$ соотношением [3]

$$B^+ = \Gamma - \sum_{i=1}^{m} < \cdot, \psi_i > \varphi_i.$$

Задача Коши (1)-(2) в случае постоянных операторов $A_i(t)$ , $k(t,s) = 0$ и $k = 1, 2$ исследовалась ранее в работах [3-8] , где в замкнутой форме были построены непрерывные и обобщенные решения этих задач. Интегральное уравнение (1) при $k = 0$ и $k(t,s) = k(t-s)$ исследовалось в работах [9, 10], где так же в замкнутой форме были построены непрерывное и обобщенное решения этого уравнения. В данной заметке строятся непрерывные решения задачи (1) - (2) в сформулированной постановке.

# 2 Редукция к системе Вольтерра 1 рода

Решение задачи (1)-(2) будем искать в виде [3]

$$x(t) = B^+ v(t) + \sum_{i=1}^{m} \xi_i(t)\, \varphi_i, \tag{3}$$

$$< v(t), \psi_j >= 0,\ j = \overline{1,m}. \tag{4}$$

$$v^{(i)}(0) = 0,\ i = \overline{0, k-1},$$

$$\xi_j^{(i)}(0) = 0,\ i = \overline{0, k-1},\ j = \overline{1,m}.$$

После подстановки (3) в (1) получаем относительно $v(t)$ дифференциальное уравнение

$$v^{(k)}(t) = D_{k-1}(B^+ v(t)) + \int_0^t k(t,s) B^+ v(s) ds + f(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{m} \{ \int_0^t \xi_i(s)\, k(t,s)\, \varphi_i ds + D_{k-1}(\xi_i(t) \varphi_i) \},$$

которое эквивалентно интегральному уравнению

$$v(t) = \int_0^t \mathcal{K}(t,s) \{ B^+ v(s) + \sum_{i=1}^{m} \xi_i(s) \varphi_i \} ds + \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} f(s) ds, \tag{5}$$

здесь

$$\mathcal{K}(t,s) = D_0^*(s) + (t-s) D_1^*(s) + \cdots + \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} D_{k-1}^*(s) + \int_s^t \frac{(t-\tau)^{k-1}}{(k-1)!} k(\tau, s) d\tau,$$

$$D_i^*(t) = A_0^{k-1-i}(t) - \frac{d}{dt}(A_1^{k-1-i}(t)) + \cdots +$$

$$+(-1)^i \frac{d^i}{dt^i}(A_i^{k-1-i}(t)),\ i=\overline{0,k-1},$$

$$A_j^{k-1-i}(t) = A_{j+1}^{k-2-i}(t) - \frac{d}{dt}(A_{j+2}^{k-2-i}(t)) + \cdots +$$

$$+(-1)^{i-j}\frac{d^{i-j}}{dt^{i-j}}(A_{i+1}^{k-2-i}(t)),\ j=\overline{0,i},$$

$$A_j^0(t) = A_j(t),\ j=\overline{0,k-1}.$$

Если $\mathcal{R}(t,s)$ резольвента ядра $\mathcal{K}(t,s)B^+$ , то из (5) получаем

$$v(t) = \sum_{i=1}^{m}\int_0^t [\mathcal{K}(t,s) + \int_s^t \mathcal{R}(t,\tau)\mathcal{K}(\tau,s)d\tau]\varphi_i\xi_i(s)ds+ \tag{6}$$

$$+\int_0^t [\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} + \int_s^t \mathcal{R}(t,\tau)\frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}d\tau]f(s)ds.$$

Отсюда, в силу (4) следует, что функции $\xi_i(t)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^t K(t,s)\overline{\xi}(s)ds = \overline{b}(t),$$

$$K(t,s) = \| K_{ij}(t,s) = < [\mathcal{K}(t,s) + \int_s^t \mathcal{R}(t,\tau)\,\mathcal{K}(\tau,s)d\tau]\varphi_i,\ \psi_j >,\ i,j=\overline{1,m}\ \|,$$

$$\overline{b}(t) = \| b_j(t) = -\int_0^t < [\frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!}+$$

$$+\int_s^t \mathcal{R}(\tau,s)\,\frac{(\tau-s)^{k-1}}{(k-1)!}d\tau]f(s),\ \psi_j > ds,\ j=\overline{1,m}\ \| .$$

Каждому непрерывному решению этой системы по формулам (6) и (3) соответствует непрерывное решение задачи (1) - (2) и наоборот. Следующий пункт посвящен построению непрерывных решений таких систем.

