МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ

Иркутский государственный университет

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В БИОЛОГИИ

Учебное пособие

Иркутск 2010

Составитель — кандидат физ.-мат. наук, доцент Л. Ю. Дамешек

Рецензент — кандидат физ.-мат. наук, доцент И. В. Расина.

В пособии излагается материал по анализу функций действительной переменной, линейной алгебры, дифференциальным уравнениям и их системам. Приводятся примеры, иллюстрирующие применение изложенных методов в биологических исследованиях. Пособие предназначается для студентов — биологов.

Предназначено для студентов 1-го курса биолого-почвенного факультета.

Иркутский государственный университет, 2010 г.

ВВЕДЕНИЕ

Среди биологов распространено мнение, что применение математики в биологии сводится к обработке результатов наблюдений с целью установления экспериментальных законов. Однако на самом деле, не зная внутренних законов явления, нельзя предсказать, как мог бы идти процесс в условиях, отличных от условий опыта, и как можно им управлять. Математические методы, математические приемы исследования играют большую роль в установлении биологических законов. Это применение математики в биологии, которое можно назвать математическим моделированием, связано с принципиально новым построением биологического исследования, с математическим образом мышления при решении биологических проблем.

Термин "математическая модель" в последнее время стал чуть ли не самым популярным среди людей, имеющих дело с исследованиями и разработками. Причина кроется в небывалых возможностях, которые открывают широкое применение математических методов и быстродействующих вычислительных машин не только в традиционных областях — механике, физике, технике, но и в других естественных науках, экономике, социологии, а теперь уже и в гуманитарных науках, математические модели и методы становятся неотъемлемой частью многих работ, связанных с проблемой взаимодействия человека с окружающей средой.

При математическом моделировании в биологии каждому исследуемому биологическому объекту ставят в соответствие подходящий математический объект (число, функцию, множество, матрицу и т.д.), а связи и отношения между биологическими объектами вписывают с помощью математических отношений и соответствий (равенств, уравнений, неравенств и т.д.). Таким образом, получают математическое описание биологического явления или, как говорят, математическую модель. Разумеется, это всегда связано с определенным упрощением изучаемого явления, его идеализацией. Исследуя такую модель, мы исследуем и интересующее нас биологическое явление. Но математическая модель изучается математическими средствами. Поэтому на время можем отвлечься от биологического содержания модели и сосредоточить внимание на ее математической сущности. Эту сложную работу биолог проводит в тесном союзе с математиком, в некоторые моменты целиком поручает математику. Для проверки правильности полученного результата ставится эксперимент, и если результат экспериментально подтверждается, то модель делается достоянием теории и практики.

Для того, чтобы биолог мог сам моделировать биологические процессы, работать в тесном контакте с математиком, ему необходима хорошая математическая подготовка, хорошая ориентация в основных математических понятиях.

Первоначальные понятия (аксиомы) приходят к нам из опыта и являются фундаментом, на котором возводится здание из новых фактов, свойств, понятий, получаемых по правилам логики. Эти новые факты формулируются и доказываются как теоремы.

В каждой теореме должно быть указано: A — при каких условиях рассматривается в ней тот или иной математический факт (условие теоремы); B — что об этом факте утверждается (заключение теоремы). Рассмотрим, например, теорему: "Если четырехугольник — параллелограмм, то его диагонали, пересекаясь, делятся пополам". Здесь условие теоремы (A) : четырехугольник — параллелограмм; заключение теоремы (B) : точка пересечения диагоналей делит каждую из них пополам. Теорему можно записать в общем виде на языке логики так:

$A \to B$.

Доказательство теоремы состоит в том, чтобы доказать, что если A верно (истинна), то B также верно (истинно). Имея исходную теорему $A \to B$, можно образовать новую теорему $B \to A$. Теорема $A \to B$ называется **прямой**, а теорема $B \to A$ **обратной**. Для нашего примера обратной будет следующая теорема: "Если в четырехугольнике диагонали, пересекаясь, делятся пополам, то этот четырехугольник – параллелограмм". В данном примере обе теоремы истинны (проведя доказательство каждой из них, можно в этом убедиться). Однако так бывает не всегда. Например: "Если два угла смежные, то сумма их равна $2d$" — прямая теорема; "Если сумма двух углов равна $2d$, то они смежные" — обратная теорема. Обратная теорема не верна.

Формулируя теорему, мы часто используем термины "достаточно", "необходимо", "необходимо и достаточно". Выясним их смысл. Условие A называется **необходимым** для заключения B, если истинна теорема $B \to A$. Условие A называется **достаточным** для заключения B, если истинна теорема $A \to B$. Условие A называется **необходимым и достаточным** для заключения B, если истинны прямая и обратная теоремы. Необходимое и достаточное условие называют иногда **критерием**. Вместо выражения "достаточно и необходимо" часто употребляют сочетания слов "если и только если", "тогда и только тогда", "в том и только в том случае", "те и только те". Здесь словосочетания "только в том случае", "только тогда" и т.п. заменяют выражение "необходимое условие", а "тогда", "в том случае" и т.п. — "достаточное условие".

ГЛАВА I. МНОЖЕСТВА

§1. Основные понятия. Операции над множествами

Понятие “множество” мы часто употребляем в обыденной речи: множество людей, множество деревьев и т.п. Рассмотрим множество чисел, множество функций, множество точек плоскости и т.д. Каждый раз словом “множество” будем обозначать совокупность тех или иных элементов, объединенных общим признаком или свойством. Запись $a \in A$ обозначает, что a является элементом множества A, а запись $a \notin A$ — что a не принадлежит множеству A.

Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**. В противном случае множество называется **бесконечным**. Например, множество листьев на дереве — конечное множество, множество точек на плоскости — бесконечное.

Конечное множество можно задать перечислением его элементов. Так, например, если множество A состоит из трех чисел 2, 4, 5, то, указав все эти числа в том или ином порядке, мы тем самым зададим множество $A = \{2, 4, 5\}$. Но такой способ задания не всегда удобен. Обычно множество задают описанием элементов, ему принадлежащих, указывая свойство, их объединяющее. Например, “множество всех членистоногих” (это множество конечное, но число его элементов слишком велико для перечисления); “множество всех целых чисел” (это бесконечное множество) и т.д.

Два множества A и B называются **равными** (тождественными), если каждый элемент множества A является элементом множества B и, наоборот, каждый элемент множества B является элементом множества A. Обозначают: $A = B$. Например, $\{1, 2\} = \{2, 1\}$.

Пусть имеются два множества A и B, относительно которых известно, что каждый элемент множества B является элементом множества A. В этом случае говорят, что B есть подмножество A и пишут $B \subset A$. Говорят еще, что A содержит B или B включено в A.

Теорема. *Если $B \subset A$ и $A \subset B$, то $A = B$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из первого соотношения следует, что любой элемент из B является элементом A, а из второго, что любой элемент из A является элементом B, т.е. множества A и B состоят из одних и тех же элементов. Такие множества равны.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым**. Это, например, множество чисел, удовлетворяющее одновременно двум неравенствам: $x > 0$, $x < -2$. Обозначается $\emptyset$. Пустое множество является подмножеством любого множества A.

Пусть даны два множества A и B. **Объединением** (суммой) этих множеств называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (рис. 1,а). Обозначается $A \cup B$.

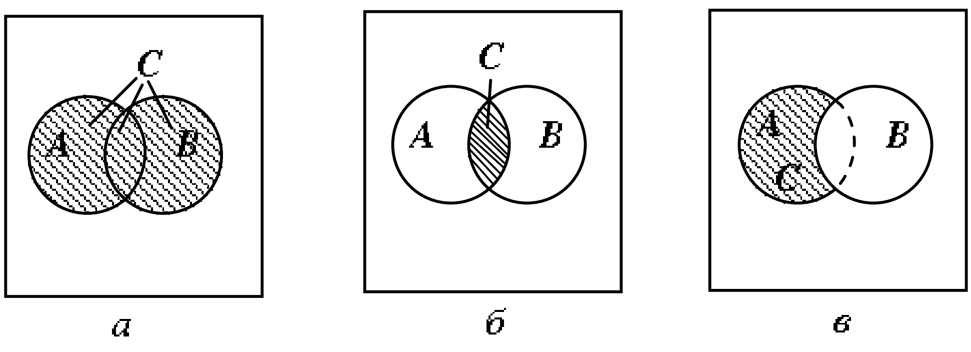

Рис. 1

Пересечением (произведением) двух множеств A и B называется множество C, состоящее из всех тех элементов, которые принадлежат и множеству A, и множеству B (рис. 1,б).

Обозначается $\cap B$. **Разностью** множеств A и B называется совокупность тех элементов множества A, которые не являются элементами множества B (рис. 1,в). Обозначается $A \backslash B$. Если $B \subset A$, то $A \backslash B$ называется **дополнением** множества B до множества A. Эти операции имеют свойства обычных алгебраических операций. Например, $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$.

§2. Некоторые типы множеств

1. Числовое множество. Числовое множество — множество, элементами которого являются действительные числа. Многие числовые множества имеют специальные обозначения. Например, множества чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leq x \leq b$, $a < x < b$, обозначаются соответственно $[a, b]$, (a, b); множество всех натуральных чисел $\{1, 2, 3, \ldots\}$ обозначается N, а всех действительных чисел (числовая ось) — R^1.

Если для рассматриваемого множества $X = \{x\}$ существует такое число M, что все $x \leq M$, то будем говорить, что множество **ограничено сверху** (числом M), само число M есть **верхняя граница** множества $\{x\}$. Например, множество правильных дробей ограничено сверху числами 1,2 или любым числом, большим 1; натуральный ряд не ограничен сверху. Аналогично, если найдется такое число m, что все $x \geq m$, то говорят, что множество X **ограничено снизу** (числом m), а само число m называется **нижней границей** множества $\{x\}$. Числа M, m могут быть и несобственными: $M = +\infty$, $m = -\infty$.

Из всех верхних границ особый интерес представляет наименьшая, которую будем называть **точной верхней границей** или **верхней гранью**. Обозначается $\sup X = \sup\{x\}$.

Если множество ограничено снизу, то наибольшую из всех нижних границ будем называть **точной нижней границей** или **нижней гранью**. Обозначается $\inf X = \inf\{x\}$ (по латыни: *supremum* – наивысшее, *infimum* — наинизшее).

Примеры.

1. Два множества чисел $\dfrac{1}{n}$, где n — натуральное число, $\sup\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = 1$, $\inf\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = 0$. Заметим, что $\sup\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \in \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$, $\inf\left\{\dfrac{1}{n}\right\} \notin \left\{\dfrac{1}{n}\right\}$.

2. Пусть E — множество всех неотрицательных чисел. Тогда $\inf E = 0 \in E$, $\sup E = +\infty$.

В общем случае $\inf X$ и $\sup X$ могут принадлежать или не принадлежать множеству X.

Рассмотрим горизонтальную прямую, на которой выберем направление и возьмем точки O и A так, что OA — единичный отрезок. Он будет служить единицей измерения. Такую прямую назовем **координатной** прямой. Каждой точке B координатной прямой соответствует вполне определенное действительное число x, удовлетворяющее условиям: а) $|x|$ — длина отрезка OB, измеренного при помощи единичного отрезка OA; б) $x = |x| > 0$, если точка B лежит справа от точки O и $x = -|x| < 0$, если точка B лежит слева от точки O; в) $x = 0$, если точка B совпадает с точкой O. Это число x называется **координатой** точки B.

Итак, под точкой координатной прямой будем понимать действительное число (координату этой точки), а множество точек координатной прямой есть числовое множество R^1.

2. Плоскость и трехмерное пространство. Возьмем две оси координат Ox_1 и Ox_2 (не обязательно взаимноперпендикулярные). Каждой упорядоченной паре чисел (x_1, x_2) на координатной плоскости соответствует единственная точка и, обратно, положение любой точки определяется одной вполне определенной парой чисел, называемых ее **координатами**. При заданной системе координат любую упорядоченную пару чисел называют двумерным **вектором**. Геометрически вектор — это направленный отрезок. Любой точке M с координатами (x_1, x_2) можно поставить в соответствие вектор $x = (x_1, x_2)$. Числа $x_1,\ x_2$ будем называть компонентами вектора x.

Два вектора $a = (a_1, a_2)$ и $b = (b_1, b_2)$ считаются равными, если равны их соответствующие компоненты, т.е. $a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$. Нулевой вектор $\theta = (0, 0)$.

Для векторов вводятся операции: 1) сложение: $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$; 2) умножение на число $\alpha : \alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2)$, подчиняющееся следующим законам: а) к о м м у т а т и в н о с т и $a + b = b + a,\ \alpha a = a\alpha$; б) а с с о ц и а т и в н о с т и $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$; в) д и с т р и б у т и в н о с т и $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b,\ (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$.

Эти операции имеют четкое геометрическое представление. Так, умножить вектор на положительное вещественное число α — это значит увеличить его длину в α раз, не меняя направления. Если α — отрицательное, то умножение вектора на α означает увеличение его длины в α раз и изменение направления на прямо противоположное. Сложить два вектора — значит найти диагональ параллелограмма, достроенного на них.

Каждой паре векторов a и b поставим в соответствие некоторое число (a, b), называемое **скалярным произведением** вектора a на вектор b и обладающее свойствами: а) $(a, b) = (b, a)$; б) $(\alpha a, b) = \alpha(a, b)$; в) $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$; г) если $a \neq 0$, то $(a, a) > 0$. Скалярным произведением вектора $a = (a_1, a_2)$ на вектор $b = (b_1, b_2)$ является выражение $(a, b) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Длиной вектора a называется неотрицательное число $|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Вектор, длина которого равна 1, называется **единичным**.

Угол между векторами a и b определяется по формуле

$$\cos(a, b) = \frac{(a, b)}{|a| \cdot |b|}.$$

Множество векторов, для которых выполняются введенные ранее операции, образуют **двумерное векторное пространство** R^2. Элементы пространства R^2 будем называть векторами, или точками. Расстояние между двумя точками x и y с координатами (x_1, x_2) и (y_1, y_2) определяется по формуле $\rho(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$.

Все изложенное можно распространить на трехмерное векторное пространство R^3, которое состоит из множества векторов $a = (a_1, a_2, a_3)$. Подмножество X множества R^3 называется **подпространством**, если из $x \in X,\ y \in X$ следует, что $\alpha x + \beta y \in X$ при любых α и β. Например, R^2 — подпространство R^3.

3. Многомерные пространства. Точки плоскости и трехмерного пространства могут быть представлены как упорядоченные наборы пар и троек чисел, которые являются координатами этих точек, и операции над такими наборами имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Эти наглядные геометрические представления можно перенести на более общий случай, когда имеем дело с наборами X, состоящими из большего количества чисел. Например, популяцию разобьем условно на n возрастных групп от только что родившихся особей до максимального в данной популяции возраста. Тогда в фиксированный момент времени популяция представляется набором чисел $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i — численность в i-й возрастной группе.

Множествами таких наборов можно оперировать так же, как двух- и трехмерными векторами, используя те же самые геометрические представления. Таким образом, приходим к понятиям n-мерного вектора и n-мерного векторного пространства.

Упорядоченный набор n действительных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ называется n-мерным **вектором**, а числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — компонентами вектора. Множество n-мерных векторов называется n-мерным **векторным пространством**, если: а) два вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ равны тогда и только тогда, когда равны их соответствующие компоненты, т.е. $a_i = b_i$ $(i = \overline{1, n})$; б) введены операции сложения и умножения на число как соответствующие действия над компонентами, т.е. $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n)$, $\alpha a = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n)$, $\alpha = \mathrm{const}$; в) нулевым считается вектор $\theta = (0, 0, \ldots, 0)$.

Скалярное произведение двух n-мерных векторов a и b — число, равное $(a, b) = (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n)$. Длина вектора $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — неотрицательное число $|a| = \sqrt{(a, a)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}$. Элементы множества R^n будем называть **векторами** или точками. Векторы a и b являются **ортогональными**, если $(a, b) = 0$. Система векторов $a, b, \ldots, c$ ортогональна, если любые два вектора этой системы ортогональны. Если α — некоторое число, то $|\alpha a| = \sqrt{(\alpha a, \alpha a)} = |\alpha| \sqrt{(a, a)}$. Из этого равенства видно, что умножив ненулевой вектор на число, обратное его длине, получим единственный вектор. Данная операция называется **нормированием**. Ортогональная система, состоящая из векторов единичной длины, является **ортонормированной**.

Совокупность действий умножения векторов на число и сложение их называется линейной операцией над векторами. Результат линейной операции называется линейной комбинацией векторов, например, $\alpha a + \beta b + \gamma c$.

Векторы $a, b, \ldots, c$ являются линейно зависимыми, если существуют такие числа α, β, γ, не равные нулю одновременно, что выполняется равенство $\alpha a+\beta b+\ldots+\gamma c = 0$. В противном случае векторы **линейно независимы**.

Базисом пространства R^n называется любая система из n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Любой вектор $x \in R^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$. Такое представление единственно. Коэффициенты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в линейной комбинации являются **координатами** вектора x в данном базисе $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Если в качестве базиса взять другую систему линейно независимых векторов $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_n)$, то вектор x в этом базисе будет иметь уже другие координаты $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n$. Если базисные векторы ортонормированы, то базис называется **декартовым**. Для декартова базиса расстоянием между двумя точками $x \in R^n$ и $y \in R^n$ служит число $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$.

Окрестностью точки $a \in R^n$ называется множество точек $x \in R^n$, удовлетворяющих условию $\rho(x, a) < \delta$, где число δ — радиус окрестности. Точка $x \in R^n$ называется **предельной** точкой множества $M \subset R^n$, если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из M. Предельная точка может принадлежать, а может и не принадлежать M. Множество $M \subset R^n$ считается **замкнутым**, если оно содержит все свои предельные точки.

Примеры.

1. Всякий сегмент $[a, b]$ числовой прямой есть замкнутое мно-

жество.

2. Множество R^n замкнуто.

4. Метрическое и нормированное пространства. Понятие расстояния между элементами числового множества или n-мерного векторного пространства может быть распространено на множества более общей природы (множество функций, кривых на плоскости и т.д.), которые могут иметь место на различных этапах математического исследования. При этом возникают понятия метрического и нормированного пространств.

Множество X, элементы которого будем называть точками, есть **метрическое** пространство, если любым двум точкам p и q его соответствует вещественное число $d(p,q)$ — расстояние от p до q, такое, что а) $d(p,q) > 0$ при $p \neq q$, $d(p,q) = 0$ при $p = q$; б) $d(p,q) = d(q,p)$; в) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ при любом $r \in X$. Примеры метрического пространства: множество действительных чисел R^1 с расстоянием $d(x,y) = |x-y|$; пространство R^n с расстоянием $d(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$.

Множество X является **линейным**, если в нем определены сумма элементов и умножение этих элементов на число $(x+y, \alpha x, x, y \in X, \alpha$ — число), удовлетворяющие законам: а) ассоциативности $(x+y)+z = x+(y+z)$, $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$; б) коммутативности $x+y = y+x$, $\alpha x = x\alpha$; в) дистрибутивности $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x$. Линейное множество X называется **нормированным** пространством, если каждому элементу множества поставлено в соответствие вещественное число — норма этого элемента $\|x\|$, удовлетворяющая трем аксиомам: а) $\|a\| > 0$, причем $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда x — нулевой элемент; б) $\|\lambda x\| = \|\lambda\| \cdot \|x\|$; в) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Нормированное пространство является метрическим, если расстояние определяется равенством

$d(x,y) = \|x-y\|$. Пример нормированного пространства — пространство R^n с $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

ГЛАВА II. ФУНКЦИИ

При изучении различных явлений природы приходится иметь дело с самыми разнообразными величинами: температурой, массой, весом, высотой и т.п. В каждом рассматриваемом случае одни из этих величин остаются неизменными, другие меняются. Величина называется переменной, если она принимает различные численные значения. Среди переменных величин различают независимые и зависимые. Например, скорость роста растения зависит от температуры воздуха; увеличение биомассы живых существ зависит от интенсивности солнечного света и т.д. Посредством различных функций может быть выражено бесконечное многообразие процессов и явлений реального мира. Физические, биологические законы формулируются в виде функциональных зависимостей. Например, закон Ньютона $F = km_1m_2/r^2$ выражает функциональную зависимость силы притяжения двух тел от их массы и расстояния между ними; площадь прямоугольника $S = x \cdot y$ зависит от длин его сторон; скорость выедания жертвы хищником $\Phi(x) = ax(1+bx)$ является функцией плотности жертвы (этот закон характерен для хищников, относящихся к беспозвоночным).

§1. Понятие функции

Рассмотрим два множества X и Y, элементами которых могут быть любые объекты, и предположим, что каждому элементу $x \in X$ некоторым способом поставлен в соответствие элемент $y \in Y$, который мы обозначим через $f(x)$. Тогда f называется **функцией** из X в Y (или **отображением** множества

X в Y). Обозначается $f : X \to Y$ или $y = f(x)$ $(x \in X,\ y \in Y)$.

Множество X есть **область определения** функции f (мы будем говорить также, что f определена на X). Элемент $x \in X$ — независимая переменная, или **аргумент**, а элемент $f(x) = y$ — значение функции, или **образ** элемента x. Множество всех элементов $f(x)$, соответствующих элементам $x \in A$, где A — произвольное подмножество множества X, называется образом множества A и обозначается $f(A)$. Множество $f(X)$ называется областью значений функции f.

Рассмотрим некоторые частные виды отображений. Если область значений $f(X)$ состоит всего из одного элемента, то функцию f называют **постоянной**. Иными словами, функция f постоянна, если значения ее на всех $x \in X$ равны одному и тому же элементу $c \in Y$. Если разным элементам $x \in X$ соответствуют разные элементы $f(x) \in Y$, то отображение f — **взаимно-однозначное** (например, соответствие между множеством людей и множеством паспортов).

Если f — взаимно-однозначное отображение, то каждому элементу $y \in f(X)$ можно поставить в соответствие определенный элемент $x \in X$, именно тот, значение функции на котором равно y. Так будет установлено отображение образа $f(X)$ на множество X. Это отображение обратно по отношению к f. Обозначается оно f^{-1}. Элемент $x = f^{-1}(y)$ называется **прообразом** элемента $y \in Y$. Может оказаться, что функция f каждому элементу $x \in X$ ставит в соответствие сам этот элемент: $f(x) = x$. В этом случае она является **тождественной**.

Функция, область значений которой представляет числовое множество, называется **числовой**.

Пусть f — функция, определенная на X со значениями в Y, а F — функция, определенная на $A \subset Y$ со значениями в H. Тогда функция φ, определенная на $B \subset X$ таком, что

$f(B) = A \cap f(X)$ со значениями в H, и действующая по формуле $\varphi(x) = F[f(x)]$, где $x \in B$, есть **сложная** функция, или **суперпозиция** функции.

Функция $f(x)$ называется **однородной (формой)** степени p, если справедливо равенство $f(tx) = t^p f(x)$, где t — некоторый параметр.

§2. Некоторые типы функций

В главе I мы рассмотрели различные типы множеств. Одни типы множеств X можно преобразовать в другие — Y с помощью различных типов отображений (функций), которые находят практическое применение и имеют свои названия (табл. 1). Мы остановимся лишь на важнейших из типов функций.

Таблица 1. Типы функций

X	Y: Множество натуральных чисел N	Числовая ось R^1	n-мерное векторное пространство R^n	Множество функций
Множество натуральных чисел	Последовательность	Последовательность	Последовательность	Последовательность
Числовая ось R^1	Оператор	Числовая функция одной переменной	Вектор-функция одной переменной	Оператор
n-мерное векторное пространство	Оператор	Числовая функция многих переменных	Вектор-функция многих переменных	Оператор
Множество функций	Оператор	Функционал	Оператор	Оператор

1. Числовые функции одной действительной переменной. Функции, областью определения которых служат множества действительных чисел, имеют многочисленные приложения.

Аргумент функции, заданной на числовом множестве, называют **действительной переменной**, а функцию — функцией одной **действительной переменной**. Мы будем изучать числовые функции одной действительной переменной, т.е. функции, отображающие числовые множества в числовые же множества.

Любую числовую функцию $f(x)$ можно изобразить **графиком** — множеством всех точек (x, y), у которых абсцисса $x \in X$, а ордината $y \in f(x)$, где $x \in X$. Итак, зная функцию f, мы можем построить ее график; осуществима и обратная операция: по заданному графику можно восстановить функцию. Если график задан на координатной плоскости, то, чтобы найти $f(x)$, достаточно через точку x провести перпендикуляр к оси Ox до пересечения с графиком, а затем из точки пересечения опустить перпендикуляр на ось Oy. Точка пересечения этого перпендикуляра с осью Oy и дает соответствующее значение $f(x)$.

Числовые функции используются для описания различных процессов и явлений. Среди этих процессов могут быть быстрые и медленные, скачкообразные и текущие гладко, непрерывно. Функции, соответствующие этим процессам, будут иметь различный характер.

Рассмотрим некоторые важные типы функций.

1. Постоянная и кусочно-постоянная функции. Числовая функция **постоянна**, если любому элементу $x \in X$ она ставит в соответствие одно и то же число c. График постоянной функции — это множество точек, расположенное на прямой l, параллельной оси Ox и проходящей через точку c на оси Oy (рис. 2). Если $c = 0$, то точки графика лежат на оси Ox. Постоянную функцию обозначают $f = \text{const}$.

Часто встречаются функции, область определения которых разбита на конечное число подмножеств так, что на каждом из подмножеств функция постоянна. Такие функции называются **кусочно-постоянными** или **ступенчатыми** (рис. 3).

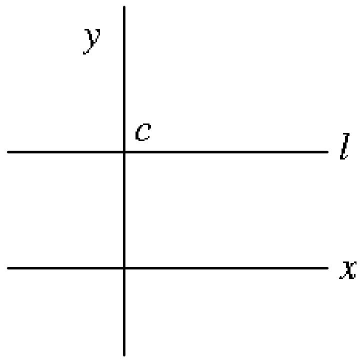

Рис. 2

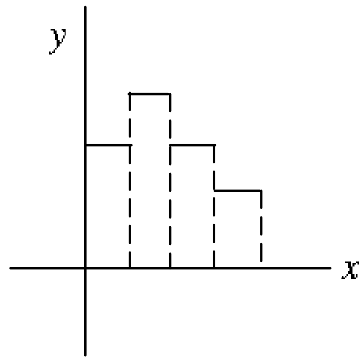

Рис. 3

2. Ограниченная функция. Числовая функция f, определенная на X, называется **ограниченной**, если существует такое число M, что для всех $x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq M$. Это неравенство запишем подробнее: $-M \leq f(x) \leq M,\ x \in X$. Следовательно, график ограниченной функции расположен между двумя прямыми, параллельными оси Ox. Примером ограниченной функции может служить функция $\sin x$, так как $|\sin x| \leq 1$. Существуют и неограниченные функции, например, x^2.

3. Монотонные функции. Числовая функция f, определенная на X, называется неубывающей, если каковы бы ни были $x_1, x_2 \in X$ из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$. Если из неравенства $x_2 > x_1$ следует строгое неравенство $f(x_2) \geq f(x_1)$, то функция является **возрастающей**.

Аналогично, функция f невозрастающая, если из неравенства $x_2 > x_1$ следует неравенство $f(x_2) \leq f(x_1)$. Невозрастающие и неубывающие функции будем называть монотонными, а строго возрастающие и строго убывающие — строго монотонными.

4. Последовательность. Функция, областью определения которой служат подмножества натурального ряда, называются **числовой последовательностью**. Если область определения последовательности — конечное множество, то последовательность называется **конечной**, в противном случае говорят, что последовательность **бесконечная**. Например, функция $f(n) = n!$, $n \in N$ — бесконечная последовательность. Последовательность иногда обозначается f_n.

2. Линейное отображение. Матрицы. Рассмотрим два векторных пространства R^n и R^m. **Линейное** преобразование R^n в R^m есть отображение $y = Ax$, ставящее каждому вектору $x \in R^n$ в соответствие некоторый вектор $y \in R^m$ так, что при этом сохраняются линейные операции сложения векторов и умножения их на число. Оператор, преобразующий вектор $x \in R^n$ в вектор $y \in R^m$, называется **матрицей**: $y = Ax$, A — матрица. Матрица представляет прямоугольную таблицу чисел и обозначается:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Здесь m — число строк, n — число столбцов. Число элементов матрицы A равно $m \times n$, или матрица A имеет размерность $(m \times n)$. Часто матрицу записывают так:

$$A = [a_{ij}].$$

Если $m = n$, то матрица является **квадратной**. При $m = 1$ получаем матрицу, содержащую только одну строку. Такая матрица называется **матрицей-строкой**. При $n = 1$ получаем одностолбцовую матрицу или **матрицу-столбец**.

Две матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ одинаковой размерности равны, если равны их элементы, стоящие на одинаковых местах, т.е. $A = B$, если $a_{ij} = b_{ij}$ при всех i и j.

Действия над матрицами.

1. Суммой двух матриц $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$ размерности $(m \times n)$ называется новая матрица C той же размерности, элементы которой определяются равенством $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Обозначается

$$C = A + B.$$

2. Произведением матрицы $A = [a_{ij}]$ на число k называется новая матрица $kA = [k \cdot a_{ij}]$ (т.е. чтобы умножить матрицу на число, надо умножить на это число все ее элементы).

3. Произведением матриц $A = [a_{ij}]$ размерности $(m \times n)$ и $B = [b_{ij}]$ размерности $(n \times p)$ называется матрица $C = [c_{ij}]$ размерности $(m \times p)$, где $c_{ij} = a_{i1} + b_{1j} + a_{i2} + b_{2j} + \ldots + a_{in} + b_{nj}$ или $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik} + b_{kj}$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,p})$.

Пример.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 1 \\ 8 & 10 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Степенью матрицы A называется матрица вида $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdots A}_{k}$, где k — натуральное число.

Для суммы и произведения справедливы ассоциативные и дистрибутивные законы:

$$(A + B) + C = A + (B + C);$$

$$(AB)C = A(BC);\ \ (A + B)C = AC + BC;$$

$$C(A + B) = CA + CB.$$

Произведение матриц не подчиняется коммутативному закону, т.е. в общем случае $AB \neq BA$.

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 6 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$BA = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица A' называется **транспонированной** по отношению к матрице A, если

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

т.е. строки и столбцы поменялись местами.

Рассмотрим квадратные матрицы. **Единичной** матрицей является квадратная матрица, по диагонали которой стоят 1, а все остальные элементы — нули.

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Определитель квадратной матрицы $A = [a_{ij}]$ $(i, j = \overline{1, n})$ есть число

$$D(A) = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Минором элемента a_{ij} матрицы A называется определитель матрицы, которая получится, если в матрице A вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец. Минор элемента a_{ij}, умноженный на $(-1)^{i+j}$, называется **алгебраическим дополнением** его. Обозначается A_{ij}.

Если определитель матрицы A равен нулю, то матрица является **вырожденной**, если же $\det A \neq 0$, то матрица A является **невырожденной**. Каждой невырожденной матрице A можно поставить в соответствие **обратную** ей матрицу A^{-1}, обладающую свойством $A{\cdot}A^{-1} = A^{-1}{\cdot}A = E$. Элементы $\tilde{a}_{ij}$ обратной матрицы A^{-1} определяются равенством $\tilde{a}_{ij} = A_{ji}/|A|$, где A_{ji} — алгебраическое дополнение элемента a_{ji} матрицы. Из этого определения следует, что для того, чтобы построить обратную матрицу для матрицы A, нужно ее транспонировать и каждый элемент матрицы A' заменить его алгебраическим дополнением, деленным на определитель матрицы A.

Пример.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad |A| = 6, \quad A' = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{a}_{11} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 2, \quad \tilde{a}_{12} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 4,$$

$$\tilde{a}_{13} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot(-12), \quad \tilde{a}_{21} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\tilde{a}_{22} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \tilde{a}_{23} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 6,$$

$$\tilde{a}_{31} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 2, \quad \tilde{a}_{32} = -\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\cdot 1,$$

$$\tilde{a}_{33} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -\frac{1}{6}\cdot 3, \quad A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix},$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 4 & -12 \\ 0 & 0 & 6 \\ 2 & 1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E.$$

Пусть A — квадратная матрица. Тогда n-мерный вектор X преобразуется в n-мерный вектор Y : $Y = AX$. Для любого преобразования A существует, по крайней мере, один такой ненулевой вектор X и такое число λ, что $AX = \lambda X$. Ненулевой вектор X и число λ, для которых выполняется это равенство, называются собственным вектором и собственным числом матрицы A.

3. Матрицы в биологических исследованиях. 1. Популяционные матрицы. Покажем, как применяются матрицы к анализу возрастной структуры и динамики популяции. Популяцию условно разобьем на n возрастных групп от только что родившихся особей до максимального в данной популяции возраста. Таким образом, в каждый фиксированный момент времени популяция представляется вектором возрастных групп

$$X(t_0) = \begin{bmatrix} x_1(t_0) \\ x_2(t_0) \\ \dots \\ x_n(t_0) \end{bmatrix},$$

где $x_i(t_0)$ — численность в i-й возрастной группе в момент t_0. В следующий момент времени t_1 (например, через год) мы будем иметь уже другой вектор:

$$X(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ \dots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix}.$$

Понятно, что вектор $X(t_1)$ связан с вектором $X(t_0)$, так как часть особей, находящихся в момент t_0 в i-й группе, перейдет в момент t_1 в другие группы, а некоторые особи зрелого возраста произведут потомство, т.е. пополнят первую возрастную группу. Во многих случаях эта связь между векторами $X(t_1)$ и $X(t_0)$ может быть установлена с помощью некоторой матрицы перехода $X(t_1) = AX(t_0)$. В самом деле, в простейшем случае мы можем рассуждать следующим образом. Из всех возрастных групп выделяем те группы, которые производят потомство. Пусть их номера будут $k, k+1, \dots, k+p$. Предположим, что момент t_1 выбран так, что за промежуток (t_0, t_1) особи i-й группы переходят в $(i+1)$-ю группу, от групп $k, k+1, \dots, k+p$ появляется потомство и часть особей из всех групп погибает. Как составить вектор $X(t_1)$? Его первая компонента $x_1(t_1)$ есть численность особей, родившихся в промежуток от t_0 до t_1. Эта численность равна сумме потомств от всех возрастных групп, производящих потомство. Понятно, что численность потомства отдельной группы будет тем больше, чем больше родителей в этой группе, т.е. чем больше $x_i(t_0)$. Можно считать, что она пропорциональна $x_i(t_0)$. Тогда потомство от i-й группы будет равно $\alpha_i x_i(t_0)$, а все потомство, появившееся в промежуток от t_0 до t_1, составит $\sum\limits_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0)$.

Итак, $x_1(t_1) = \sum\limits_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0)$.

Вторая компонента вектора $X(t_1)$ получается проще. За время от t_0 до t_1 особи, находящиеся в момент t_0 в первой возрастной группе, перейдут во вторую. Часть из них может погибнуть. Поэтому вторая компонента $x_2(t_1)$ равна не всей численности $x_1(t_0)$, а только некоторой ее части $\beta_1 x_1(t_0)$, где $0 < \beta_1 < 1$.

Аналогично получается третья компонента и все другие. Для простоты положим, что все особи, находящиеся в момент t_0 в последней возрастной группе, к моменту t_1 погибнут. Поэтому и последняя компонента вектора $X(t_1)$ составляется лишь из тех особей, которые к моменту t_1 перешли из предыдущей возрастной группы и еще не погибли: $x_n(t_1) = \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0)$, $0 < \beta_{n-1} < 1$. Коэффициенты α_i, β_i отражают внутренние особенности популяции. Первые из них можно назвать коэффициентами рождаемости, вторые — коэффициентами выживания.

Итак, вектор $X(t_1)$ определен

$$X(t_1) = \begin{bmatrix} x_1(t_1) \\ x_2(t_1) \\ \dots \\ x_n(t_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=k}^{k+p} \alpha_i x_i(t_0) \\ \beta_1 x_1(t_0) \\ \dots \\ \beta_{n-1} x_{n-1}(t_0) \end{bmatrix}.$$

Легко заметить, что вектор $X(t_1)$ получается умножением вектора $X(t_0)$ на матрицу

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_k & \alpha_{k+1} & \dots & \alpha_{k+p} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_k & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \beta_{n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

По диагонали этой матрицы стоят нули. Под диагональными элементами расположены соответственно $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n-1}$, в первой строке на месте элементов $k, k+1, \ldots, k+p$ стоят соответственно $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_{k+p}$. Все остальные элементы матрицы равны нулю.

Если деление на возрастные группы проведено так, что к воспроизводству потомства способны все группы, включая первую и последнюю, то в соответствующей матрице A все элементы первой строки будут отличны от нуля.

Итак, $X(t_1) = AX(t_0)$.

Рассматривая следующий момент t_2, к вектору $X(t_1)$ применим те же рассуждения. Тогда получим $X(t_2) = AX(t_1) = A \cdot A \cdot X(t_0) = A^2 X(t_0)$. Аналогично $X(t_k) = AX(t_{k-1}) = A \cdots A \cdot X(t_0) = A^k X(t_0)$.

Изучение матриц A, их свойств позволяет многое предвидеть в развитии популяции.

2. Матрицы рационов. Пусть какое-нибудь вещество, необходимое для жизнедеятельности животного, содержится в разных кормах. Для определенности будем говорить о витамине A. Если α_i означает количество этого витамина в 1 кг i-го корма $(i = 1, 2, \ldots, n)$, тогда вектор-строка $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ дает распределение витамина по кормам. Пусть исследуемое животное съедает в день x_1 кг первого корма, x_2 кг второго корма, ..., x_n кг n-го корма. Как подсчитать общее количество витамина A, получаемого животным в день? Очевидно, для этого достаточно скалярно умножить вектор a на вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$aX = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n. \tag{2.1}$$

Скалярное произведение мы можем трактовать как частный случай произведения матриц, а именно, как произведение матрицы a размерности $(1 \times n)$, т.е. вектор-строки, на матрицу X размерности $(n \times 1)$, т.е. вектор-столбец. По правилу умножения матриц имеем

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = [\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n].$$

В правой части получим матрицу, содержащую всего один элемент. Поэтому можно записать

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n] \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

что совпадает с правой частью равенства (2.1).

Рассмотрим теперь более сложный случай. Будем следить за расходами не только витамина A, но и еще двух витаминов B и C. Пусть матрица

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \end{bmatrix}$$

дает распределение витаминов по кормам. Каждая строка этой матрицы соответствует отдельному витамину, а каждый столбец — отдельному корму. Таким образом, в 1 кг корма номер 1 содержится α_1 витамина A, β_1 витамина B, γ_1 витамина C. Аналогично, в 1 кг i-го корма содержится α_i витамина A, β_i витамина B, γ_i витамина C. Пусть по-прежнему вектор-столбец

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$$

есть вектор потребления кормов за сутки. Тогда, желая узнать общий витаминный режим животного, мы, очевидно, должны взять произведение матриц M и X :

$$MX = \begin{bmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \\ \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n \\ \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_n x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \ldots + \gamma_n x_n \end{bmatrix}.$$

В правой части имеем вектор-столбец, первый элемент которого равен общему количеству витамина A, второй — общему количеству витамина B и, наконец, третий — общему количеству витамина C, полученному животным за сутки.

4. Уравнения. Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где $x \in X$, $y \in Y$. Пусть задан определенный элемент $y \in Y$. Требуется найти прообраз этого элемента $f^{-1}(y)$. Равенство $y = f(x)$ называется **уравнением** относительно x. Чаще всего уравнение записывается в виде

$$F(x) = 0. \tag{2.2}$$

Очевидно, это всегда возможно.

Если F — линейное отображение, то уравнение (2.2) называется линейным и записывается в виде

$$Ax + B = 0. \tag{2.3}$$

Пусть, например, $X = R^2$, $x = (x_1, x_2)$. Тогда уравнение (2.3) есть уравнение прямой $ax_1 + bx_2 + c = 0$ или $x_2 = kx_1 + p$ $(p \neq 0)$. Если $X = R^3$, то уравнение (2.3) может быть уравнением плоскости $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$.