## 3 Система интегральных уравнений Вольтерра 1 рода

Рассмотрим систему интегральных уравнений Вольтерра первого рода

$$\int_0^t K(t,s)\,\overline{\xi}(s)ds = \overline{b}(t). \tag{7}$$

Пусть выполнено условие

A) все ядра системы $K_{pl}(t,s),\ p,l=\overline{1,m}$ аналитичны в окрестности точки (0;0) при $\mid t \mid< R,\mid s \mid< R$ и все их частные производные до порядка $(n-1)$ включительно обращаются в ноль в точке (0;0) , но не все частные производные $n$-го порядка равны нулю в точке (0;0).

Обозначим через $K_{ij}$ матрицу, составленную из $(i,j)$-коэффициентов Маклорена ядер $K_{pl}(t,s)$, тогда для матричной функции $K(t,s)$ справедливо разложение

$$K(t,s)=\sum_{r=n}^{\infty}\sum_{i+j=r}K_{ij}\,t^i\,s^j \tag{8}$$

**Определение.** Точку $t=0$ назовем *регулярной* особой точкой ядра $K(t,s)$ , если матрица $A=\sum_{i+j=n}K_{ij}$ не вырождена, т.е.

$$det\sum_{i+j=n}K_{ij}\neq 0$$

Далее будем предполагать, что $t=0$ регулярная особая точка ядра $K(t,s)$ .

Введем ряд матричных функций

$$L_k(\lambda)=\sum_{i+j=k}\frac{K_{ij}}{\lambda+j+1},\ k=n,n+1,\ldots.$$

**Определение.** *Характеристическим уравнением*, соответствующим системе (7), назовем уравнение

$$detL_n(\lambda)=0. \tag{9}$$

Такое уравнение возникает естественным образом, если искать аналитическое решение системы ( 7) .

Для каждого натурального корня $\lambda_0$ характеристического уравнения (9) будем предполагать выполненным условие

B) матрица $L_n(\lambda_0)$ имеет полный обобщенный $\{\frac{(-1)^{k+1}}{k!}L_n^{(k)}(\lambda_0)\}$ - жорданов набор, т.е. для базисов $\overline{e}_i\in N(L_n(\lambda_0))$ и $\overline{e}_i^*\in N(L_n^*(\lambda_0)),\ i=\overline{1,n_0}$ существует линейно независимая система векторов $\{\overline{e}_i^{(j)}\},\ i=\overline{1,n_0},\ j=\overline{1,p_i},\ \overline{e}_i^{(1)}=\overline{e}_i$ такая, что

$$L_n(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(1)}=0,$$

$$L_n(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(2)}=L_n^{(1)}(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(1)},$$

$$L_n(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(3)}=L_n^{(1)}(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(2)}-\frac{1}{2!}L_n^{(2)}(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(1)},$$

$$\ldots\ldots\ldots$$

$$L_n(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(p_i)}=L_n^{(1)}\,\overline{e}_i^{(p_i-1)}-\frac{1}{2!}\,L_n^{(2)}(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(p_i-2)}+\cdots+\frac{(-1)^{p_i}}{(p_i-1)!}\,L_n^{(p_i-1)}(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(1)},$$

причем без ограничения общности можно считать, что

$$< L_n^{(1)}(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(p_i)} - \frac{1}{2!}\,L_n^{(2)}(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(p_i-1)} + \cdots + \frac{(-1)^{p_i+1}}{p_i!}\,L_n^{(p_i)}(\lambda_0)\,\overline{e}_i^{(1)},\, \overline{e}_j^{*} >= \delta_{ij} \tag{10}$$

**Определение.** *Кратностью* натурального корня $\lambda_0$ характеристического уравнения (9) назовем число

$$m_0 = max\{p_i, i = \overline{1, n_0}\}.$$

Наряду с кратностью введем *показатель* для корня $\lambda_0$ , а именно, величину

$$q_0 = p_1 + p_2 + \cdots + p_{n_0}.$$

Решение системы (7) будем искать в виде

$$\overline{\xi}(s) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} \overline{\xi}_\alpha(s)\, s^\alpha, \tag{11}$$