Если в уравнении (2.2) $F(x)$ — сумма форм нулевого, первого и второго порядков, то оно называется уравнением второго порядка.

Уравнение (2.2) может описывать кривую на плоскости, если $X = R^2$. Например:

$x_1^2 + x_2^2 = r^2$ — уравнение окружности,

$\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ — уравнение эллипса,

$\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{x_2^2}{b^2} = 1$ — уравнение гиперболы.

Если $X = R^3$, то уравнение (2.2) может описывать некоторую поверхность:

$\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} = \dfrac{x_3^2}{c^2}$ — коническая поверхность,

$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = r^2$ — сфера,

$\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид вращения.

Пусть $X = R^n$. В качестве оператора A возьмем квадратную матрицу $[a_{ij}]$ размерности n, а $B = [b_i]$ $(i = \overline{1, n})$ — матрица-столбец. Тогда уравнение (2.3) можно записать в виде

$$\begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \qquad (2.4)$$

Полученное множество уравнений называется **линейной системой** алгебраических уравнений. Уравнение (2.3) — матричная форма записи системы (2.4), если произведение Ax понимать как произведение матрицы $A = [a_{ij}]$ на матрицу-столбец $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{bmatrix}$. Решение системы (2.4) находим в виде $x = A^{-1} \cdot B$.

ГЛАВА III. ПРЕДЕЛЫ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Предел функции — важнейшее понятие математического анализа.

Если имеем конечное множество X, то задать функцию $f(x)$, $x \in X$ несложно, для этого достаточно перечислить ее значения. В случае, когда X — бесконечное множество, так задать функцию мы уже не сможем. Часто функцию задают таблично, т.е. для некоторых $x \in X$ записываются соответствующие им значения функции $f(x)$. Но это приближенный способ задания функции, так как мы надеемся, что в точках, не совпадающих с табличными, значения функции близки. Однако это не всегда так, например, для функция $f(x) = \begin{cases} x+1, & x<1, \\ -3x+8, & 1<x<3 \end{cases}$ (рис. 4).

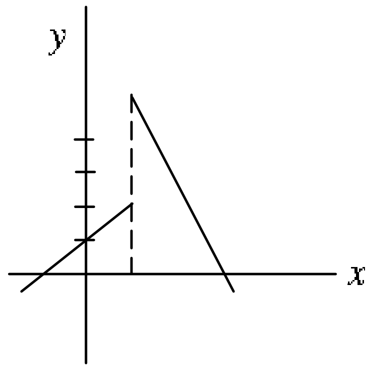

Рис. 4

Когда можно характеризовать функцию конечным множеством ее значений, а когда нельзя?

Возьмем какую-нибудь точку $x_0 \in R^1$. Если $f(x)$ такова, что она будет приближаться к значению $f(x_0)$, когда $x \to x_0$, тогда, задав это значение функции, можем представить приближенное поведение функции $f(x)$ на некотором отрезке, включающем точку x_0.

Рассмотрим функцию $y = x^2$. Выберем произвольно точку x_0. Пусть для определенности $x_0 = 1$. Рассмотрим значения функции в точках, близких к точке x_0 : $f(1,1) = 1,21$; $f(-0,9) = 0,81$; $f(-0,99) = 0,9801$; $f(1,01) = 1,0201$; $f(1,001) = 1,002001$ и т.д. Как видим, чем ближе к $x_0 = 1$ возьмем точки, тем значения функции в этих точках будут меньше отличаться от $f(1) = 1$, т.е.

$$|f(x) - f(x_0)| \to 0, \quad \text{когда} \quad |x - x_0| \to 0. \tag{3.1}$$

Но может быть другой случай:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, \\ 0, \quad x = 1. \end{cases}$$

Поведение такой функции в точках, близких к единице, мы не сможем характеризовать значением функции $f(1)$.

Итак, для функций можно указать характеристику, которая играет важнейшую роль в их анализе и называется **пределом** функции в рассматриваемой точке. Однако свойством (3.1) обладают только непрерывные функции.

§1. Понятие предела

1. Предел функции в точке. Пусть x_0 — некоторая точка на оси (рис. 5).

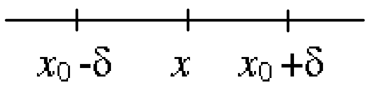

Рис. 5

Если x принадлежит **окрестности** точки x_0, то это эквивалентно выполнению неравенства $|x - x_0| < \delta$. Функция f, определенная на некотором промежутке (a, b), имеет в точке $x_0 \in (a, b)$ **предел**, равный c, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x) - c| < \varepsilon$, как только $|x - x_0| <$

δ, $x \neq x_0$, $x \in [a, b]$. Из определения следует, что ε, в частности, можно выбирать сколь угодно малым. И если функция имеет предел c в точке x_0, то каким бы малым ни было $\varepsilon > 0$, разность $|f(x) - c|$ будет меньше этого ε в окрестности точки x_0, если достаточно узкой подобрать окрестность. Например, функция $f(x) = x^3$, $x \in (0, 1)$ имеет в точке 0 предел, равный 0. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0, 1)$ не имеет предела в точке 0.

В определении предела есть условие $x \neq x_0$. Смысл этой оговорки поясним на примере. Пусть функция $f(x)$ задана на промежутке $[-1, 1]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = 0, \\ x^2 \text{ при } x \neq 0,\ x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

Из рис. 6 видно, что если исключить из рассмотрения единственную точку $x_0 = 0$, то в достаточно малой окрестности точки x_0 функцию $f(x)$ можно приближенно заменить постоянной, равной нулю. Естественно поэтому считать, что функция $f(x)$ имеет в точке $x_0 = 0$ предел и этот предел равен нулю.

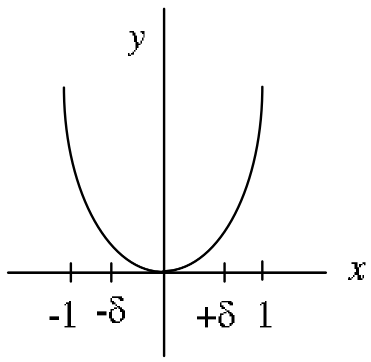

Рис. 6

Если функция $f(x)$ имеет предел c в точке x_0, то говорят, что функция $f(x)$ стремится к c, когда x стремится к x_0. Обозначают это так:

$$f(x) \to c \text{ при } x \to x_0 \text{ или } \lim_{x \to x_0} f(x) = c.$$

До сих пор мы говорили о пределе функции, равном конечному числу c. В окрестности граничных точек может быть изучена и другая возможность. Сравним, например, две функции, заданные на отрезке $(0,1)$: $\frac{1}{x}$ и $\sin\frac{1}{x}$. Первую функцию уже рассматривали, она не имеет конечного предела в точке 0. Функция $\sin\frac{1}{x}$ также не имеет предела в точке 0, так как в любой окрестности этой точки она принимает бесконечно много раз все значения, заключенные между -1 и $+1$, не приближаясь ни к какой постоянной. Итак, обе функции не имеют предела. Но первая функция $\frac{1}{x}$ ведет себя более регулярно: ее значения по мере приближения к точке 0 неуклонно растут, становятся больше какого угодно большого числа. Говорят при этом, что функция $f(x)$ стремится к $+\infty$ при x, стремящемся к нулю.

Пусть функция $f(x)$ задана на открытом промежутке (a,b). Будем говорить, что при $x \to a$ $f(x) \to +\infty$, если, каким бы большим ни было число $M > 0$, найдется такая окрестность точки a, что для всех x из пересечения этой окрестности с (a,b) значения функции $f(x)$ превосходят M. Например, $y = \operatorname{tg} x$, $x \in \left(\frac{\pi}{2}, 2\pi\right)$ при $x \to \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{tg} x \to \infty$. Аналогично, при $x \to a$ $f(x) \to -\infty$, если, каким бы большим ни было число $M > 0$, найдется такая окрестность точки a, что для всех x из пересечения этой окрестности с (a,b) значения функции будут меньше $-M$.

В первом случае говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке a положительный **бесконечный** предел, во втором — отрицательный бесконечный предел.

2. Поведение функции на бесконечности. Предел последовательности. Мы рассматривали функции, заданные на конечных промежутках. Рассмотрим теперь функции, определенные на неограниченных множествах.

Пусть функция $f(x)$ задана на бесконечном промежутке $[a,+\infty)$. Будем говорить, что $f(x)$ имеет **предел**, равный c при $x \to$

$+\infty$, если для любого сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $N(\varepsilon)$, что $|f(x) - c| \leq \varepsilon$ как только $x \geq N$. Это записывается так: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$.

Пример.

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = 1.$$

Аналогично определяется предел $f(x)$ при $x \to -\infty$. При этом неравенство $x \geq N$ заменяется неравенством $x \leq -N$.

Помимо конечного предела можно рассматривать и бесконечный предел функции в бесконечно удаленной точке. Функция $f(x)$, заданная на промежутке $[a, +\infty)$, стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$, если, каким бы большим ни было число $M > 0$, найдется такое число $N > 0$, что для всех $x > N$ значения функции $f(x)$ превосходят M :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty.$$

Например, $\lim\limits_{x \to \infty} x^2 = \infty$. Подобным образом определяется предел при $x \to -\infty$, а также предел, равный $-\infty$.

В заключение остановимся на пределе бесконечной последовательности. Область определения бесконечной последовательности — натуральный ряд, и мы можем говорить о пределе последовательности при $n \to +\infty$.

Последовательность $f(n)$ имеет **конечный предел** c (при $n \to +\infty$), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое N, что для всех $n > N$ разность $|f(n) - c|$ не превосходит ε. Говорят, что последовательность $f(n) \to c$ при $n \to +\infty$. Например, $f(n) = \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Последовательность $f(n) \to \infty$ (при $n \to +\infty$), если, каким бы большим ни было число $M > 0$, найдется такое число $N > 0$, что для всех $n > N$ значения $f(n)$ превосходят M. Например: $f(n) = n^2$, $\lim\limits_{n \to \infty} n^2 = \infty$. Примером последовательности, не имеющей предела, является последовательность $f(n) = (-1)^n$.

Если последовательность имеет конечный предел, то она называется **сходящейся**. Если предел не существует или он равен ∞, то последовательность называется **расходящейся**. Например, $f(n) = n^2$ и $f(n) = (-1)^n$ — расходящиеся последовательности.

Теорема 1. *Ограниченная монотонная последовательность имеет конечный предел.*

Мы не будем доказывать теорему, но подчеркнем, что для существования конечного предела обязательны оба требования: и ограниченность, и монотонность. В самом деле, $f(n) = (-1)^n$ — ограниченная, $f(n) = n^2$ — монотонная последовательности, однако обе они расходятся.

3. Число e. Рассмотрим последовательность $f_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. По формуле бинома:

$$f_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}-\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{1}{n^n} = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+$$
$$+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Если от f_n перейти к f_{n+1}, т.е. увеличить n на единицу, то, прежде всего, добавится новый $(n+2)$-й (положительный) член, каждый же из написанных $(n+1)$-х членов увеличится, так как любой множитель в скобках вида $\left(1 - \dfrac{s}{n}\right)$ заменится бо́льшим множителем $\left(1-\dfrac{s}{n+1}\right)$. Отсюда следует, что $f_{n+1} > f_n$, т.е. последовательность f_n — возрастающая. Покажем, что она ограничена сверху. Опустив в выражении (2) все множители в скобках, мы этим увеличим его, так что

$$f_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}=\tilde{f}_n.$$

Заменив каждый множитель в знаменателях дробей (начиная с третьей) числом 2, мы еще увеличим полученное выражение:

$$\tilde{f}_n < 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2+\left(\frac{1}{2^n}\right)<3.$$

А, значит, и $f_n < 3$. Тогда, по приведенной теореме, последовательность f_n имеет конечный предел (так как она возрастающая и ограниченная сверху). Этот предел обозначают буквой l :

$$l=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2,718281\ldots$$

§2. Свойства пределов

Теорема 2. *Предел постоянной равен самой этой постоянной.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(x)=c$, то в любой окрестности, в том числе и в окрестности точки x_0, выполняется равенство $f(x)=c$. Таким образом, в этой окрестности можем написать $|f(x)-c|=|c-c|=0$. Отсюда следует, что $|f(x)-c|$ не превосходит любого числа $\varepsilon>0$.

Теорема 3. *Если $f(x)$ имеет конечный предел при $x\to x_0$ и этот предел больше некоторого p, то существует окрестность точки x_0 для всех точек $x\neq x_0$, в которой $f(x)>p$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c > p$. Выберем $\varepsilon > 0$ столь малым, чтобы $\varepsilon < c - p$, т.е. $-(c-p) < f(x) - c < c - p$. Из левого неравенства следует, что для всех точек $x \neq x_0$ из выбранной окрестности $f(x) > p$.

Аналогично формулируется и доказывается теорема, если $c < p$. Тогда найдется окрестность точки x_0, в которой $f(x) < p$. В частности, p может быть равно нулю. В этом случае теорема 2 утверждает, что знак функции в достаточно малой окрестности точки x_0 совпадает со знаком предела функции в этой точке, поэтому данную теорему иногда называют теоремой о стабилизации знака.

Следствие 1. *Функция, принимающая неотрицательные значения во всех точках промежутка, не может иметь отрицательного предела ни в одной точке этого промежутка.*

В самом деле, предположив противное, придем к противоречию с теоремой 2.

Следствие 2 (об единственности предела). *Если $f(x)$ при $x \to x_0$ имеет конечный предел, то этот предел единственный.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ и, кроме того, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = d$. Пусть для определенности $c < d$. Выберем какое-нибудь число l, обладающее тем свойством, что $c < l < d$. Тогда, в силу левого неравенства и теоремы 2, найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x) < l, \quad |x - x_0| \leq \delta_1, \quad x \neq x_0$, а в силу правого неравенства и теоремы 2 найдется такая окрестность той же точки x_0, в которой $f(x) > l, \quad |x - x_0| \leq \delta_2, \quad x \neq x_0$. Так как, очевидно, одна из приведенных окрестностей содержит другую, то в более узкой окрестности выполняются оба неравенства. Но эти неравенства противоречивы. Следовательно, предположение о существовании двух различных пределов неверно.

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные пределы при $x \to x_0$. Тогда предел арифметической операции от этих функций (т.е. предел суммы, разности, произведения или частного от деления этих двух функций) существует и равен соответствующей арифметической операции от их пределов.*

В случае деления предполагается, что предел знаменателя отличен от нуля. Другими словами, теорема 4 утверждает, что если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}, \quad \text{если} \quad \lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем эту теорему для случая сумм. Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = d$. Это значит, что для заданного $\varepsilon > 0$ существуют такие окрестности точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из первой окрестности $|f(x) - c| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ и для всех $x \neq x_0$ из второй окрестности $|g(x) - d| \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Понятно, что в пересечении этих окрестностей при $x \neq x_0$ выполняются оба неравенства. Таким образом, для пересечения окрестностей можем записать

$$|f(x) + g(x) - (c + d)| \leq |f(x) - c| + |g(x) - d| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, для заданного $\varepsilon > 0$ мы указали такую окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности разность между функцией $f(x) + g(x)$ и постоянной $c + d$ не превосходит ε. Это означает, по определению предела, что $\lim\limits_{x \to x_0}[f(x) +$

$g(x)] = c + d$ или $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Теорема справедлива и когда $x \to \infty$.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x - x^2) = \lim\limits_{x\to 2} 3x - \lim\limits_{x\to 2} x^2 = 6 - 4 = 2$.

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{4x^3 - 2}{5x + 1} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 1} 4x^3 - \lim\limits_{x\to 1} 2}{\lim\limits_{x\to 1} 5x + \lim\limits_{x\to 1} 1} = \dfrac{4-2}{5+1} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

§3. Бесконечно малая. Сравнение бесконечно малых

Пусть функция $f(x)$ имеет при $x \to x_0$ или $x \to \pm\infty$ предел, равный нулю. Такую функцию будем называть бесконечно малой в окрестности точки x_0 или $\pm\infty$. Пусть, например, некоторая функция $g(x)$ имеет при $x \to x_0$ предел, равный c. Тогда разность $g(x) - c = \alpha(x)$ есть бесконечно малая величина в окрестности точки x_0.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$. Часто надо знать, как "быстро" функция $f(x)$ стремится к нулю. Например, $f(x) = x^2$ стремится к нулю "быстрее", чем функция $g(x) = x^{1/2}$, так как на отрезке $(0, 1)$ x^2 принимает меньшие значения, чем $x^{1/2}$.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. Обозначим $k = \lim\limits_{x\to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$. Говорят, что $f(x)$ и $g(x)$ имеют **одинаковый порядок малости** при $x \to x_0$, если $0 < k < +\infty$. Пишут $f(x) = O[g(x)]$ при $x \to x_0$. Если $k = 0$, то $f(x)$ имеет **более высокий порядок малости** по сравнению с $g(x)$: $f(x) = o[g(x)]$ при $x \to x_0$. Если $k = 1$, то $f(x)$ и $g(x)$ называют **эквивалентными** бесконечно малыми. Пишут $f(x) \sim g(x)$ при $x \to x_0$.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} x = 0$, следовательно, $x^2 = o[x]$.

2. Из школьного курса известно, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\sin x \sim x$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2, \quad \sin 2x = O[x].$

При подсчете предела отношения двух бесконечно малых, каждую из них можно заменить на эквивалентную, не изменив величины предела. В самом деле, если $f \sim f_1$ и $g \sim g_1$, то из тождества $\dfrac{f}{g} = \dfrac{f}{f_1}\cdot\dfrac{f_1}{g_1}\cdot\dfrac{g_1}{g}$ следует, что $\lim\dfrac{f}{g} = \lim\dfrac{f}{f_1}\cdot\lim\dfrac{f_1}{g_1}\cdot\lim\dfrac{g_1}{g} = \lim\dfrac{f_1}{g_1}$, так как $\lim\dfrac{f}{f_1} = \lim\dfrac{g}{g_1} = 1$.

§4. Непрерывность функции

1. Понятие непрерывности функций. Пусть функция определена на замкнутом или открытом промежутке. Говорят, что $f(x)$ **непрерывна в точке** x_0, если: а) точка x_0 принадлежит области определения $f(x)$; б) $f(x)$ имеет в этой точке конечный предел; в) этот предел равен значению функции в данной точке. Кратко: функция непрерывна в точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Таким образом, функция непрерывна в точке x_0, если при x, "мало" отличающихся от x_0, значение $f(x)$ "мало" отличается от $f(x_0)$.

Примеры.

1. $f(x) = \sin x, \quad \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Функция непрерывна в точке $\dfrac{\pi}{4}$.

2. $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x \le 0. \end{cases}$ Это — функция Хевисайда (рис. 7).

Она не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

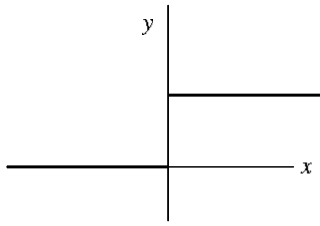

Рис. 7

Определить непрерывную функцию можно и по-иному. Обозначим разность $x - x_0 = \Delta x$, назовем ее **приращением аргумента** в точке x_0. Тогда $x = x_0 + \Delta x$. Разность $f(x) - f(x_0) = \Delta f$ назовем **приращением функции**, $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ — функция от Δx. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если $\Delta f \to 0$, когда $\Delta x \to 0$ (рис. 8). Функция, непрерывная в каждой точке некоторого отрезка, непрерывна на всем отрезке.

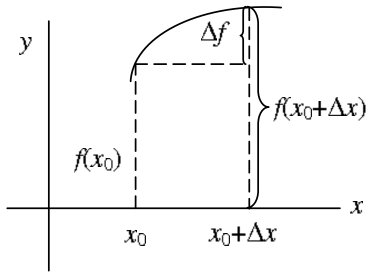

Рис. 8

2. Разрывные функции. Свойство непрерывности — "местное", "локальное" свойство. Не случайно мы говорим: "непрерывна в точке x_0". Это свойство может выполняться в одних точках и нарушается в других. Точки, где нарушается условие непрерывности, называются **точками разрыва** функции. Например, функция Хевисайда имеет $x = 0$ — точку разрыва, так как в этой точке она не имеет предела. Однако, если эту функцию рассматривать не во всей δ-окрестности нуля, а только справа, т.е. в пересечении δ-окрестности с отрезком $(0, +\infty)$, то функция имеет предел, равный 1. Этот предел называется **пределом справа**: $\lim\limits_{x \to x_0 + \alpha} f(x) = 1$ (здесь

$\lim\limits_{x \to x_0} \alpha = 0$). Аналогично, существует и **предел слева**, т.е. в пересечении δ-окрестности с отрезком $(-\infty, 0)$ он равен 0: $\lim\limits_{x \to x_0 - \alpha} f(x) = 0$.

Точки разрыва, в которой у функции существуют конечные, не равные между собой пределы слева и справа, называются **точками конечного разрыва**, или **точками разрыва первого рода**.

Таким образом, рассмотренная функция непрерывна всюду, за исключением точки $x = 0$, в которой она имеет конечный разрыв.

Точка разрыва, в которой хотя бы один из пределов не существует или существуют оба предела слева и справа, но хотя бы один из них бесконечен, называется **точкой разрыва второго рода**.

Например:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} \text{ при } x \neq 0, \\ -2 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Здесь $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует. Предел слева $\lim\limits_{x \to 0 - \alpha} f(x) = -2$, предел справа $\lim\limits_{x \to 0 + \alpha} f(x) = +\infty$. Точка $x = 0$ — точка разрыва второго рода.

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ при } x \neq 0, \\ 1 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция определена на всей оси. В точке $x = 0$ существуют пределы справа и слева, они равны между собой и равны нулю. Однако они не равны значению функции в нуле, так как по определению $f(0) = 1 \neq 0$. Следовательно, в точке $x = 0$ нарушается условие непрерывности. Разрыв такого рода называется **устранимым**. Мы можем устранить этот разрыв, если переопределим функцию в одной точке, а именно, в точке разрыва надо в качестве значения функции взять общее значение пределов слева и справа.

Из всего сказанного следует, что для того, чтобы функция была непрерывна в точке x_0, нужно, чтобы в этой точке существовали конечные пределы справа и слева, чтобы эти пределы были равны между собой и чтобы их общее значение совпадало со значением функции в этой точке.

Примеры.

1. Рассмотрим изменение биомассы микроорганизмов, чувствительных к температурным колебаниям. При увеличении температуры общая биомасса m, как правило, увеличивается (тепло способствует размножению). Однако, когда температура слишком высока, практически вся колония гибнет, значение m скачкообразно меняется и становится равным нулю. Примерно то же самое происходит и при понижении температуры: как только она достигает некоторого нижнего предела, микроорганизмы погибают. В реальных условиях температура меняется в зависимости от времени, то повышаясь, то понижаясь. Поэтому, изображая графически изменение биомассы в зависимости от времени, мы можем получить разрывную кривую (рис. 9). Точки разрыва t_1, t_2, t_3 соответствуют тем моментам времени, когда температура стала слишком высокой или слишком низкой и микроорганизмы погибли.

2. Хорошо известно, что нервная клетка находится в двух состояниях: возбуждения и торможения. Если первому состоянию приписать значение, равное единице, а второму — нуль, то “график работы” нервной клетки будет разрывной функцией, равной единице в момент возбуждения и нулю — в момент торможения (рис. 10).

3. Все элементарные функции: l^x, a^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln\, x$, x^n,

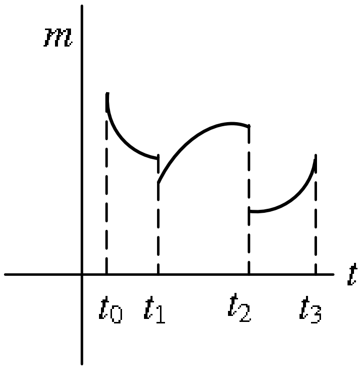

Рис. 9

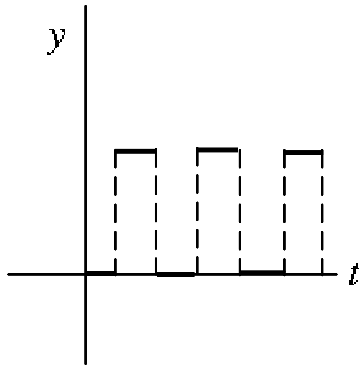

Рис. 10

$\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ и любые их линейные комбинации являются непрерывными функциями.

4. Слух, зрение связаны с колебательными процессами, описание которых достигается с помощью функций $\sin x$, $\cos x$.

5. Степенной функцией $f(x) = Ax^{\alpha}$ описывается зависимость интенсивности кислородного обмена от веса животного. Здесь x — вес животного, $f(x)$ — количество кислорода, поглощаемого животным в единицу времени, A и α — параметры, постоянные для данного класса живых существ.

§5. Общие понятия предела и непрерывности функции в точке

Введенные понятия предела и непрерывности в точке распространяются на отображения более общей природы.

Окрестностью точки x_0 назовем множество точек $x \in X$, для которых $\rho(x, x_0) < \delta$. Пусть X, Y — метрические пространства с метриками $\rho(x, x_0)$ и $\rho(y, y_0)$, $F(x)$ — функция, отображающая множество X в Y. Точку $y_0 \in Y$ назовем пределом функции $F(x)$ в точке $x_0 \in X$, если по произвольному $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon)$, что неравенство $\rho(F(x), y_0) < \varepsilon$ выполняется для всех x, для которых $\rho(x, x_0) < \delta$.

Определение непрерывности дается аналогично. Пусть X и

Y — два нормированных пространства. Будем называть отображение $f : X \to Y$ непрерывным в данной точке x, если $\|f(x+h) - f(x)\| \to 0$ при $\|h\| \to 0$.

Остановимся подробнее (для простоты) на числовых функциях двух переменных. Пусть $f(x,y) : R^2 \to R^1$. Назовем окрестностью точки (x_0, y_0) круг некоторого радиуса с центром в этой точке. Пусть функция $f(x,y)$ определена в некоторой области D, включающей в себя точку (x_0, y_0).

Определение 1. Функция $f(x,y)$ имеет предел c в точке (x_0, y_0), если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что для всех точек (x,y) из окрестности (x_0, y_0), не совпадающих с (x_0, y_0), разность $|f(x,y) - c| \leq \varepsilon$, как только радиус окрестности меньше δ. Кратко это записывают так: $\lim\limits_{\rho \to 0} f(x,y) = c$, где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ — расстояние между точкой (x,y) и (x_0, y_0), или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = c$.

Определение 2. Функция $f(x,y)$ называется непрерывной в точке (x_0, y_0), если а) $(x_0, y_0) \in D$, б) функция f имеет в этой точке конечный предел, в) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0)$.

ГЛАВА IV. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ

§1. Основные понятия. Операции над множествами

Свойство дифференцируемости функции наряду с непрерывностью имеет важное значение как в теории функций, так и в приложениях. Рассмотрим на примере. Обозначим через N численность какого-нибудь вида на данной территории. В силу размножения и смертности N меняется со временем, т.е. N есть функция, зависящая от времени: $N = N(t)$. Если рождаемость превышает смертность, то $N(t)$ будет расти с ростом t. Взяв два момента времени t_1 и t_2, получим за промежуток времени $\Delta t = t_2 - t_1$ прирост численности, равный $\Delta N = N(t_2) - N(t_1)$. Отношение $\dfrac{\Delta N}{\Delta t}$ — средняя скорость роста численности вида за промежуток Δt, а $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta N}{\Delta t} = N'(t_1)$ — мгновенная скорость роста в момент t_1. В общем случае этот предел носит название производной, а о функции $N(t)$ говорят, что она дифференцируема.

Рассмотрим эти понятия для числовых функций одной переменной.

§1. Производная функции

1. Определение производной. Пусть функция $y = f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности фиксированного x_0. Рассмотрим точку $x_0 + \Delta x$ из этой окрестности и вычислим соответствующее приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. **Производной** функции $y = f(x)$ по независимой переменной x в точке x_0 (обозначается $f'(x)$ или y') называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0: \quad f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Операция нахождения производной функции называется ее **дифференцированием**. Функция $f(x)$ является дифференцируемой в точке x_0, если она имеет в этой точке конечную производную. Функция $f(x)$ является дифференцируемой на промежутке (a, b), если она дифференцируема в каждой точке этого промежутка.

2. Геометрический смысл производной. Рассмотрим поведение функции на некотором промежутке (a, b) (функция $f(x)$ задана на (a, b)). На графике функции возьмем две точки $M(x_0, f(x_0))$ и $P(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ (рис. 11). Проведем через эти точки секущую, образующую с осью Ox угол, который мы обозначим φ. Устремим теперь $\Delta x \to 0$. При этом точка P будет скользить по кривой, а секущая MP, постепенно меняя свой наклон, будет стремиться к некоторому "предельному" положению ML. Это предельное положение секущей при $\Delta x \to 0$ (если оно существует) называется касательной к кривой в точке M. Из чертежа видно, что тангенс угла наклона секущей $\operatorname{tg}\varphi$ равен $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$. Может случиться, что существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi$. Если этот предел существует, то мы примем его за $\operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной в точке M к оси Ox :

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

Следовательно, геометрически производная есть тангенс угла наклона касательной к кривой $y = f(x)$ в данной точке x_0. Тангенс угла наклона касательной является очень удобной характеристикой поведения функции в точке. В самом деле, если он положителен (т.е. угол α — острый), то функция растет в окрестности исследуемой точки (точка x_1), если $\operatorname{tg}\alpha$ отрицателен (это значит, что α — тупой угол), то функция в окрестности точки x_2 убывает, если $\operatorname{tg}\alpha > 0$ и значителен по величине, то функция растет быстро, если $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и невелик, то функция растет медленно.

3. Физический смысл производной. Из приведенного в начале главы примера следует, что мгновенная скорость роста численности есть производная от численности по времени. Рассмотренный пример иллюстрирует физический смысл производной, заключающийся в том, что производная в каждой точке равна скорости изменения функции в этой точке по сравнению со скоростью изменения аргумента.

4. Правила дифференцирования. Относительно операции дифференцирования могут быть доказаны следующие

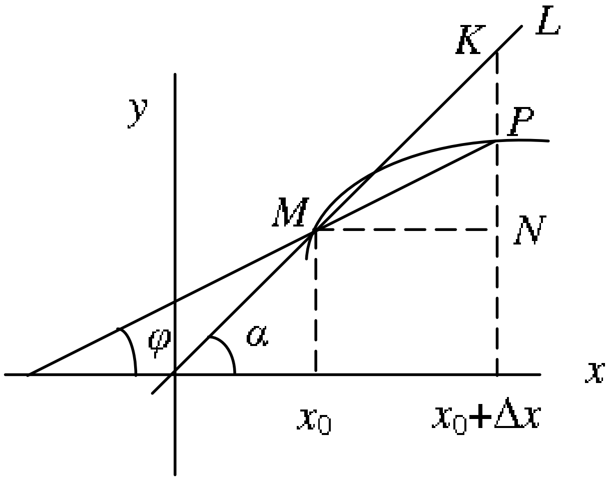

Рис. 11

теоремы (мы их сформулируем в виде правил).

1. Если $f(x) = a$, где $a = \mathrm{const}$, то $f'(x) = 0$, т.е. производная постоянной равна нулю.

2. Если $f(x) = u(x) \pm v(x)$, то $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$, т.е. производная алгебраической суммы дифференцируемых функций равна алгебраической сумме производных.

3. Если $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, то $f'(x) = u'(x)v(x) + v'(x)u(x)$, т.е. производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на производную второго плюс произведение второго сомножителя на производную первого.

Следствие. *Если $f(x) = au(x)$, где $a =$const, то $f'(x) = [au(x)]' = au'(x)$, т.е. постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

4. Если $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$, то $f'(x) = \dfrac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{v^2(x)}$, т.е. производная дроби равна дроби, в знаменателе которой стоит квадрат знаменателя дифференцируемой функции, а в числителе — разность производной числителя, умноженной на знаменатель, и производной знаменателя, умноженной на числитель.

Следствие. *Если* $f(x)=\dfrac{a}{v(x)}$, *где* $a=$*const*, *то* $f'(x)=\dfrac{av'(x)}{v^2(x)}$, *в частности, при* $a=1$ *получаем*

$$f'(x)=\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=-\frac{v'(x)}{v^2(x)}.$$

5. Производная сложной функции $y=f[\varphi(x)]$, составленной из дифференцируемых функций $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, существует и равна произведению производной внешней функции $y=f(u)$ по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной $x:\quad y'=f'(u)\cdot u'$.

6. Если g — обратная функция по отношению к f, то $g'(u)=\dfrac{1}{f'(x)}$, где $x=g(y)$, т.е. производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции, вычисленной в соответствующей точке (предполагается, что $f'(x)\neq 0$). Все эти правила выводятся из определения производной и свойств пределов. Для примера выведем 2-е правило. Пусть $f(x)=u(x)\pm v(x)$. Дадим x приращение Δx, тогда $u,\ v,\ f$ получат соответственно приращения $\Delta u,\ \Delta v,\ \Delta f:\quad f+\Delta f=(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)$. Отсюда

$$\Delta f=\Delta u\pm\Delta v,\quad \frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x},$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v',$$

т.е.

$$f'(x)=u'(x)\pm v'(x).$$

Выведем правило 5. Имеем $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Фиксируем x, даем x приращение Δx. При этом u получит приращение Δu, $\Delta u=\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)$, а y — соответствующее приращение $\Delta y=f(u+\Delta u)-f(u)$. Из равенства $f'(u)=$

$\lim\limits_{\Delta u \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ следует, что $\dfrac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha$, $\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha \Delta u$, где α — бесконечно малая при $\Delta u \to 0$. Заметим, что при $\Delta x \to 0$ будут стремиться к нулю Δu и α. Поэтому $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(f'(u) \dfrac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha \dfrac{\Delta u}{\Delta x} \right) = f'(u)u'$.

Производные элементарных функций. Производные элементарных функций находятся по следующим формулам:

N	y	y'	N	y	y'	N	y	y'
1	c	0	7	e^x	e^x	13	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	x^m	mx^{m-1}	8	$\ln\ x$	$\frac{1}{x}$	14	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	9	$\sin x$	$\cos x$	15	$\mathrm{arctg}\, x$	$\frac{1}{1+x^2}$
4	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	10	$\cos x$	$-\sin x$	16	$\mathrm{arcctg}\, x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
5	a^x	$a^x \ln\ a$	11	$\mathrm{tg}\, x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$			
6	$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln\ a}$	12	$\mathrm{ctg}\, x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$			

Эти формулы выводятся из определения производной и свойств пределов. Для примера выведем несколько формул.

1. Пусть $y = \log_a x$, где $0 < a \neq 1$. Тогда

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \left(\frac{x + \Delta x}{x} \right) = \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right).$$

По определению производной

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)}{\frac{\Delta x}{x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x} \log_a \lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^{\frac{x}{\Delta x}} =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a l = \frac{1}{x \ln a}.$$

2. Пусть $y = \sin x$. Тогда $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \cos \dfrac{x + \Delta x + x}{2} \sin \dfrac{\Delta x}{2}$, $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Big[2 \cos \left(x + \dfrac{\Delta x}{2} \right) \times$

$$\times \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\Bigg] \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \left[\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right] = \cos x.$$

§2. Дифференциал функции

Рассмотрим непрерывную функцию $y = f(x)$ вблизи точки x_0, т.е. при $x = x_0 + \Delta x$. Здесь величина Δx будет бесконечно мала. Эту функцию можно представить следующим образом:

$$f(x_0 + \Delta x) = b + k\Delta x + \alpha = b + k(x - x_0) + \alpha, \qquad (4.1)$$

где α — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx, т.е. $\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Равенство (4.1) означает, что линейная функция $b + k\Delta x$ приближенно представляет данную функцию с точностью α. Определим коэффициенты b и k. Полагая $\Delta x = 0$, найдем, что $b = f(x_0)$. Теперь можно записать: $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + k\Delta x + \alpha$ или $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k\Delta x + \alpha$. В левой части стоит приращение функции, поэтому

$$\Delta y = k\Delta x + \alpha. \qquad (4.2)$$

Из формулы (4.2) видно, что приращение функции состоит из двух частей: линейной части $k\Delta x$ и α.

Линейная часть приращения $k\Delta x$ называется **дифференциалом** функции и обозначается $dy = k\Delta x$. Приращение функции отличается от ее дифференциала на величину бесконечно малую более высокого порядка малости, чем Δx, т.е.

$$\Delta y = dy + o(\Delta x). \qquad (4.3)$$

Из равенства (4.2) можно найти k : $\quad k = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - \dfrac{\alpha}{\Delta x}$. Переходя в этом равенстве к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$k = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\alpha}{\Delta x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\alpha}{\Delta x},$$

т.к. α — бесконечно малая более высокого порядка малости, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha}{\Delta x}=0$, следовательно, $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$.

Итак, дифференциал функции в данной точке равен произведению производной (в этой точке) на приращение аргумента

$$df=f'(x_0)\cdot\Delta x. \tag{4.4}$$

Дифференциал функции имеет четкий геометрический смысл. Чтобы выяснить его, вернемся к геометрической интерпретации производной (рис. 12). Наряду с отрезком NP, длина которого равна Δf, рассмотрим отрезок NK. Длина его равнялась бы приращению функции Δf в точке x_0, если бы из точки M мы двигались не по кривой, а по касательной $M\mathcal{L}$. Из чертежа видно, что $|NK|=\Delta x\operatorname{tg}\alpha=\Delta x\cdot f'(x_0)=df$. Таким образом, дифференциал функции f в точке x_0 — это величина приращения функции в этой точке, которая получилась бы, если б участок кривой $y=f(x)$ в промежутке $[x_0,x_0+\Delta x]$ заменить прямой — касательной к этой кривой в точке $M(x_0,f(x_0))$. Из уравнения (4.3) следует, что при такой замене мы допускаем погрешность $o(\Delta x)$.

Равенство (4.4) можно записать в другой форме. Чтобы установить эту форму, подсчитаем вначале дифференциал функции $f(x)=x$. Имеем $(x)'=1$. Поэтому, подставив $f(x)=x$ в формулу (4.4), получим $df=x'\Delta x=\Delta x$ или $df=\Delta x$. Последнее равенство утверждает, что дифференциал аргумента совпадает с его приращением. Подставляя в уравнение (4.4) dx вместо Δx, получим $df=f'(x)dx$. Новое выражение для производной будет иметь вид $f'(x)=\dfrac{df}{dx}$, т.е. производная в точке x равна отношению дифференцируемой функции в этой точке к дифференциалу аргумента. Из равенства (4.3) видно, что Δf и df — эквивалентные бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{df} = 1$. Отсюда следует, что при малых Δx в ряде задач вместо приращения функции в точке x можно приближенно брать ее дифференциал (если производная в этой точке отлична от нуля).

§3. Приложения производной

1. Теорема Лагранжа о конечном приращении.

Теорема 1. *Пусть: а) функция $f(x)$ определена и непрерывна в замкнутом промежутке $[a, b]$; б) существует конечная производная $f'(x)$, по крайней мере, в открытом промежутке (a, b). Тогда между a и b найдется такая точка c $(a < c < b)$, что для нее выполняется равенство*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \tag{4.5}$$

Выясним геометрический смысл теоремы Лагранжа. Пусть дуга кривой, изображенной на рис. 12, есть график функции $y = f(x)$ на $[a, b]$.