где

$$\overline{\xi}_\alpha(s) = \overline{\xi}_{\alpha 0} + \overline{\xi}_{\alpha 1}\, \ln s + \overline{\xi}_{\alpha 2}\,(\ln s)^2 + \cdots + \overline{\xi}_{\alpha r_\alpha}\,(\ln s)^{r_\alpha}.$$

**Лемма.** *Если характеристическое уравнение (9) имеет конечное число натуральных корней $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_l$ кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_l$ с показателями $q_1, q_2, \ldots, q_l$, выполнены условия A), B), $\overline{b}(t)$ аналитическая вектор-функция, $\overline{b}(0) = \overline{b}^{(1)}(0) = \cdots = \overline{b}^{(n)}(0) = 0$ , тогда система (7) имеет формальное $(q_1 + q_2 + \cdots + q_n)-$ параметрическое решение вида (11) , где*

$$r_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le \alpha < \lambda_1, \\ m_1, & \text{если } \lambda_1 \le \alpha < \lambda_2, \\ m_1 + m_2, & \text{если } \lambda_2 \le \alpha < \lambda_3, \\ \cdots & \cdots \\ m_1 + m_2 + \cdots + m_l, & \text{если } \lambda_l \le \alpha. \end{cases}$$

**Доказательство.** Подставим в (7) разложение $K(t, s)$ из (8) и (11) с $r_\alpha$ из формулировки леммы. Проведем все формальные интегрирования по частям, получим слева логарифмо-степенное выражение. Вначале сумму выражений, стоящих при одинаковых степенях $t$ слева, приравняем с соответствующим коэффициентом $\overline{b}(t)$ , а затем в полученных выражениях приравняем суммы коэффициентов, стоящих при одинаковых степенях $\ln t$ . В результате для вычисления векторов $\overline{\xi}_{\alpha i}$ получим рекуррентные соотношения

$$D_n^{m_1+\cdots+m_j+1}(\lambda_j + p)\,\overline{x}_{\lambda_j+p} + D_{n+1}^{m_1+\cdots+m_j+1}(\lambda_j + p - 1)\,\overline{x}_{\lambda_j+p-1} +$$

$$+ \cdots + D_{n+p}^{m_1+\cdots+m_j+1}(\lambda_j)\,\overline{x}_{\lambda_j} + \tag{12}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{j-1}\sum_{\mu=0}^{\lambda_{\nu+1}-\lambda_\nu-1}[D^{m_1+\cdots m_\nu+1}_{n+p+\lambda_j-\lambda_\nu+\mu}(\lambda_\nu+\mu),0^{m_{\nu+1}+\cdots+m_j}]\times$$

$$\times\overline{(x_{\lambda_\nu+\mu},0_{m_{\nu+1}+\cdots+m_j})}=$$

$$=\overline{(b_{n+p+\lambda_j+1},0_{m_1+\cdots+m_j})},$$

где $\lambda_0=0,\ m_0=0$, при $j=\overline{1,l-1}\quad p=\overline{0,\lambda_{j+1}-\lambda_j-1}$, при $j=l\quad p\geq 0$. Здесь введены обозначения:

- $\overline{x}_\alpha=(\overline{\xi}_{\alpha 0},\overline{\xi}_{\alpha 1},\ldots,\overline{\xi}_{\alpha r_\alpha})$ - вектор-столбец;
- $D^m_k(\lambda)=\| a_{ij}=\begin{cases} C^{j-i}_{j-1}L^{(j-i)}_k(\lambda), & i\leq j\\ 0, & i>j\end{cases},\ i,j=\overline{1,m}\,\|$;
- $C^k_n$ - число сочетаний из $n$ по $k$;
- $[D^m_k(\lambda),0^p]=\begin{pmatrix} D^m_k(\lambda) & 0\\ 0 & 0^p\end{pmatrix}$;
- $0^p$ - нулевая квадратная матрица $p$-го порядка;
- $\overline{(x_\alpha,0_m)}$- вектор-столбец, размерность которого равна сумме $m$ и размерности вектора $\overline{x}_\alpha$ , последние $m$ координат нули, а остальные совпадают с соответствующими координатами вектора $\overline{x}_\alpha$.