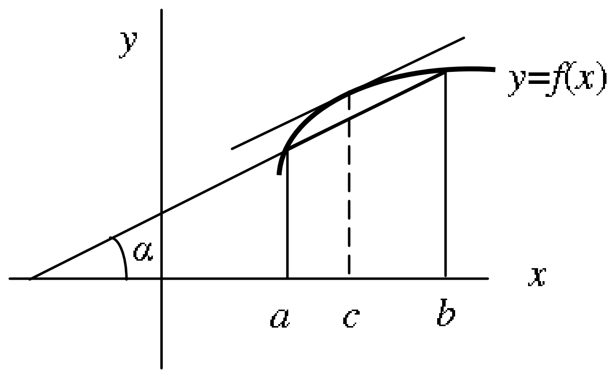

Рис. 12

Функция на концах отрезка принимает значения $f(a)$ и $f(b)$. Проведем хорду MN, стягивающую данную дугу, и вычислим тангенс угла наклона хорды к оси Ox : $\operatorname{tg} \alpha_x = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Итак, правая часть равенства (4.5) представляет собой тангенс угла наклона хорды. В левой части этого равенства стоит производная $f'(c)$, которая равна тангенсу угла наклона к оси Ox касательной к графику функции в точке $x = c: \quad f'(c) = \operatorname{tg} \alpha_k$. Из равенства (4.5) следует, что $\operatorname{tg} \alpha_k = \operatorname{tg} \alpha_k$.

Таким образом, геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что на дуге найдется хотя бы одна точка, в которой касательная параллельна хорде, стягивающей дугу.

Следствие 1. *Если производная функции $f'(x) = 0$ в промежутке $[a, b]$, то в этом же промежутке $f(x) = const$.*

Действительно. если $f'(c) = 0$ для всех $c \in [a, b]$, то, полагая в формуле (4.5) $b = x$, где x — любое из промежутка $[a, b]$, получим $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = 0 \Longrightarrow f(x) = f(a) = \text{const}$.

Следствие 2. *Если две дифференцируемые функции имеют равные производные на некотором промежутке $[a, b]$, то эти функции отличаются на этом промежутке не более, чем на постоянное слагаемое.*

В самом деле, если $f'(x) = g'(x)$ при $a \leq x \leq b$, то это значит, что $[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x) = 0$. Таким образом, производная функции $f(x) - g(x)$ в промежутке $[a, b]$ равна нулю. По следствию 1 эта функция должна быть равна постоянной на этом промежутке, т.е. $f(x) - g(x) = c$.

2. Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей.

Теорема 2. *Пусть: а) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в промежутке $[a, b]$, б) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\quad \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, в) в промежутке $[a, b]$ существуют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$, причем $g'(x) \neq 0$, г) существует предел*

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$. *Тогда и* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = k$. *Точка* a *может быть и конечной, и несобственной точкой* $+\infty$ *или* $-\infty$.

Заметим, что в точке a исследуемая дробь не определена, так как при подстановке $x = a$ в эту дробь получается неопределенность вида $\dfrac{0}{0}$. Сформулированная теорема называется **правилом Лопиталя**, позволяет вместо предела отношения функций искать предел отношения их производных. Аналогичное правило применимо и при раскрытии неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Примеры.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{ax}-e^{-2ax}}{\ln(1+x)} = \dfrac{1-1}{\ln 1} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ae^{ax}+2ae^{-2ax}}{1(1+x)} = 3a.$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a^x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{a^x\ln a}{1} = +\infty.$

§4. Производные и дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Формулу Тейлора можно рассматривать как дальнейшее развитие формулы

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \alpha_1. \qquad (4.6)$$

Во многих случаях замена функции линейной не является достаточно точной. В связи с этим возникает вопрос об уточнении формулы (4.6) и более детальном изучении величины α_1. При этом из величины α_1 выделяют часть, пропорциональную Δx^2, так, чтобы оставшаяся часть была более высокого порядка малости, чем Δx^2. Величина α_1 представляется в виде $\alpha_1 = A\Delta x^2 + \alpha_2$, где A — некоторая постоянная, а величина α_2 обладает тем свойством, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha_2}{\Delta x^2} = 0$. Тогда из формулы (4.6) получаем формулу аппроксимации функции $f(x)$ вблизи точки x_0 квадратной функцией

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + A\Delta x^2 + \alpha_2. \tag{4.7}$$

Коэффициент A пока неизвестен. Из уравнения (4.7) выразим A :

$$A = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x^2} - \frac{\alpha_2}{\Delta x^2}.$$

Это выражение нельзя считать окончательным, так как в него входит бесконечно малая неизвестная функция α_2. Чтобы избавиться от нее, перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x^2} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha_2}{\Delta x^2},$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\alpha_2}{\Delta x^2} = 0$, то

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - f'(x_0)\Delta x}{\Delta x^2}.$$

При непосредственной подстановке $\Delta x \to 0$ получаем $\dfrac{0}{0}$.

Воспользуемся правилом Лопиталя. Следует иметь ввиду, что величина x_0 является постоянной, а Δx — переменной,

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{2 \cdot \Delta x}.$$

В числителе стоит приращение функции $f'(x)$. Предел отношения приращения функции к приращению аргумента есть производная от $f'(x)$, или **вторая производная** (обозначается $f''(x)$ или $\left.\dfrac{d^2 f}{dx^2}\right)$: $A = \dfrac{f''(x_0)}{1 \cdot 2}$. Подставив вместо A найденное значение, получим

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2 + \alpha_2.$$

Эта формула называется **формулой Тейлора** при $n = 2$. Процесс последовательного выделения членов со степенями Δx

можно продолжить. Для любого n формула Тейлора имеет вид

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\frac{f''(x_0)}{2!}\Delta x^2+\frac{f'''(x_0)}{3!}\Delta x^3+$$

$$+\frac{f^{IV}(x_0)}{4!}\Delta x^4+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\alpha_n,$$

где α_n — бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx^n, т.е. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha_n}{\Delta x^n}=0$, $f'''(x_0)$ — **третья производная** (производная от второй производной); $f^{(n)}(x_0)$ — n-я производная (производная от $(n-1)$-й производной). Выражения $f'''(x_0)\Delta x^2=d^2 f$, $f'''(x_0)\Delta x^3=d^3 f$, $f^{(n)}(x_0)\Delta x^n=d^n f$ называются соответственно **дифференциалами второго, третьего** и n-го порядков функции $f(x)$.

Запишем формулу Тейлора в другом виде, полагая $x=x_0+\Delta x$. Тогда $\Delta x=x-x_0$. Получим

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\alpha_n.$$

Последнее равенство показывает, что формула Тейлора позволяет заменить функцию многочленом степени n так, что ошибка α_n будет бесконечно малой величиной, выше n-го порядка малости относительно величины $x-x_0$. Если в формуле Тейлора положить $x_0=0$, то она примет вид

$$f(x)=f(0)+f'(0)(x)+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\alpha_n.$$

Эта формула для представления функции вблизи нуля называется **формулой Маклорена**.

§5. Исследование функции с помощью производных

С помощью производных можно изучать различные свойства функций. Ниже приводятся теоремы о тех или иных свойствах.

1. Условие постоянства функции.

Теорема 3. *Для того, чтобы в промежутке* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *сохраняла постоянное значение, необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие* $f'(x) \equiv 0$ *при* $x \in [a, b]$.

Доказательство.

1. Необходимость. Если $f(x) = \text{const}$ на $[a, b]$, то $f'(x) \equiv 0$.

2. Достаточность. Если $f(x)$ в каждой точке промежутка $[a, b]$ имеет $f'(x) = 0$, то в силу следствия 1 теоремы Лагранжа функция $f(x)$ сохраняет в этом промежутке постоянное значение. Теорема доказана.

2. Условия монотонности функции. Пусть функция $y = f(x)$ определена в промежутке $[a, b]$. Рассмотрим две точки x и x_0 этого промежутка и соответствующие приращения аргумента $\Delta x = x - x_0$ и функции $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.

Теорема 4. *Если на* $[a, b]$ *функция* $y = f(x)$ *дифференцируема и возрастает (убывает), то ее производная в этом промежутке неотрицательна (неположительна), т.е.* $f'(x) \geq 0$ $[f'(x) \leq 0]$.

Доказательство. Действительно, если $f(x)$ возрастает, то $\Delta y > 0$ при $\Delta x > 0$ и $\Delta y < 0$ при $\Delta x < 0$ (рис. 13,а). В обоих случаях $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} > 0$, а, следовательно, в силу следствия 1 теоремы о стабилизации знака, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$. Если же $f(x)$ убывает, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} < 0$, а $f'(x) \leq 0$ (рис. 13,б). Из возрастания функции необходимо следует неотрицательность ее производной.

Теорема 5. *Если функция* $y = f(x)$ *непрерывна на* $[a, b]$ *и дифференцируема в* (a, b)*, причем* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$,

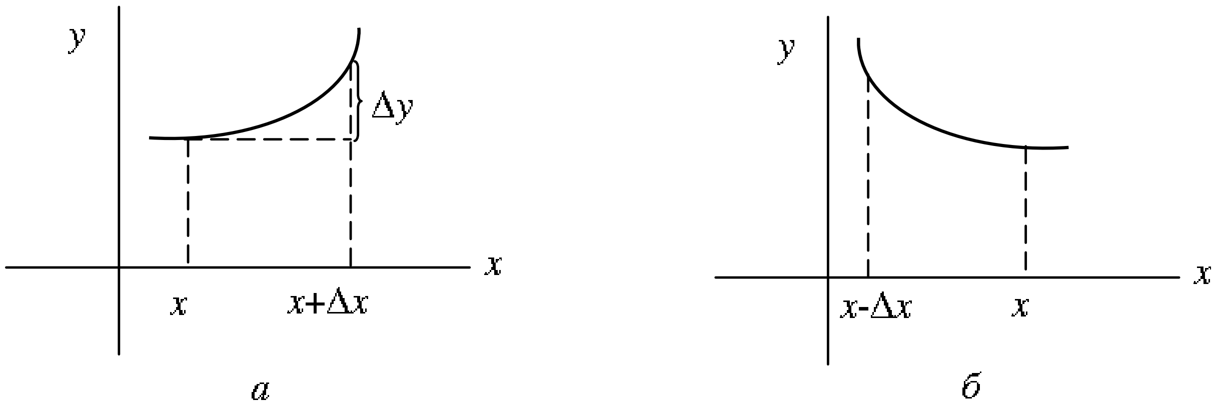

Рис. 13

то эта функция возрастает (убывает).

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ внутри промежутка (a, b). Для любых двух значений x_1 и x_2 $(x_2 > x_1)$, $x_1, x_2 \in (a, b)$, по теореме Лагранжа имеем $f'(c) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, где $x_1 < c < x_2$. Так как $x_2 > x_1$ и $f'(x) > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$ или $f(x_2) > f(x_1)$. Следовательно, функция $f(x)$ возрастает на (a, b).

Таким образом, для возрастания функции достаточно, чтобы ее производная была положительна. Теорема доказана.

3. Максимум и минимум функции. Функция $f(x)$, определенная на $[a, b]$, имеет **максимум** в точке x_1, если x_1 — внутренняя точка $[a, b]$ (т.е. $x_1 \neq a$, $x_1 \neq b$) и если для всех x, достаточно близких к x_1, выполняется неравенство $f(x_1) \geq f(x)$. Обозначается $f(x_1) = \max\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ (рис. 14,а). Аналогично, функция $f(x)$, определенная на $[a, b]$, имеет **минимум** в точке x_1, если x_1 — внутренняя точка $[a, b]$ и если для всех x, достаточно близких к x_1, выполняется неравенство $f(x_1) \leq f(x)$. Обозначается $f(x_1) = \min\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ (рис. 14,б).

Максимумы и минимумы функции называются **экстремумами**, а те значения аргумента, при которых достигаются экстремумы функции, называются **точками экстремума**.

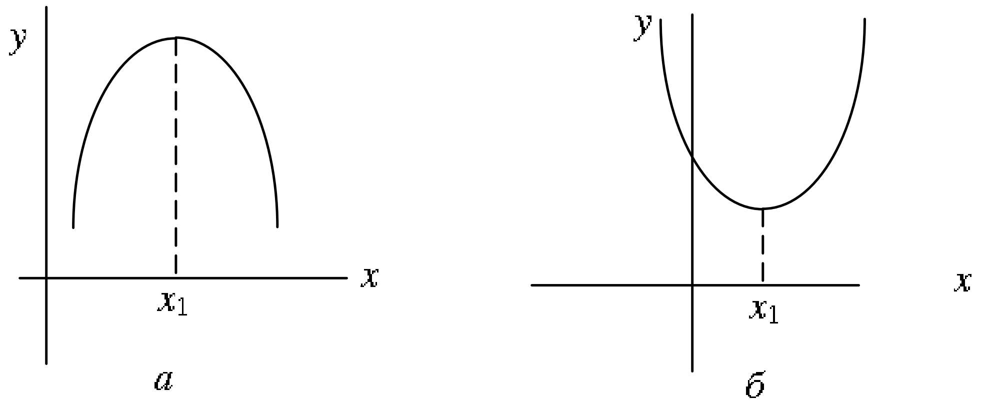

Рис. 14

Понятие экстремума носит локальный характер в том смысле, что это наибольшее или наименьшее значение функции по сравнению с близлежащими значениями. Что же касается значений более удаленных, т.е. для x, выходящих за пределы (a, b), то их величина никак не связана с величиной экстремума и может случиться, что $\min\limits_{x \in (a,b)} f(x) > \max\limits_{x \in (a,b)} f(x)$ (рис. 15). Экстремальные значения не следует путать с наибольшими и наименьшими значениями функции. Последние могут достигаться на концах $[a, b]$.

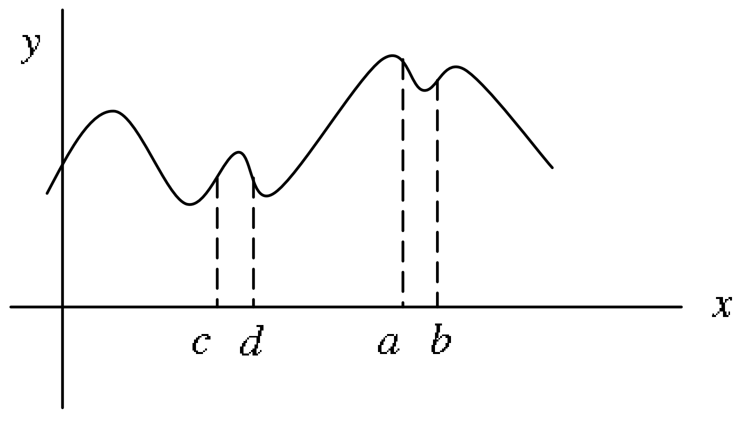

Рис. 15

Таким образом, чтобы найти наибольшее (наименьшее) значение непрерывной функции в некотором промежутке, надо найти все ее экстремальные значения и вычислить значения функции на концах рассматриваемого промежутка. Из всех этих чисел надо выбрать наибольшее (наименьшее).

Теорема 6 (необходимые условия существования экстремума функции). *Если дифференцируемая в окрестности точки x_0 функция $f(x)$ имеет в этой точке экстремум, то*

$$f'(x_0) = 0. \tag{4.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности точка x_0 — точка минимума. Это значит, что $f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$, если Δx достаточно мало по абсолютной величине. Отсюда

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0, \quad \text{если} \;\; \Delta x > 0,$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0, \quad \text{если} \;\; \Delta x < 0.$$

Из этих неравенств и из следствия 1 теоремы о стабилизации знака следует, что

$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \;\; \text{и} \quad \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0.$$

Из существования производной в точке x_0 вытекает, что приведенные пределы равны между собой и равны производной в точке x_0. Все это может быть только тогда, когда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 0.$$

Геометрически это означает, что в точках экстремума дифференцируемой функции касательная к ее графику параллельна оси Ox.

Следствие. *Функция может иметь экстремум лишь в тех точках, где производная ее равна 0 или не существует.*

Точки, в которых $f'(x) = 0$, называются **стационарными**. Точки, в которых $f'(x) = 0$ или не существует, называются **критическими**. Условие (4.8) является лишь необходимым условием существования экстремума функции. Например,

$f(x) = x^3,\ f'(x) = 3x^2,\ f'(0) = 0$. В точке $x = 0$ функция не имеет экстремума.

Будем говорить, что производная меняет знак "+" на "−" при переходе через точку x_0, если в некоторой окрестности точки x_0 выполняются неравенства $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x < x_0$. Аналогично, если $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то производная меняет знак "−" на "+" при переходе через точку x_0.

Теорема 7 (достаточные условия существования экстремума функции). *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема в некоторой окрестности критической точки x_0. Если при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак "+" на "−", то в точке x_0 функция имеет максимум. Если же при переходе через точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак "−" на "+", то в точке x_0 $f(x)$ имеет минимум.*

Утверждение теоремы иллюстрируется рисунком 16.

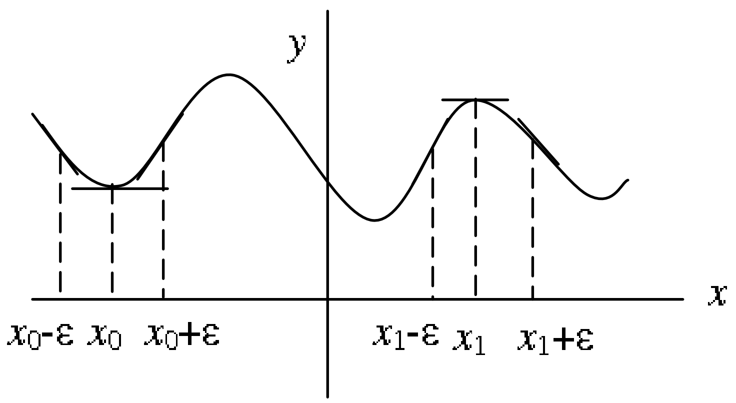

Рис. 16

Доказательство. Пусть $f'(x) = 0$, причем $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — малое число. Тогда в силу теорем 4 и 5 функция возрастает на $(x_0 - \varepsilon, x_0)$ и убывает на $(x_0, x_0 + \varepsilon)$. Следовательно, в точке x_0 функция имеет максимум.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 3x + 2$. Определим промежутки возрастания и убывания функции $y' = 3x^2 - 3$. Найдем критические точки: $3x^2 - 3 = 0$, $x_1 = 1,\ x_2 = 1$.

x	$-\infty < x < -1$	$x_1 = -1$	$-1 < x < 1$	$x_2 = 1$	$1 < x < \infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	возрастает	$max\, y = 5$	убывает	$min\, y = 0$	возрастает

Нахождение экстремума функции с использованием теоремы 7 назовем **первым правилом** нахождения экстремума. Однако вычисление значений производной слева и справа от критической точки бывает затруднительным. Поэтому часто применяют **второе правило** определения экстремальных точек с использованием второй производной.

Теорема 8. *Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 и ее окрестности непрерывные первую и вторую производные, причем $f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) \neq 0$. Тогда: а) функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум, если $f''(x_0) > 0$, б) функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум, если $f''(x_0) < 0$.*

Доказательство. Слева от точки x_0 $f'(x) > 0$, справа $f'(x) < 0$, т.е. $f'(x)$ при переходе через точку x_0 убывает. Но в силу теоремы 5 для убывания функции $f'(x)$ достаточно, чтобы производная ее, т.е. $f''(x)$ была меньше 0.

Пример. $y = x^3 - 3x + 2,\ y' = 3x^2 - 3,\ y'' = 6x,\ y''(-1) = -6 < 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 1$.

Следовательно, в точке $x_1 = -1,\ y_{\max} = 4,\ y''(1) = 6 > 0$, следовательно, в точке $x_2 = 1,\ y_{\min} = 0$.

4. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. График функции $f(x)$ называется **выпуклым** на $[a, b]$, если соответствующий отрезок кривой $y = f(x),\ x \in [a, b]$ расположен выше касательной, проведенной в любой точке $M = (x, f(x))$ этого графика (рис. 17,а). Аналогично, график функции $f(x)$ называется **вогнутым** на $[a, b]$, если соответствующий отрезок кривой расположен ниже касательной, проведенной в любой точке $M = (x, f(x))$ этого графика (рис. 17,б).

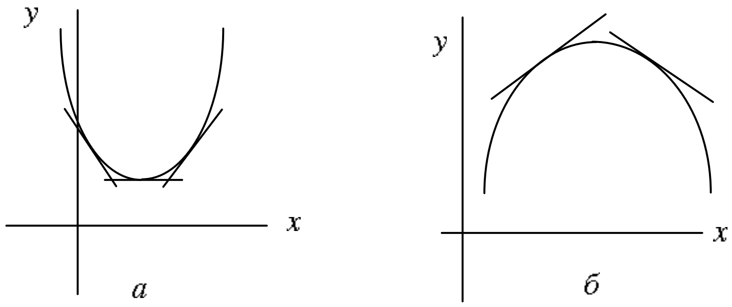

Рис. 17

Исследования выпуклости и вогнутости функции также можно проводить с помощью производных.

Теорема 9 (достаточные условия выпуклости и вогнутости кривой). *а) Если $f''(x) > 0$ внутри $[a, b]$, то график функции $f(x)$ выпуклый на $[a, b]$, б) если $f''(x) < 0$ внутри $[a, b]$, то график функции вогнут на этом промежутке.*

Точка на графике непрерывной кривой, при переходе через которую кривая из выпуклой становится вогнутой (или наоборот), называется **точкой перегиба**. M — точка перегиба (рис. 18).

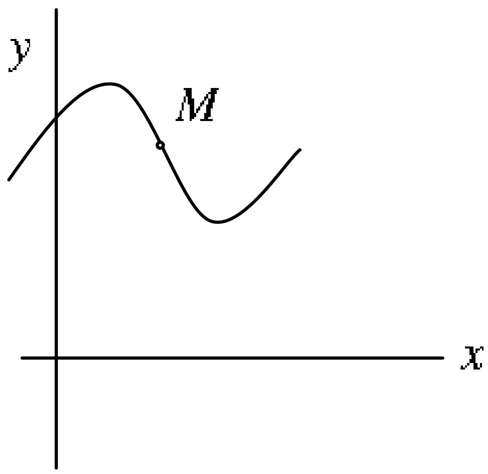

Рис. 18

Теорема 10. *Если $f''(x)$ обращается в нуль в некоторой точке x_1 и при переходе через эту точку меняет* *свой знак, то точка $M(x_1, f(x_1))$ — точка перегиба на графике функции $y = f(x)$.*

Пример. $y = x^3$, $y' = 6x^2$, $y'' = 6x$. При $x = 0$ $y'' = 0$, y'' меняет свой знак при переходе через эту точку. Таким образом, начало координат — точка перегиба.

Замечание. В точке перегиба вторая производная может и не существовать.

5. Асимптоты. Если промежуток изменения функции $f(x)$ бесконечен, то у кривой $y = f(x)$ может быть асимптота.

Асимптотой называется прямая, лучом которой в окрестности бесконечно удаленной точки можно приближенно заменить соответствующий участок кривой. Иначе говоря, прямая $y = kx + b$ есть асимптота кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$, если

$$\lim_{x\to\infty}[f(x) - (kx + b)] = 0. \tag{4.9}$$

Для нахождения асимптоты надо определить k и b. Из формулы (2) имеем

$$f(x) - kx - b = \alpha(x), \tag{4.10}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Отсюда $k = \dfrac{f(x)}{x} - \dfrac{b}{x} - \dfrac{\alpha(x)}{x}$. Переходя к пределу при $x \to +\infty$, получим

$$k = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - \frac{b}{x} - \frac{\alpha(x)}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Зная k, из выражения (3) найдем b :

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx - \alpha(x)] = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx].$$

Пример.

$y = \dfrac{5x}{x-3}$, $k = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5}{x-3} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}[f(x) - kx] = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x}{x-3} = 5$.

$y = 5$ — асимптота.

6. Схема исследования функции.

1. Найти область определения функции.

2. Выяснить, является ли функция четной, нечетной, периодической.

3. Исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва и выяснить его характер.

4. Найти асимптоты графика функции.

5. Найти точки экстремума функции, вычислить значения функции в этих точках. Установить интервалы монотонности функции.

6. Найти точки перегиба графика функции, вычислить значения функции и значения производной в этих точках. Установить интервалы выпуклости графика функции.

7. Найти точки пересечения с осями Ox и Oy.

8. Используя результаты исследования, построить график функции.

Пример.

1. $f(x) = \dfrac{1}{x} + x + 2, \quad X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty).$

2. $f(-x) = -\dfrac{1}{x} - x + 2, \quad f(x) \neq f(-x), \quad f(-x) \neq -f(x).$

Функция не обладает ни четностью, ни нечетностью.

3. Функция непрерывна на X. В точке $x = 0$ функция не определена. Исследуем поведение функции в окрестности этой точки:

$$\lim_{x \to 0-0} \left(\frac{1}{x} + x + 2\right) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0+0} \left(\frac{1}{x} + x + 2\right) = +\infty.$$

Следовательно, точка $x = 0$ является точкой разрыва второго рода.

4. Найдем асимптоту $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x^2} + 1 + \frac{2}{x}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x} + 2\right) = 2.$$

$y = x + 2$ — уравнение асимптоты.

5. $f' = -\dfrac{1}{x^2} + 1$, $\quad f' = 0$. Следовательно, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ — критические точки. $f'' = 2x^{-3}$, $f''(1) > 0$, следовательно, $f(1) = 4$ — min, $f''(-1) < 0$, $\ f(-1) = 0$ — max.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} < 1 \ \text{ при } \ x > 1, \\ x \in (-1, 0) \cup (0, 1) \ \text{ при } \ x < -1, \end{cases}$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x^2} > 1$. Функция возрастает при $x \in (1, +\infty) \cup (-\infty, -1)$ и убывает при $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$.

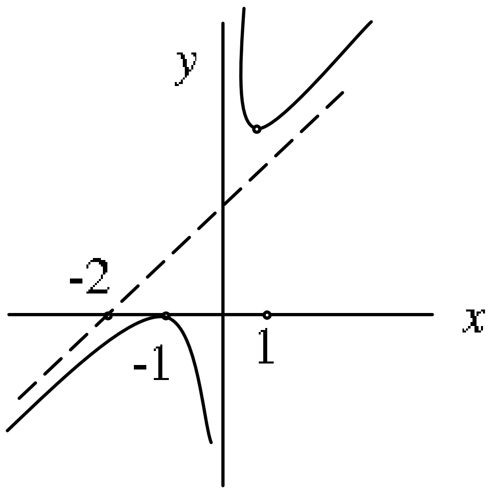

Рис. 19

6. $f'' = \dfrac{2}{x^3} \neq 0$. Точек перегиба нет.

$f''(x) > 0$ при $x > 0$ — функция выпукла,

$f''(x) < 0$ при $x < 0$ — функция вогнута.

7. Найдем точки пересечения с осью:

$$\frac{1}{x} + x + 2 = 0, \quad (1 + x)^2 = 0, \quad x = -1.$$

На основании проведенного исследования строим график функции (см. рис. 20).

§6. Дифференцирование функции многих переменных

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена в некоторой области D. Найдем ее значения в двух точках (x, y) и $(x + \Delta x, y)$ и рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Если этот предел существует, то он называется **частной производной** функции $f(x, y)$ по аргументу x в точке (x, y) и обозначается одним из символов $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ или f'_x, $f'_x(x, y)$. Аналогично определяется частная производная по y :

$$u'_y = f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Таким образом, частная производная от функции $f(x, y)$ по одному из аргументов равна обычной производной по этому аргументу от той функции одной переменной, которая получается из $f(x, y)$, если в ней считать остальные аргументы постоянными.

Например, $f(x, y) = x^3 + 2y^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 4y$. Если функция $f(x, y)$ имеет в каждой точке (x, y) области D обе частные производные $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, то **полный дифференциал** функции df определяется по формуле

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y,$$

так как $\Delta x = dx$ и $\Delta y = dy$, то

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

ГЛАВА V. ИНТЕГРАЛ

§1. Неопределенный интеграл

1. Первообразная, ее свойства. Мы уже научились по заданной функции определять ее производную. В различных вопросах анализа часто возникает обратная задача: известна производная (или дифференциал) некоторой функции и надо найти саму функцию. Иными словами, известна функция $f(x)$ и требуется найти функцию $F(x)$, производная которой известна и равна $f(x)$.

Первообразной функцией для данной функции $f(x)$, определенной на $[a, b]$, называется функция $F(x)$, производная которой равна данной функции, т.е. имеет место тождество $F'(x) = f(x)$ на $[a, b]$. Действие нахождения первообразной для данной функции называется ее **интегрированием**. Эта операция обратна дифферецированию. Например, для $f(x) = 3x^2$ первообразной будет $F(x) = x^3$.

Теорема 1. *Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то $F(x) + C$ — также первообразная для $f(x)$. Здесь C — произвольная постоянная.*

Действительно, если $F'(x) = f(x)$, то и $[F(x)+C]' = F'(x) = f(x)$. Итак, зная одну первообразную, мы можем указать бесконечно много первообразных.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$, $F(x)$ и $\varphi(x)$ — ее первообразные. Тогда $F(x)$ и $\varphi(x)$ могут отличаться лишь на постоянное слагаемое, т.е. если $F'(x) =$*

$f(x)$ и $\varphi'(x) = f(x)$, то $\varphi(x) = F(x) + C$, где $C = const.$

Д о к а з а т е л ь с т в о. По условию две функции $F(x)$ и $\varphi(x)$ имеют одну и ту же производную $f(x)$. В силу следствия 2 теоремы Лагранжа эти функции отличаются не более, чем на постоянное слагаемое, что и требовалось доказать.

Задачу об отыскании первообразной можно поставить и так: дана некоторая функция $f(x)$; требуется найти такую функцию $F(x)$, дифференциал которой равен $f(x)dx$. Как мы установили, первообразных, соответствующих выражению $f(x)dx$, бесконечно много. Все они задаются формулой $F(x) + C$, где $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$, а C — произвольная постоянная. Множество функций $F(x)+C$ называется **неопределенным интегралом** от $f(x)$ и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C. \tag{5.1}$$

Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, а выражение $f(x)dx$ — **подынтегральным выражением**.

Из определения неопределенного интеграла вытекают его основные свойства.

1. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx. \tag{5.2}$$

2. Интеграл от алгебраической суммы функций равен сумме соответствующих интегралов от слагаемых, если эти интегралы существуют:

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx. \tag{5.3}$$

Формулы (5.2) и (5.3) проверяются дифференцированием их правых частей. Например, производная от правой части равенства (5.3) $[C\int f(x)dx]' = C[\int f(x)dx]' = Cf(x)$ равна подынтегральной функции из левой части формулы (5.2). Следовательно, формула (5.2) верна. Заметим, что равенства (5.2) и (5.3) следует понимать с точностью до постоянного слагаемого.

Основные интегралы находятся по формулам, которые можно проверить путем дифференцирования:

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq 1;$
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int e^x dx = e^x + C;$
4. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C;$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C;$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C;$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C;$
9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$
10. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\, x + C = -\mathrm{arcctg}\, x + C.$

2. Замена переменных. Интегрирование по частям. Пусть $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ и пусть $\varphi(t)$ — какая-нибудь дифференцируемая функция. Образуем сложную функцию $F[\varphi(t)]$ и покажем, что эта функция есть первообразная функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$. В самом деле по формуле дифференцирования сложной функции имеем

$$\frac{dF[\varphi(t)]}{dt} = F'[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

что и требовалось доказать. Отсюда следует, что

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C. \tag{5.4}$$

Обозначив $x = \varphi(t)$, получим $F[\varphi(t)] + C = F(x) + C = \int f(x)dx$, что вместе с выражением (5.3) дает $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int f(x)dx$ или

$$\int f[\varphi(t)]d\varphi = \int f(x)dx, \quad x = \varphi(t). \tag{5.5}$$

Равенство (5.5) называется формулой **замены переменной** под знаком интеграла. Из этой формулы следует, что для того, чтобы вычислить левый интеграл, достаточно вычислить правый и в полученный результат подставить $x = \varphi(t)$. При удачной замене переменной правый интеграл может оказаться табличным.

Пример. $\int \frac{2xdx}{1+x^2} = \left\{ 1 + x^2 = t, dt = 2xdx \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|1+x^2| + C.$

Другим важным приемом является **интегрирование по частям**. Пусть u и v — две дифференцируемые функции от x. Тогда, как известно, $(uv)' = u'v + uv'$. Это значит, что uv — первообразная для суммы $u'v + uv'$. Следовательно, $\int(u'v + uv')dx = uv + C$. Отсюда $\int u'vdx + \int v'udx = uv + C$ или

$$\int uv'dx = uv - \int vu'dx = uv + C. \tag{5.6}$$

Равенство (5.6) записывают обычно без C, так как предполагается, что произвольная постоянная уже имеется в интеграле справа; кроме того, под знаком интеграла вместо $v'dx$ пишут dv, а вместо $u'dx$ пишут du. Тогда формула (5.6) запишется в виде $udx = uv - \int vdu$. Это равенство называется формулой интегрирования по частям.

Замечание. За u следует обозначать ту функцию, которая упрощается дифференцированием.

Изложенный метод позволяет проинтегрировать достаточно широкий класс элементарных функций. Однако интегрировать сложнее, чем дифференцировать. Поэтому на практике интегралы от более сложных функций находятся по специальным таблицам неопределенных интегралов, которые имеются в справочной литературе.

§2. Определенный интеграл, его свойства

Пусть ограниченная функция $f(x)$ задана в некотором промежутке $[a, b]$. Разобьем этот промежуток произвольным образом на части точками $x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n = b$. Наибольшую из разностей $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ будем обозначать через λ.

В каждом из частичных пррмежутков $[x_i, x_{i+1}]$ выберем произвольно точку $x = \xi_i$ $(x_i \le \xi_i \le x_{i+1})$ и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Установим теперь понятие конечного предела этой суммы

$$J = \lim_{\lambda \to 0} \sigma. \tag{5.7}$$

Представим, что $[a, b]$ последовательно разбивается на части сначала одним способом, затем другим и т.д. Такую последовательность деления промежутка на части будем называть **основной**, если соответствующая последовательность значений $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ сходится к нулю. Равенство (5.7) понимаем в том смысле, что последовательность значений суммы σ, отвечающая любой основной последовательности деления промежутка, всегда стремится к пределу J, как бы ни выбирать при этом ξ_i.

Конечный предел J суммы σ при $\lambda \to 0$ называется **определенным интегралом** функции $f(x)$ в промежутке $[a, b]$ и обозначается $J = \int\limits_a^b f(x)dx$. Если такой предел существует, то функция $f(x)$ называется **интегрируемой** в промежутке $[a, b]$. Числа a и b носят название **нижнего** и **верхнего пределов** интеграла соответственно. При постоянных пределах определенный интеграл представляет собой постоянное число. Сумма σ является **интегральной суммой**.

Если $f(x)$ — интегрируемая в промежутке $[a, b]$ функция, $F(x)$ — ее первообразная, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Пример.

$$\int\limits_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Основные свойства определенного интеграла:

1. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

4. $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$.

5. $\int\limits_a^b Cf(x)dx = C\int\limits_a^b f(x)dx$.

6. $\int\limits_a^b udv = uv|_a^b - \int\limits_a^b vdu$ — формула интегрирования по частям.

7. Для любой дифференцируемой функции φ справедлива формула замены переменной $\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = \int\limits_a^b f(x)dx$, где $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, $x = \varphi(t)$. В самом деле, пусть F — первообразная для f, φ — некоторая дифференцируемая функция, $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Тогда функция $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$ является первообразной для функции $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$, и, следовательно, по определению определенного интеграла $\int\limits_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt =$
$\Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Пример.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{1+\sin^2 t}dt = \left\{ \begin{array}{c} x = \sin t, \\ dx = \cos t dt, \\ t = 0,\ x = 0, \\ t = \pi/2,\ x = 1 \end{array} \right\} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x|_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

8. Рассмотрим функцию $\Psi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt,\ \ x \in [a,b]$. Эта функция является определенным интегралом с переменным верхним пределом. Дифференцируя ее, получим $[\Psi(x)]' = \left[\int\limits_a^x f(t)dt\right]' = [F(x) - F(a)]' = F'(x) = f(x)$. Итак, производная от определенного интеграла с переменным верхним пределом равна подынтегральной функции.

9. Если $a < b$, то имеет место неравенство

$$\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |b(x)|dx.$$

§3. Геометрические приложения определенного интеграла

При рассмотрении вопроса о приложениях определенного интеграла будем опираться на следующую теорему:

Теорема 3. *Пусть функция $\Phi(x)$ определена на $[a,b]$. Если существует такая функция $f(x)$, непрерывная на $[a,b]$, что для любых x и $x+\Delta x$ из $[a,b]$, где $x > 0$ выполняются неравенства*

$$m\Delta x \le \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) \le M\Delta x, \qquad (5.8)$$

m, M — наименьшее и наибольшее, соответственно, значения функции $f(x)$ в промежутке $[x, x+\Delta x]$, то $\Phi(x)$ —

первообразная для $f(x)$ на $[a,b]$ и, следовательно,

$$\Phi(x) = \Phi(a) + \int_a^b f(t)dt, \quad x \in [a,b].$$

Доказательство. Действительно, из неравенств (5.8), зная, что $\Delta x > 0$, получим

$$m \leq \frac{\Phi(x+\Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} \leq M. \tag{5.9}$$

Из непрерывности $f(x)$ следует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} M = f(x)$. Учитывая это, при переходе к пределу в неравенствах (5.9), получим

$$\Phi'(x) = f(x).$$

1. Вычисление площади. Требуется вычислить площадь криволинейной трапеции.

Криволинейная трапеция — это фигура, образованная отрезком $[a,b]$ оси Ox, двумя параллельными прямыми aA, bB и ограниченная кривой $y = f(x)$, $x \in [a,b]$ (рис. 20).

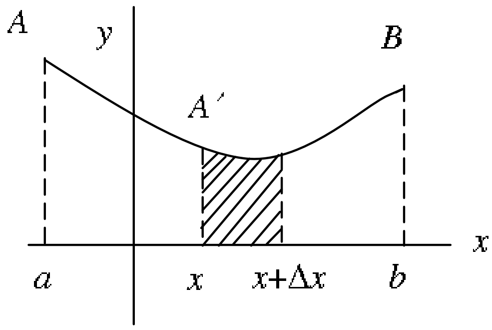

Рис. 20

Для определенности предположим, что $f(x) > 0$ при $x \in [a,b]$. Рассмотрим криволинейную трапецию $aAA'x$. Площадь этой трапеции обозначим через $S(x)$ — это функция от x. В частности, $S(a) = 0$ а $S(b)$ — площадь криволинейной трапеции $aABb$. Рассмотрим разность $S(x+\Delta x) - S(x)$ — это площадь заштрихованной трапеции. Для нее справедливо неравенство $m\Delta x \leq S(x+\Delta x) - S(x) \leq M\Delta x$, где m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения $f(x)$ из $[x, x+\Delta x]$.

Следовательно, мы находимся в условиях теоремы 3. Отсюда $S'(x) = f(x)$ и $S(x) = S(a) + \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_a^x f(t)dt$. В частности, $S(b) = \int\limits_a^b f(t)dt$.

Итак, площадь криволинейной трапеции $aABb$, ограниченной сверху участком AB кривой $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ равна определенному интегралу по промежутку $[a, b]$ от $f(x)$.

В случае, когда криволинейная трапеция ограничена снизу кривой $y = f(x) < 0$, сверху отрезком $[a, b]$, площадь ее будет равна площади криволинейной трапеции, ограниченной снизу отрезком $[a, b]$, сверху кривой $y = f(x) > 0$, а с боков вертикалями $x = a$, $x = b$, т.е. $S = \int\limits_a^b [-f(x)]dx = -\int\limits_a^b b(x)dx$ (рис. 21).