Соотношения (12) позволяют вычислить все векторы $\overline{\xi}_{\alpha i}$ . При этом векторы $\overline{\xi}_{\alpha 0},\alpha=\overline{0,\lambda_1-1}$ последовательно однозначно вычисляются через $\overline{b}_{n+\alpha+1}$ .

Координаты вектора $\overline{x}_{\lambda_1}$ уже содержат $q_1$ свободных параметров. Покажем это. В силу линейной независимости системы векторов $\{\overline{e}^{(j)}_{i_1}\}$ , функциональный коэффициент при степени $s^{\lambda_1}$ будем искать в виде

$$\overline{\xi}_{\lambda_1}(s)=\sum_{i_1=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{p_{i_1}}\overline{c}_{i_1 j}\,(\ln s)^j+\overline{\xi}_{\lambda_1 0},$$

где при каждом фиксированном $i_1$ векторы $\overline{c}_{i_1 j},\ j=\overline{1,p_{i_1}}$ принадлежат линейной оболочке, натянутой на систему векторов $\{\overline{e}^{(j)}_{i_1},\ j=\overline{1,p_{i_1}}\}$. В этом случае векторы $\overline{c}_{i_1 j},\ j=\overline{1,p_{i_1}}$ удовлетворяют линейной однородной системе уравнений, матрица которой получается из матрицы $D^{p_{i_1}+1}_n(\lambda_1)$ удалением первых $m$ строк и первых $m$ столбцов, т.е.

$$C^0_{p_{i_1}}\,L_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}}=0,$$

$$C^0_{p_{i_1}-1}\,L_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-1}+C^1_{p_{i_1}}\,L^{(1)}_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}}=0,$$

$$C^0_{p_{i_1}-2}\,L_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-2}+C^1_{p_{i_1}-1}\,L^{(1)}_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-1}+C^2_{p_{i_1}}\,L^{(2)}_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}}=0,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$C_1^0\, L_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 1} + C_2^1\, L_n^{(1)}(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 2} + \dots + C_{p_{i_1}}^{p_{i_1}-1}\, L_n^{(p_{i_1}-1)}(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}} = 0.$$

Отсюда последовательно находим

$$\overline{c}_{i_1 p_{i_1}} = d_{i_1 p_{i_1}}\,\overline{e}_{i_1}^{(1)},$$

$$L_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-1} = -d_{i_1 p_{i_1}}\, A_{p_{i_1}}^1\, L_n^{(1)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(1)},$$

здесь $A_n^k$ число размещений из $n$ по $k$ . и в силу условия В)

$$\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-1} = d_{i_1 p_{i_1}-1}\,\overline{e}_{i_1}^{(1)} - d_{i_1 p_{i_1}}\, A_{p_{i_1}}^1\, \overline{e}_{i_1}^{(2)}.$$

Подставим выражения для $\overline{c}_{i_1 p_{i_1}}$ и $\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-1}$ в третий блок уравнений рассматриваемой системы, тогда

$$L_n(\lambda_1)\,\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-2} = -d_{i_1 p_{i_1}-1}\, A_{p_{i_1}-1}^1\, L_n^{(1)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(1)} + d_{i_1 p_{i_1}}\, A_{p_{i_1}}^2\, (L_n^{(1)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(2)} - \frac{1}{2!}\, L_n^{(2)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(1)})$$

или, в силу условия В),

$$\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-2} = d_{i_1 p_{i_1}-2}\,\overline{e}_{i_1}^{(1)} - d_{i_1 p_{i_1}-1}\, A_{p_{i_1}-1}^1\,\overline{e}_{i_1}^{(2)} + d_{i_1 p_{i_1}}\, A_{p_{i_1}}^2\, \overline{e}_{i_1}^{(3)}.$$

Индукцией по $j = \overline{0, p_{i_1}-1}$ получаем

$$\overline{c}_{i_1 p_{i_1}-j} = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k\, d_{i_1 p_{i_1}-j+k}\, A_{p_{i_1}-j+k}^k\, \overline{e}_{i_1}^{(k+1)}$$

Для вычисления вектора $\overline{\xi}_{\lambda_1 0}$ имеем неоднородную систему

$$L_n(\lambda_1)\,\overline{\xi}_{\lambda_1 0} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \{-d_{i_1 1}\, L_n^{(1)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(1)} \;+\; d_{i_1 2}\,(L_n^{(1)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(2)} \;-\; \frac{1}{2!}\, L_n^{(2)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(1)}) -$$

$$- \dots + (-1)^{p_{i_1}}\, d_{i_1 p_{i_1}}\, (L_n^{(1)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(p_{i_1})} - \frac{1}{2!}\, L_n^{(2)}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(p_{i_1}-1)} \;+ \dots +$$

$$+ (-1)^{p_{i_1}+1}\, \frac{1}{p_{i_1}!}\, L_n^{(p_{i_1})}(\lambda_1)\,\overline{e}_{i_1}^{(1)})\} + \overline{b}_{n+\lambda_1+1},$$

которая в силу условий (10) разрешима относительно $\overline{\xi}_{\lambda_1 0}$ , при этом все коэффициенты $d_{i_1 p_{i_1}}$, $i_1 = \overline{1, n_1}$ однозначно определяются через $\overline{b}_{n+\lambda_1+1}$ по формулам

$$d_{i_1 p_{i_1}} = (-1)^{p_{i_1}+1} < \overline{b}_{n+\lambda_1+1}, \overline{e}_{i_1}^{*} > .$$

Отсюда находим

$$\overline{\xi}_{\lambda_1 0} = \sum_{i_1=1}^{n_1} \sum_{j=0}^{p_{i_1}-1} (-1)^j \, d_{i_1 j} \, \overline{e}_{i_1}^{(j+1)} \; + \; L_n^+(\lambda_1) \, \overline{b}_{n+\lambda_1+1},$$

здесь все $d_{i_1 j}$ - произвольные постоянные, а последнее слагаемое есть частное решение неоднородной системы записанное через псевдообратную матрицу для $L_n(\lambda_1)$ . Далее все $\overline{\xi}_{\alpha i}$ при $\lambda_1 < \alpha < \lambda_2$ , как видно из (12), однозначно находятся через предыдущие векторы $\overline{\xi}_{\alpha i}$ . При вычислении компонент $\overline{\xi}_{\lambda_2}(s)$ появятся новые свободные параметры в количестве $q_2$ штук. Чтобы в этом убедиться достаточно представить $\overline{\xi}_{\lambda_2}(s)$ в виде

$$\overline{\xi}_{\lambda_2}(s) = \sum_{\alpha=0}^{m_1} \overline{\xi}_{\lambda_2 \alpha} \, (\ln s)^\alpha \; + \; \sum_{i_2=1}^{m_2} \sum_{j=1}^{p_{i_2}} \overline{c}_{i_2 j} \, (\ln s)^{m_1+j}$$

Затем для вычисления компонент векторов $\overline{c}_{i_2 j}$ надо повторить все рассуждения, проведенные при вычислении таких же векторов для $\overline{\xi}_{\lambda_1}(s)$ . Для получения $\overline{\xi}_{\lambda_2 \alpha}$ надо $(m_1+1)$ раз повторить рассуждения проведенные при вычислении $\overline{\xi}_{\lambda_1 0}$ ,на каждом таком повторе один блок постоянных в силу условия (10) будет однозначно вычисляться, а другой блок появляться. В результате все свободные параметры окажутся среди координат векторов $\overline{\xi}_{\lambda_2 0}$, $\overline{\xi}_{\lambda_2 1}$ , ... , $\overline{\xi}_{\lambda_2 m_2 - 1}$ и так далее.

**Лемма доказана.**

**Замечание 1.** Описанный процесс построения формального логарифмо-степенного решения однозначно определяет, при выполнении условия B) , количество новых степеней логарифма, которые должны появиться в разложении решения при совпадении индекса суммирования $\alpha$ с натуральным корнем $\lambda_i$ характеристического уравнения (9). Если при этом добавить логарифмических слагаемых больше, чем указано в лемме, то коэффициенты при этих дополнительных степенях $\ln t$ при вычислении занулятся. Если логарифмических слагаемых взять меньше, то при вычислении координат вектора $\overline{\xi}_{\lambda_i m_1+\dots+m_{i-1}}$ нарушатся условия разрешимости и процесс вычислений остановится.