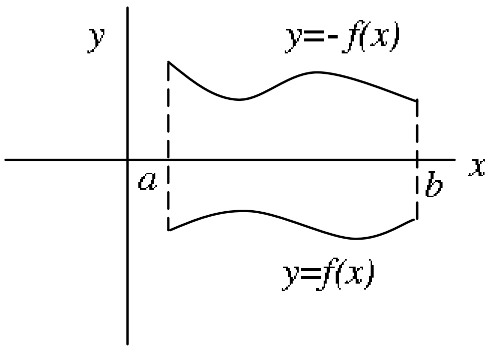

Рис. 21

Пусть теперь требуется вычислить площадь фигуры, ограниченной сверху кривой $y = f_1(x) > 0$, снизу — кривой $y = f_2(x)$ и вертикалями $x = a$, $x = b$ (рис. 22).

$$S_{AA_1BB_1} = S_{aA_1B_1b} - S_{aABb} = \int_a^b f_1(x)dx - \int_a^b f_2(x)dx =$$
$$= \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx.$$

Аналогичные рассуждения применимы и в том случае, когда нужно вычислить площадь фигуры, ограниченной замкну-

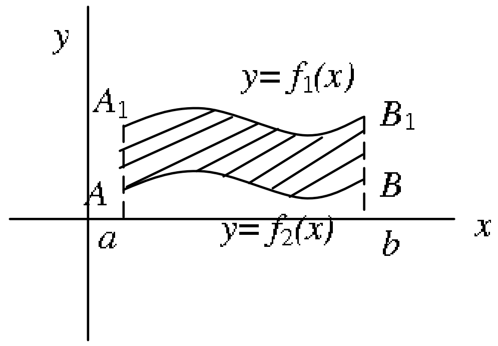

Рис. 22

той кривой. Отметив крайние точки кривой A и B и соответствующие им точки a и b на оси Ox, можно вычислить искомую площадь по формуле $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$, где $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ — уравнения соответственно верхней и нижней дуг.

Примеры.

1. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 4$ и прямыми $x = 0$, $x = 4$ (рис. 23).

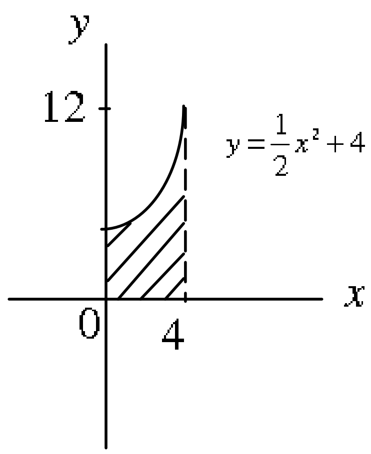

Рис. 23

$$S = \int_0^4 \left(\frac{1}{2}x^2 + 4\right) dx = \left(\frac{x^3}{6} + 4x\right)\Bigg|_0^4 = \frac{16 \cdot 4}{6} + 4 \cdot 4 + 0 \cdot 0 =$$
$$\frac{32}{3} + 16 = \frac{32 + 48}{3} = \frac{70}{3} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

2. Найти площадь, ограниченную линиями $y = x^3$, $x = -2$, $x = 2$ (рис. 24). Вычисление площади разбиваем на два

этапа:

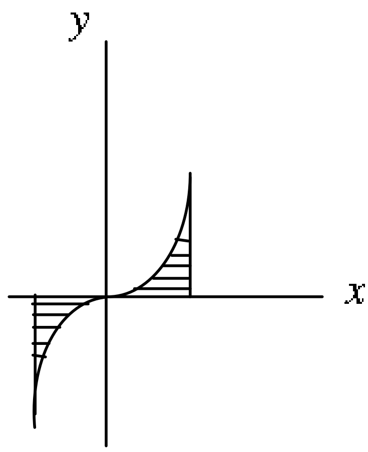

Рис. 24

а) $[-2,0]$. $S_1 = -\int\limits_{-2}^{0} x^3 dx = -\frac{1}{4}x^4\Big|_{-2}^{0} = 0 + 4 = 4$ (ед.^{2}),

б) $[0,2]$. $S_2 = \int\limits_{0}^{2} x^3 dx = \frac{1}{4}x^4\Big|_{0}^{2} = 4$ (ед.^{2}),

$S = S_1 + S_2 = 8$ (ед.^{2}).

3. Вычислить площадь, ограниченную прямыми $y = -\frac{2}{3}x + 4$, прямыми $x = 0,\ x = 4,\ y = 0$ (рис. 25).

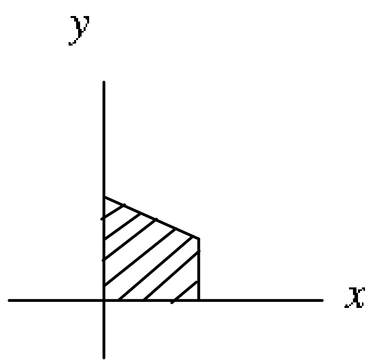

Рис. 25

$$S = \int_0^4 \left(-\frac{2}{3}x + 4\right) dx = -\frac{1}{3}x^2 + 4x\Big|_0^4 = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{32}{3} \text{ (ед.}^2\text{)}.$$

2. Объем тела вращения. Пусть кривая, заданная уравнением $y = f(x),\ x \in [a,b]$ вращается вокруг оси Ox (рис. 26). Поставим задачу: вычислить объем тела вращения, ограниченного полученной поверхностью вращения и двумя плоскостями $x = a$, $x = b$. Обозначим объем тела через V. Рассмотрим объем $V(x)$ тела, которое отсекается от исходного тела плоскостью, проходящей через точку $x \in [a, b]$ (перпендикулярно оси Ox), и лежит слева от этой плоскости. Очевидно, что $V(a) = 0$, $V(b) = V$.

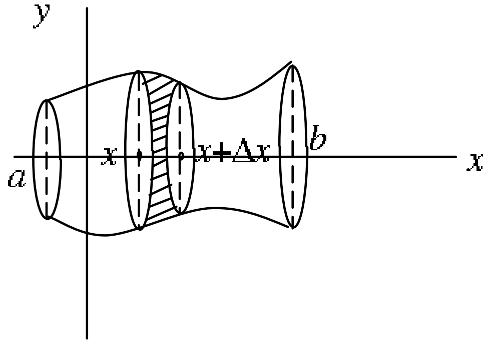

Рис. 26

Разность $V(x + \Delta x) - V(x)$, $\Delta x > 0$ равна объему узкого слоя тела, заключенного между сечениями, проходящими через точки x и $x + \Delta x$. Обозначим через $S(x)$ — площадь сечения, образованного плоскостью, проходящей через точку $x \in [a, b]$ перпендикулярно оси Ox. Пусть $S(x)$ — непрерывная функция от $x \in [a, b]$. Если m и M — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $S(x)$ на промежутке $[x, x+\Delta x]$, то объем этого слоя будет не меньше $m\Delta x$ и не больше $M\Delta x$. Таким образом, $m\Delta x \leq V(x + \Delta x) - V(x) \leq M\Delta x$. Тогда в силу теоремы 3

$$V = V(b) = V(a) + \int_a^b S(x)dx = \int_a^b S(x)dx, \tag{5.10}$$

т.е. объем тела равен интегралу от площади его поперечного сечения. В нашем случае $S(x)$ — площадь круга, радиус которого равен $f(x)$. Таким образом, $S(x) = \pi[f(x)]^2$. Подставив это выражение в формулу (5.10), получим для объема тела вращения формулу

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

3. Длина дуги кривой. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, имеющая непрерывную производную в промежутке $[a, b]$ (такие функции называются гладкими).

Рассмотрим вопрос о длине дуги AB кривой $y = f(x)$, $x \in [a, b]$ (рис. 27). Для этого обозначим через $l(x)$ длину дуги AM, заключенной между вертикалями, проходящими через точки a и $x \in [a, b]$ и рассмотрим разность $l(x + \Delta x) - l(x)$. В силу существования производной $f'(x)$ эту разность можно приближенно заменить длиной отрезка касательной MP. Замена будет тем точнее, чем меньше Δx. Можно показать, что погрешность, которую мы допускаем, есть величина более высокого порядка малости, чем Δx. Таким образом, $l(x + \Delta x) - l(x) = |MP| + o(\Delta x)$.

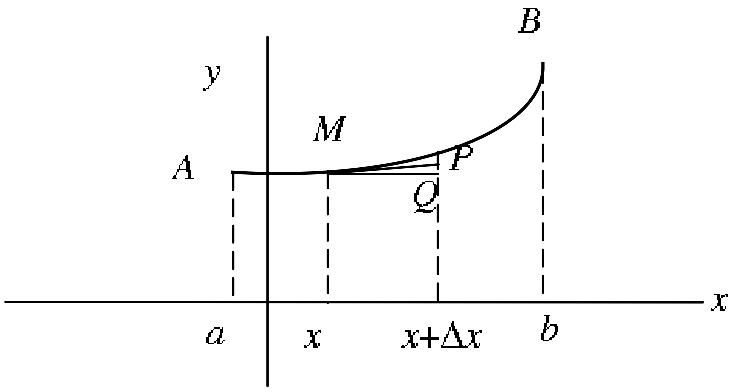

Рис. 27

С другой стороны, по теореме Пифагора

$$|MP| = \sqrt{|MQ|^2 + |QP|^2} = \sqrt{(dx)^2 + (df)^2} = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\Delta x.$$

А это означает, что $|MP|$ — дифференциал длины дуги $|MP| = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\Delta x = dl$.

Итак, $l(x+\Delta x) - l(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\Delta x + o(\Delta x)$. Так как из этого равенства следует, что $l'(x) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, т.е. $l(x)$ — первообразная для функции $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$, то

$$l(b) - l(a) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx,$$

$l(b) = \int\limits_a^b \sqrt{1+[f'(x)]^2}dx$, так как $l(a) = 0$.

ГЛАВА VI. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Дифференциальные уравнения — одно из самых употребительных средств математического моделирования. Мы познакомимся с элементами теории дифференциальных уравнений и некоторыми приложениями ее в биологии.

§1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений

Пусть $x(t)$ — численность некоторой популяции микроорганизмов в момент t. Хорошо известно, что скорость размножения $\left(\text{как мы уже знаем — это производная } \frac{dx}{dt} = \dot{x}\right)$ при отсутствии ограничивающих факторов пропорциональна численности: $\frac{dx}{dt} = \varepsilon x(t)$, где ε — коэффициент (темп) роста. Если имеются ограничения на ресурсы питания, пространство и т.п., то темп роста должен замедляться. Простейшее предположение состоит в том, что $\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_1 x$. Тогда $\frac{dx}{dt} = \varepsilon_0 x(t) - \varepsilon_1 x^2(t)$.

Мы привели две математические модели, описывающие наблюдаемые закономерности развития популяции в тех или иных условиях. Эти равенства, в которых участвуют как функции $x(t)$, так и ее производная, являются дифференциальными уравнениями.

Дифференциальным уравнением называется такое уравнение, в состав которого входят производные от неизвестной функции одной или нескольких переменных. В уравнение могут входить и сами неизвестные функции. Уравнение называется **обыкновенным**, если неизвестная функция зависит только от одного аргумента. Если неизвестная функция зависит от нескольких аргументов, то в уравнении присутствуют частные производные и само уравнение является уравнением **в частных производных**.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок высшей производной. **Решением** дифференциального уравнения служит функция, удовлетворяющая этому уравнению. Решения дифференциальных уравнений называют иногда интегралами, а процесс поиска решения — интегрированием дифференциального уравнения.

Примеры.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 3xy\dfrac{dy}{dx} + y = \sin x$. Это обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка.

2. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x} - z\dfrac{\partial z}{\partial y} = \cos x$ — уравнение в частных производных.

3. $y'' + y = 0,\ y = \sin x$ — решение этого уравнения.

§2. Уравнения первого порядка

1. Общее и частное решение. Задача Коши. В общем случае уравнение первого порядка может быть записано так:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{6.1}$$

где F — заданная функция. Мы будем рассматривать частный вид уравнения (6.1), а именно, уравнение, разрешенное относительно первой производной:

$$y' = f(x, y), \tag{6.2}$$

где f — заданная функция.

Согласно определению решением уравнения (6.2) называется функция $\varphi(x)$, заданная на некотором промежутке (a, b), такая, что если ее подставить в уравнение вместо y, то уравнение обратится в тождество для всех $x \in (a, b)$. Но уравнение (6.2) содержит y'. Отсюда следует, что его решение должно быть дифференцируемой функцией на (a, b).

Будем всегда предполагать, что правая часть уравнения (6.2), т.е. $f(x, y)$ — однозначная непрерывная функция. В этом случае и $\varphi(x)$ — непрерывная функция на (a, b), так как $\varphi'(x) \equiv f(x, f(x))$. Тогда график функции $\varphi(x)$ есть непрерывная кривая, называемая интегральной кривой. Она задается равенством $y = \varphi(x)$.

Рассмотрим пример $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$.

$2ydy = dx$ или $d[y^2] = dx$ или $d[y^2 - x] = 0$, $y^2 - x = C$. Следовательно,

$$y = \sqrt{x + C}. \tag{6.3}$$

Подставляя выражение (6.3) в исходное уравнение, убеждаемся, что оно является решением. И так как C — произвольная постоянная, то равенство (6.3) задает семейство функций или семейство интегральных кривых. Чтобы выделить из этого множества конкретную функцию, необходимо задать дополнительное условие $y = 1$ при $x = 0$. Тогда $1 = \sqrt{C}$, $C = 1$, $y = \sqrt{x + 1}$, $y^2 = x + 1$ (рис. 28).

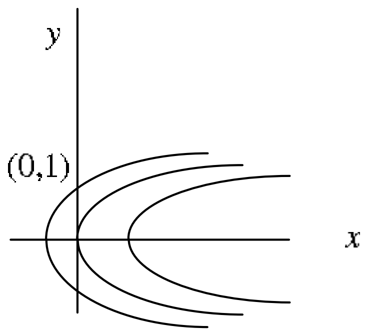

Рис. 28

Общим решением дифференциального уравнения (6.2) называется функция $y = \varphi(x, C)$, зависящая от произвольной постоянной C, если: а) эта функция является решением дифференциального уравнения при любом значении постоянной C; б) функция φ такова, что из равенства $y = \varphi(x, C)$ можно выразить C как функцию x и y : $C = \Phi(x, y)$. **Частным** решением дифференциального уравнения (6.2) называется решение, получающееся из общего решения при некотором фиксированном значении произвольной постоянной C. Таким образом, из общего решения можно получить частное.

В прикладных задачах можно выделить частное решение, если наложить на искомую функцию дополнительное условие. Это условие называется начальным условием. В общем виде оно сводится к тому, чтобы искомая функция принимала наперед заданное значение y_0 при фиксированном значении независимой переменной x_0.

Задача отыскания решения уравнения $y' = f(x, y)$ при заданном начальном условии $y(x_0) = y_0$ называется **задачей Коши**. Решить задачу Коши — значит из многих интегральных кривых выбрать ту, которая проходит через заданную точку (x_0, y_0).

2. Геометрическая интерпретация. Пусть имеется уравнение $y' = f(x, y)$. Потребуем, чтобы функция $f(x, y)$ была однозначна, непрерывна, имела непрерывные производные по своим аргументам для простоты во всей плоскости xOy.

Покажем, как можно построить интегральную кривую для уравнения (6.2). Для этого потребуется через различные точки плоскости под определенным углом (своим для каждой точки) провести прямые. Если каждой точке плоскости поставлена в соответствие определенная прямая, проходящая через эту точку, то говорят, что задано **поле направлений** (поле прямых). Гладкую кривую L, касательная в каждой точке которой совпадает с направлением поля в этой точке, назовем **огибающей** поля.

Для уравнения $y' = f(x, y)$ поле прямых зададим следующим образом: каждой точке $A(x_0, y_0)$ припишем прямую $y = y_0 + k(x - x_0)$, где $k = f(x_0, y_0)$ — тангенс угла наклона прямой к оси Ox. Покажем, что интегральная кривая $y = \varphi(x)$ является огибающей поля.

Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка, лежащая на кривой $y = \varphi(x)$. Это значит, что $y_0 = \varphi(x_0)$. Пусть k_1 — тангенс угла наклона касательной к кривой $y = \varphi(x)$ в точке (x_0, y_0). Тогда

$$k_1 = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=x_0}. \tag{6.4}$$

Так как $\varphi(x)$ — решение уравнения (6.2), то для всех x из области определения решения выполняется равенство $\dfrac{d\varphi}{dx} = f(x, \varphi(x))$ и

$$\left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=x_0} = f(x_0, y_0). \tag{6.5}$$

По построению $f(x_0, y_0) = k$. В силу этого и равенств (6.4), (6.5) записываем

$$k_1 = \left.\frac{d\varphi}{dx}\right|_{x=x_0} = f(x_0, y_0) = k.$$

Совпадение k_1 и k означает, что интегральная кривая $y = \varphi(x)$ — огибающая поля (рис. 29).

Справедливо и обратное утверждение: любая огибающая построенного поля является интегральной кривой уравнения.

Итак, решить дифференциальное уравнение геометрически — это значит по правой части уравнения, т.е. по функции $f(x, y)$, построить поле направлений, а затем искать огибающую этого

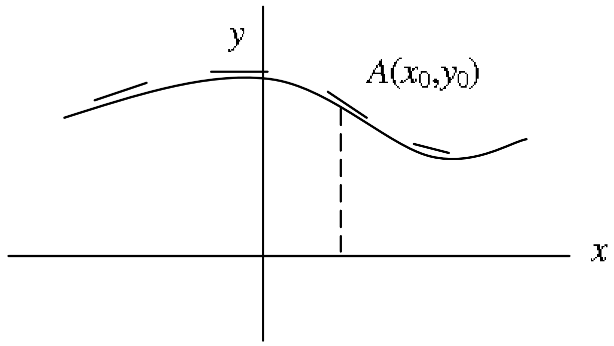

Рис. 29

поля. Совокупность огибающих даст семейство интегральных кривых.

Кривая, заданная равенством $f(x, y) = k$, называется **изоклиной** (т.е. кривой равного наклона).

3. Теорема существования и единственности решения. Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$. Если в некотором прямоугольнике R $(a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d)$, содержащим внутри себя точку (x_0, y_0), функция $f(x, y)$ непрерывна по x и y и имеет ограниченную частную производную по y, то существует единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, определенное в интервале $a < x < b$ и принимающее при $x = x_0$ значение $y(x_0) = y_0$. Другими словами, при любых начальных условиях внутри прямоугольника R существует единственное соответствующее им решение, если только $f(x, y)$ удовлетворяет указанным условиям.

4. Некоторые интегрируемые типы уравнений первого порядка. Не каждое уравнение первого порядка можно проинтегрировать точно. Если для какого-либо уравнения это удается сделать, то оно называется интегрируемым. Класс интегрируемых уравнений очень узок. Рассмотрим несколько типов таких уравнений.

1. Уравнение **с разделенными переменными** $A(x)dx+$

$B(y)dy = 0$, где $A(x)$, $B(y)$ — непрерывные функции. Это уравнение можно интегрировать почленно. Общий интеграл его $\int A(x)dx + \int B(y)dy = C$.

Пример. Проинтегрировать уравнение $x^2dx+(y+1)dy = 0$ с начальным условием $y(0) = 1$. Общий интеграл $\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y = C$. Находим $C:\ 0+\frac{1}{2}+1 = C,\ C = \frac{3}{2}$. Частное решение

$$\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}+y = \frac{3}{2}.$$

2. Уравнение **с разделяющимися переменными**

$$A(x)B(y)dx + C(x)D(y)dy = 0. \tag{6.6}$$

Предположим, что функции $A(x)$, $C(x)$, $B(y)$, $D(y)$ — непрерывные. Разделив уравнение (6.6) почленно на $B(y)C(x)$, получим

$$\frac{A(x)}{C(x)}dx + \frac{D(y)}{B(y)}dy = 0. \tag{6.7}$$

Обозначим через $M(x) = \frac{A(x)}{C(x)}$, $N(y) = \frac{D(y)}{B(y)}$. Тогда равенство (6.7) примет вид $M(x)dx + N(y)dy = 0$, т.е. имеем уравнение с разделенными переменными. Интегрируя его, получим общий интеграл уравнения (6.6):

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C. \tag{6.8}$$

Обозначив через $K(x)$ и $\mathcal{L}(y)$ первообразные интегралов, входящих в левую часть уравнения (6.8), получим $\mathcal{L}(y) = -K(x)+C$. Решив это равенство относительно y, найдем общее решение уравнения (6.6) $y = P(x) + C_1$. Здесь C_1 — новая постоянная.