**Теорема 1.** *Пусть характеристическое уравнение (9) имеет $l$ целых неотрицательных корней $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_l$ кратностей $m_1, m_2, \ldots, m_l$ с показателями $q_1, q_2, \ldots, q_l$, $t = 0$ регулярная особая точка ядра $K(t, s)$ , функции $K(t, s)$ и $\overline{b}(t)$ достаточно гладкие в окрестности нуля и $\overline{b}(0) = \overline{b}^{(1)}(0) = \ldots = \overline{b}^{(n)}(0) = 0$ , тогда общее решение системы (7) в классе $C[-R, R]$ при достаточно большом номере $N$ представимо в виде*

$$\overline{\xi}(s) = \sum_{\alpha=0}^{N} \overline{\xi}_\alpha(s) \, s^\alpha + \overline{\eta}(s), \tag{13}$$

*где $\overline{\xi}_\alpha(s)$ из леммы, $\overline{\eta}_(s) = \circ(s^N)$ при $s \longrightarrow 0$ т.е. каждая компонента вектора $\overline{\eta}(s)$ есть $\circ(s^N)$ при $s \longrightarrow 0$ , а значит $\overline{\eta}(s) = s^N \, \overline{\gamma}(s), \overline{\gamma}(s) \longrightarrow 0$ при $s \longrightarrow 0$ и $\overline{\gamma}(s) \in C[-R, R]$.*

**Доказательство.** Для функций $K(t,s)$ и $\overline{b}(t)$ , в силу условий теоремы, справедливы разложения

$$K(t,s)=\sum_{r=n}^{n+N}\sum_{i+j=r}K_{ij}\,t^i\,s^j+\Gamma(t,s),$$

$$\overline{b}(t)=\sum_{r=n+1}^{n+N+1}\overline{b}_r\,t^r+\overline{\delta}(t),$$

причем при $t\longrightarrow 0$

$$\Gamma(t,t)=\circ(t^{n+N}),\ \ \delta(t)=\circ(t^{n+N+1}).$$

Подставим эти разложения и (13) в уравнение (7). По доказанной лемме, относительно $\overline{\gamma}(s)$ получаем систему

$$\int_0^t s^N\,K(t,s)\,\overline{\gamma}(s)ds=\overline{\beta}(t),$$

где

$$\overline{\beta}(t)=\overline{\delta}(t)-\sum_{\alpha=0}^{N}\{\int_0^t\Gamma(t,s)\,\overline{\xi}_\alpha(s)\,s^\alpha ds\}=\circ(t^{n+N+1})$$

при $t\longrightarrow 0$. Продифференцируем эту систему один раз

$$t^N\,K(t,t)\,\overline{\gamma}(t)+\int_0^t s^N\,K_t'(t,s)\,\overline{\gamma}(s)ds=\,\overline{\beta}'(t),$$

$$\overline{\beta}'(t)=\circ(t^{n+N}),\ t\longrightarrow 0.$$

Для функции $K(t,t)$ справедливо следующее асимптотическое представление

$$K(t,t)=t^n(A+\circ(1)),$$

здесь $\circ(1)$ - квадратная матрица $m$-го порядка, каждая компонента которой есть $\circ(1)$ при $t\longrightarrow 0$. Поскольку $t=0$ регулярная особая точка ядра $K(t,s)$ , то при достаточно малом $t$ матрица $(A+\circ(1))$ обратима и для $\overline{\gamma}(t)$ получаем систему

$$\overline{\gamma}(t)=K\overline{\gamma}(t), \tag{14}$$

где

$$K\overline{\gamma}(t)=-\int_0^t s^N\frac{(A+\circ(1))^{-1}K_t'(t,s)}{t^{n+N}}\overline{\gamma}(s)ds+\frac{(A+\circ(1))^{-1}\overline{\beta}'(t)}{t^{n+N}}.$$

Докажем сжимаемость оператора $K$ заданного на пространстве непрерывных вектор-функций с нормой

$$\parallel\overline{\gamma}(s)\parallel=\max_{1\le i\le m}\max_{[-R,R]}\mid\gamma_i(s)\mid.$$

Этим будет доказана однозначная разрешимость уравнения (14) в пространтсве $C[-R, R]$. В силу гладкости ядер $K_{ij}(t,s)$ в окрестности (0;0) получаем, что при $\mid t \mid < R$ и $\mid s \mid < R$ найдутся две положительные константы $c_1$ и $c_2$ такие, что

$$\| K_t'(t,s) \| \leq c_1(\mid t \mid + \mid s \mid)^{n-1}, \ \ \| (A + \circ(1))^{-1} \| \leq c_2.$$

Следовательно, $\forall\, \overline{\gamma}_1(t),\ \overline{\gamma}_2 \in C[-R,R]$ имеем

$$\| K\overline{\gamma}_1(t) - K\overline{\gamma}_2 \| \leq$$

$$\leq c_1c_2 \int_0^t \frac{(\mid t \mid + \mid s \mid)^{n-1} s^N}{t^{n+N}} ds \, \| \overline{\gamma}_1(t) - \overline{\gamma}_2(t) \| \leq$$

$$\leq c_1c_2 \frac{2^{n-1}}{t^{N+1}} \| \overline{\gamma}_1(t) - \overline{\gamma}_2(t) \| \int_0^t s^N ds =$$

$$= \frac{2^{n-1} c_1 c_2}{N+1} \| \overline{\gamma}_1(t) - \overline{\gamma}_2(t) \| \, .$$

Итак, для достаточно большого $N$ оператор $K$ будет сжимающим, а значит уравнение (14) однозначно разрешимо в $C[-R,R]$.

**Теорема 1 доказана.**

**Замечание 2.** Утверждения леммы и теоремы 1 являются обобщениями аналогичных результатов, полученных ранее Магницким Н.А. и автором для одного интегрального уравнения Вольтерра первого рода [ 11, 12].

**Теорема 2.** *Если для задачи (1) - (2) и соответствующей ей системы (7) выполнены условия теоремы 1, то задача (1)-(2) имеет* $(q_1+q_2+\cdots+q_l)$*- параметрическое непрерывное решение, которое можно выписать в соответствии с формулами (3) , (6), (13) , (12), (14).*

**Замечание 3.** Если в условиях теоремы 1 не все $\overline{b}^{(i)}(0),\ i = \overline{1,n}$ равны нулю, то можно поставить и решить задачу о построении обобщенных решений задачи (1) - (2) .

**Литература**


1. Вайнберг М.М., Треногин В.А. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* - М.: Наука, 1969. - 528 с.

2. Nashed M.Z. *Generalized Inverses and applications.* - Academ. Press, New York, 1976.

3. Сидоров Н.А., Романова О.А. *О применении некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением* // Дифференц. уравнения. - 1983. - Т.19, N9. - С.1516-1526.

4. Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. *Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной* // Дифференц. уравнения. - 1987. - Т.23, N4, - С.726-728.

5. Фалалеев М.В. *Обобщенные решения дифференциальных уравнений с оператором конечного индекса при производной* // Методы оптимизации и их применения. - Иркутск: Изд-во Сибирск. энергетич. ин-т. 1988. - С.231-237.

6. Фалалеев М.В. *Непрерывные и обобщенные решения одного класса линейных дифференциальных уравнений второго порядка с вырождением в банаховых пространствах.* // Краевые задачи. - Иркутск: Изд-во Иркут. ун-т, 1990. - С.54-62.

7. Фалалеев М.В. *Обобщенные решения дифференциального уравнения второго порядка с фредгольмовым оператором при старшей производной в банаховых пространствах.* - Иркутск, Изд-во Иркут. ун-т (в печати).

8. Фалалеев М.В. *Непрерывные и обобщенные решения вырожденного дифференциального уравнения второго порядка в банаховых пространствах.* // XVI Всесоюзн. шк. по теории операторов в функциональных пространствах: Тез. докл. - Нижний Новгород, Изд-во Нижегор. ун-т, 1991. - С.232.

9. Сидоров Н.А. *Об одном классе интегральных уравнений Вольтерра с вырождением в банаховых пространствах.* - М.: 1982. Деп. в ВИНИТИ, N2579-82.

10. Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. *Обобщенные решения вырожденных дифференциальных и интегральных уравнений в банаховых пространствах.* // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. - Новосибирск: Наука, СО АН СССР, 1987. - С.308-318.

11. Магницкий Н.А. *Асимптотика решений интегрального уравнения Вольтерра 1 рода* // ДАН СССР. - 1983. - Т.269, N1, С.29-32.

12. Фалалеев М.В. *Асимптотические представления непрерывных и обобщенных решений интегрального уравнения Вольтерра 1 рода.* - М.: 1987. - Деп. в ВИНИТИ, N1553-В87, 44 с.