Пример.

$$(xy^2 + x) + (y - x^2y)\frac{dy}{dx} = 0,$$

$$x(y^2+1)dx + y(1-x^2)dy = 0,$$
$$\frac{xdx}{1-x^2} + \frac{ydy}{y^2+1} = 0, \quad \int \frac{xdx}{1-x^2} + \int \frac{ydy}{y^2+1} = C,$$
$$-\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + \frac{1}{2}\ln(y^2+1) = C,$$
$$\ln(y^2+1) - \ln(1-x^2) = C_1, \quad C_1 = 2C,$$
$$\ln\frac{y^2+1}{1-x^2} = C_1, \quad \frac{y^2+1}{1-x^2} = e^{C_1} = C_2,$$
$$\frac{y^2+1}{1-x^2} = C_2.$$

3. **Линейное** уравнение. Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, разрешенное относительно производной вида $\frac{dy}{dx} + Py = Q$, где P и Q — функции x или постоянные величины. Уравнение является **однородным**, если $Q = 0$ и **неоднородным**, если $Q \neq 0$. Интегрирование линейного дифференциального уравнения производится с помощью подстановки Бернулли:

$$y = uv, \tag{6.9}$$

откуда $dy = udv + vdu$, где u и v — неизвестные функции.

Пусть дано линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Применяя подстановку (6.9), получаем $udv+vdu+P(x)uvdx = Q(x)dx$. Сгруппируем члены:

$$udv + v[du + P(x)udx] = Q(x)dx. \tag{6.10}$$

Поставим теперь условие: найти такую функцию $u(x)$, чтобы выражение в квадратных скобках обратилось в нуль:

$$du + P(x)udx = 0. \tag{6.11}$$

Решим это уравнение:

$$\frac{du}{u} = -P(x)dx, \quad \ln u = -\int P(x)dx, \quad u = e^{-\int P(x)dx}.$$

Постоянную интегрирования здесь не пишем, так как достаточно будет какого-нибудь отличного от нуля решения уравнения (6.11). Подставим найденную функцию u в уравнение (6.10):

$$e^{-\int P(x)dx}dv = Q(x)dx, \quad dv = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx.$$

Интегрируя это уравнение, получим $v = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C$. Подставляя найденные функций u и v в исходную подстановку (6.9), находим искомое решение

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right].$$

Пример.

$$y' = \frac{y}{x} = 4x^2.$$

$$y = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left[4\int x^2 e^{\int \frac{dx}{x}}dx + C\right], \quad e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = \frac{1}{x},$$

$$e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x, \quad y = \frac{1}{x}\left[4\int x^3 dx + C\right] = \frac{4}{x}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{C}{x} = x^3 + \frac{C}{x},$$

$$y = x^3 + \frac{C}{x}.$$

§3. Системы дифференциальных уравнений

1. Основные понятия. Задача Коши. Системой дифференциальных уравнений называется система равенств, связывающая независимую переменную, неизвестные функции от этой переменной и производные от неизвестных функций по независимой нeременной. Например:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{dx}{dt} + x, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \dfrac{dy}{dt} + xy. \end{cases}$$

Независимой переменной в этой системе является t, неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$.

Наибольший интерес представляют системы, имеющие нормальную форму Коши, или **системы нормальные по Коши**. Таковыми являются системы вида:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{cases} \tag{6.12}$$

Здесь x — независимая переменная, $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ — неизвестные функции, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — заданные функции своих аргументов.

Системы, нормальные по Коши, имеют только первые производные, и каждое уравнение содержит лишь одну производную и разрешено относительно нее. Число уравнений равно числу неизвестных функций и, следовательно, числу производных, входящих в систему. Это число называется **порядком** системы. Например, система

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_1 - y_2^2 + x, \\ \dfrac{dy_2}{dx} = y_1^3 - y_2 + 5, \end{cases}$$

нормальная по Коши второго порядка.

Решением системы (6.12) называется совокупность функций $\{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, заданных на некотором отрезке числовой оси и обращающих каждое уравнение системы в тождество на этом отрезке. Таким образом, решением системы (6.12) является вектор-функция. Используя понятие вектор-функции, нормальную по Коши систему (6.12) можно записать в виде $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$. Здесь $Y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$, $\frac{dY}{dx}$ — производная, $F(x, Y)$ — вектор-функция с компонентами

$$f_1(x, Y), f_2(x, Y), \ldots, f_n(x, Y).$$

Задача Коши для системы (6.12) состоит в том, чтобы найти решение ее, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(x_0) = y_{10}$, $y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0}$, где x_0, y_{10}, y_{20}, y_{n0} — заданные числа. В векторной форме задача Коши выглядит так: найти решение векторного уравнения $\frac{dY}{dx} = F(x, Y)$ с начальным условием $Y(x_0) = Y_0$, где x_0 — заданное число, Y_0 — заданный постоянный n-мерный вектор.

2. Линейные системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Линейная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + f_1(x), \\ \frac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + f_2(x), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + f_n(x), \end{cases} \tag{6.13}$$

или в матричной форме $\frac{dY}{dx} = AY + f$, где $A = [a_{ij}]$, $f = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \ldots \\ f_n(x) \end{bmatrix}$, $Y = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ \ldots \\ y_n(x) \end{bmatrix}$. Матрица A называется матрицей системы. Если при рассматриваемых значениях x вектор-функция $f \equiv 0$, то система называется однородной, в противном случае — неоднородной.

Рассмотрим однородную систему

$$\frac{dZ}{dx} = AZ. \tag{6.14}$$

Легко доказать, что если

$$Z_1(x) = \begin{bmatrix} z_{11}(x) \\ z_{21}(x) \\ \dots \\ z_{n1}(x) \end{bmatrix}, \quad Z_2(x) = \begin{bmatrix} z_{12}(x) \\ z_{22}(x) \\ \dots \\ z_{n2}(x) \end{bmatrix}$$

— решения однородной системы, то и их линейная комбинация также является решением этой системы.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\frac{dZ_1}{dx} = AZ_1, \quad \frac{dZ_2}{dx} = AZ_2,$$

$$\frac{d[c_1Z_1 + c_2Z_2]}{dx} = c_1\frac{dZ_1}{dx} + c_2\frac{dZ_2}{dx} = c_1AZ_1 + c_2AZ_2 = A[c_1Z_1 + c_2Z_2].$$

Аналогично, если $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ — решения системы (6.14), то их линейная комбинация также будет решением ее.

Для того, чтобы решение вида $Z = c_1Z_1 + c_2Z_2 + \ldots + c_nZ_n$ было общим, необходимо и достаточно, чтобы $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$ были линейно независимыми. Вектор-функции $Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_n(x)$ называются линейно независимыми, если выполняется тождество $c_1Z_1 + c_2Z_2 + \ldots + c_nZ_n = 0$ при одновременном обращении c_i в нуль. Критерий линейной независимости решений $Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_n(x)$:

$$\begin{vmatrix} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \dots & z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_{n1} & z_{n2} & \dots & z_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Совокупность линейно независимых решений называется **фундаментальной системой решений**. Построение фундаментальной системы решений для системы (6.14) выполняется **методом Эйлера**.

Решение системы (6.14) ищется в виде

$$Z_1 = \beta_1 e^{\lambda x},\ Z_2 = \beta_2 e^{\lambda x}, \ldots, Z_n = \beta_n e^{\lambda x}, \tag{6.15}$$

где β_i, λ — постоянные, подлежащие определению, причем хотя бы одно из них должно быть отлично от нуля. Находим производные

$$\frac{dZ_1}{dx} = \beta_1 \lambda e^{\lambda x}, \ldots, \frac{dZ_n}{dx} = \beta_n \lambda e^{\lambda x}. \tag{6.16}$$

Подставим (6.16) в систему (6.14), получим

$$\begin{cases} a_{11}\beta_1 e^{\lambda x} + a_{12}\beta_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{1n}\beta_n e^{\lambda x} = \beta_1 \lambda e^{\lambda x}, \\ a_{21}\beta_1 e^{\lambda x} + a_{22}\beta_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{2n}\beta_n e^{\lambda x} = \beta_2 \lambda e^{\lambda x}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\beta_1 e^{\lambda x} + a_{n2}\beta_2 e^{\lambda x} + \ldots + a_{nn}\beta_n e^{\lambda x} = \beta_n \lambda e^{\lambda x}. \end{cases}$$

Сокращаем все уравнения этой системы на общий множитель $e^{\lambda x}$ и переносим свободные члены в левую часть:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n = 0, \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22} - \lambda)\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\beta_n = 0. \end{cases} \tag{6.17}$$

Для того, чтобы полученная однородная линейная система алгебраических уравнений имела нулевое решение относительно β, необходимо и достаточно потребовать равенство нулю ее определителя, т.е. чтобы λ было корнем уравнения

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{6.18}$$

Уравнение (6.18) есть уравнение n-й степени относительно λ. Называется оно **характеристическим** уравнением, а его корни — характеристическими числами системы (6.14). Каждому корню характеристического уравнения соответствует хотя бы одно частное решение вида (6.15). Могут представиться следующие случаи.

Случай 1. Все n корней $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — действительные и различные числа. Полагая в системе (6.17) $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, получаем систему

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\beta_1 + a_{12}\beta_2 + \ldots + a_{1n}\beta_n = 0, \\ a_{21}\beta_1 + (a_{22} - \lambda)\beta_2 + \ldots + a_{2n}\beta_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}\beta_1 + a_{n2}\beta_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\beta_n = 0. \end{cases} \tag{6.19}$$

Ненулевое решение системы (6.19) есть $\beta_1 = \beta_{i1}$, $\beta_2 = \beta_{i2}, \ldots$, $\beta_n = \beta_{in}$. Подставляя эти значения и $\lambda = \lambda_i$ в соотношение (6.15), получаем решение системы (6.14), соответствующее корню λ_i :

$$Z_{i1} = \beta_{i1}e^{\lambda_i x},\ Z_{i2} = \beta_{i2}e^{\lambda_i x}, \ldots, Z_{in} = \beta_{in}e^{\lambda_i x}.$$

Фундаментальная система решений будет

$$\begin{array}{cccc} \beta_{11}e^{\lambda_1 x}, & \beta_{12}e^{\lambda_1 x}, & \ldots & \beta_{1n}e^{\lambda_1 x}, \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ \beta_{n1}e^{\lambda_n x}, & \beta_{n2}e^{\lambda_n x}, & \ldots & \beta_{nn}e^{\lambda_n x}. \end{array}$$

Общее решение системы (6.14) имеет вид

$$Z_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_{i1}e^{\lambda_i x},\ Z_2 = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_{i2}e^{\lambda_i x}, \ldots, Z_n = \sum_{i=1}^{n} c_i\beta_{in}e^{\lambda_i x}.$$

Случай 2. Корни $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ различны. Но среди них имеются комплексные. Пусть $a \pm ib$ — комплексные корни характеристического уравнения. Строим решение вида (6.15), соответствующее корню $a \pm bi$:

$$\begin{cases} Z_1 = (\beta_1^{(1)} + \beta_1^{(2)} \cdot i)e^{(a+bi)x}, \\ Z_2 = (\beta_2^{(1)} + \beta_2^{(2)} \cdot i)e^{(a+bi)x}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ Z_n = (\beta_n^{(1)} + \beta_n^{(2)} \cdot i)e^{(a+bi)x}. \end{cases}$$

Получим два действительных линейно независимых частных решений однородной системы (6.14):

$$\begin{cases} z_{11} = e^{ax}(\beta_1^{(1)} \cos bx - \beta_1^{(2)} \sin bx), \\ z_{12} = e^{ax}(\beta_2^{(1)} \cos bx - \beta_2^{(2)} \sin bx), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ z_{1n} = e^{ax}(\beta_n^{(1)} \cos bx - \beta_n^{(2)} \sin bx). \end{cases} \qquad (6.20)$$

Действительные решения, соответствующие сопряженному корню $a - bi$, будут линейно зависимыми с решениями (6.20). Следовательно, паре сопряженных комплексных корней $a \pm bi$ соответствует два действительных линейно независимых частных решения вида (6.20).

Случай 3. Среди корней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ есть кратные. Корню λ_1 кратности k соответствует решение вида

$$Z_1 = Q_1(x)e^{\lambda_1 x},\ Z_2 = Q_2(x)e^{\lambda_1 x}, \dots, Z_k = Q_k(x)e^{\lambda_1 x},$$

где $Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_k(x)$ — многочлены x степени не выше k. Коэффициенты этих многочленов — неопределенные числа, которые определяются подстановкой решения в систему.

Примеры.

1. $\begin{cases} y' = y - z, \\ z' = -4y + 4z. \end{cases}$

Частное решение данной системы ищем в виде $y = \beta_1 e^{\lambda x},\ z = \beta_2 e^{\lambda x}$. Составляем соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 - 5\lambda = 0$. Корни его $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5$. Построим частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 0$. Согласно соотношениям (6.17), β_1 и β_2 следует искать из системы

$$\begin{cases} (1-0)\beta_1 - 1\cdot\beta_2 = 0, \\ -4\beta_1 + (4-0)\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \beta_1 - \beta_2 = 0, \\ 4\beta_1 - 4\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Система состоит из линейно зависимых уравнений, поэтому сводится к уравнению $\beta_1 - \beta_2 = 0$. Следовательно, одно из искомых чисел можно выбирать произвольно. Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = 1$.

Итак, характеристическому числу соответствует частное решение $y_1 = 1\cdot e^{0x} = 1,\ z_1 = 1\cdot e^{0x} = 1$.

Найдем частное решение, соответствующее числу $\lambda_2 = 5$. Числа β_1 и β_2 находим из системы $\begin{cases} (1-5)\beta_1 - 1\cdot\beta_2 = 0, \\ -4\beta_1 + (4-5)\beta_2 = 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} -4\beta_1 - \beta_2 = 0, \\ -4\beta_1 - \beta_2 = 0. \end{cases}$ Эта система сводится к одному уравнению $4\beta_1 + \beta_2 = 0$. Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = -4$.

Итак, характеристическому числу $\lambda_2 = 5$ соответствует частное решение $y_2 = 1\cdot e^{5x} = e^{5x},\ z_2 = -4e^{5x}$.

Общее решение системы имеет вид $y = c_1y_1 + c_2y_2 = c_1 + c_2e^{5x},\ z = c_1z_1 + c_2z_2 = c_1 + c_2(-4)e^{5x} = c_1 - 4c_2e^{5x}$.

2. $\begin{cases} y' = 2y - 3z, \\ z' = 3y + 2z. \end{cases}$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$ имеет корни $\lambda_1 = 2+3i,\ \lambda_2 = 2-3i$. Частное решение, соответствующее числу $\lambda_1 = 2+3i$ ищем в виде $y = \beta_1e^{(2+3i)x},\ z = \beta_2e^{(2+3i)x}$. Числа β_1 и β_2 определяем из системы

$$\begin{cases} (2-2-3i)\beta_1 - 3\beta_2 = 0, \\ 3\beta_1 + (2-2-3i)\beta_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} -3i\beta_1 - 3\beta_2 = 0, \\ 3\beta_1 - 3i\beta_2 = 0. \end{cases}$$

Если второе уравнение умножить на i, то система принимает вид $\begin{cases} -3i\beta_1 - 3\beta_2 = 0, \\ -3i\beta_1 - 3\beta_2 = 0, \end{cases}$ т.е. состоит из двух одинаковых уравнений и поэтому сводится к одному уравнению $i\beta_1 + \beta_2 = 0$. Пусть $\beta_1 = 1$, тогда $\beta_2 = -i$. Частное решение имеет вид

$$y = e^{(2+3i)x} = e^{2x}(\cos 3x + i\sin 3x),$$

$$z = -ie^{(2+3i)x} = e^{2x}(-ie^{3ix}) = e^{2x}[-i(\cos 3x + i\sin 3x)] =$$
$$= e^{2x}[-i\cos 3x + \sin 3x] = e^{2x}(\sin 3x - i\cos 3x).$$

Определяя действительные и мнимые части, получаем два действительных линейно независимых частных решения

$$y_1 = e^{2x}\cos 3x,\ z_1 = e^{2x}\sin 3x,\ y_2 = e^{2x}\sin 3x,\ z_2 = -e^{2x}\cos 3x.$$

Общее решение системы является линейной комбинацией построенных линейно независимых частных решений

$$y = e^{2x}(c_1\cos 3x + c_2\sin 3x), \quad z = e^{2x}(c_1\sin 3x - c_2\cos 3x).$$

Рассмотрим неоднородную систему (6.13). Предполагаем, что $f_i \neq 0$. Общее решение системы (6.13) состоит из общего решения соответствующей однородной системы

$$\frac{dz_k}{dx} = \sum_{i=1}^{n} a_{kl} z_l \tag{6.21}$$

и одного частного решения неоднородной системы (6.13)

$$y_1 = y_1^{(1)},\ y_2 = y_2^{(1)}, \ldots, y_n = y_n^{(1)},$$

т.е.

$$y_k = y_k^{(1)} + \sum_{i=1}^{n} c_i z_{ik}.$$

Общее решение системы (6.13) можно найти **методом вариации произвольной постоянной** (методом Лагранжа), исходя из фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы (6.21). Метод состоит в нахождении решения системы (6.13) в виде

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} c_i(x) z_{ik}, \tag{6.22}$$

где $c_i(x)$ — некоторые непрерывно дифференцируемые функции. Подставляя решение (6.22) в систему (6.13) и учитывая, что z_{ik} являются решениями соответствующей однородной системы, получаем систему линейных алгебраических уравнений $\sum_{i=1}^{n} c'_i(x) z_{ik} = f_k(x)$ относительно $c'_i(x)$. Решая ее, получаем $c'_i(x) = \varphi_i(x)$ $(i = \overline{1, n})$, т.е. $\dfrac{dc_i(x)}{dx} = \varphi_i(x)$. Интегрируя эти дифференциальные уравнения, находим функции $c_i(x) = \int \varphi_i(x) dx + c_i$, где $c_i = \text{const}$. Подставляя найденные функции в равенство (6.22), получаем общее решение системы (6.13)

$$y_k = \sum_{i=1}^{n} z_{ik} \int \varphi_i(x) dx + \sum_{i=1}^{n} c_i z_{ik}.$$

Пример.

$$\begin{cases} y' = -2y + z - e^{2x}, \\ z' = -3y + 2z + 6e^{2x}. \end{cases}$$

Соответствующая однородная система $\begin{cases} y' = -2y + z, \\ z' = -3y + 2z \end{cases}$ имеет характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 - 1 = 0$. Корни этого уравнения $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1$. Частное решение ищем в виде $y = \beta_1 e^{\lambda x},\ z = \beta_2 e^{\lambda x}$. Частное решение, соответствующее корню $\lambda_1 = 1$, есть $y_1 = \beta_1 e^{x},\ z_1 = \beta_2 e^{x}$.

Согласно соотношениям (6.19) β_1 и β_2 следует искать из системы $\begin{cases} -3\beta_1+\beta_2=0, \\ -3\beta_1+\beta_2=0, \end{cases}$ которая сводится к одному уравнению $3\beta_1-\beta_2=0$. Пусть $\beta_1=1$, тогда $\beta_2=3$. Искомое частное решение $y_1=e^x,\ z_1=3e^x$.

Аналогично, частное решение для корня $\lambda_2=-1$ имеет вид $y_2=\beta_1 e^{-x},\ z_2=\beta_2 e^{-x}$. Числа β_1 и β_2 в этом случае находим из системы $\begin{cases} -\beta_1+\beta_2=0, \\ -3\beta_1+3\beta_2=0, \end{cases}$ которая сводится к уравнению $\beta_1-\beta_2=0$. Пусть $\beta_1=1$, тогда $\beta_2=1$. Искомое частное решение $y_2=e^{-x},\ z_2=e^{-x}$. Общее решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$y=c_1y_1+c_2y_2=c_1e^x+c_2e^{-x}, \quad z=c_1z_1+c_2z_2=3c_1e^x+c_2e^{-x}.$$

Общее решение заданной неоднородной системы ищем в виде

$$y=c_1(x)e^x+c_2(x)e^{-x}, \quad z=3c_1(x)e^x+c_2(x)e^{-x},$$

где $c_1(x),\ c_2(x)$ — неизвестные функции. Их находим из системы

$$\begin{cases} c'_1(x)e^x+c'_2(x)e^{-x}=e^{2x}, \\ 3c'_1(x)e^x+c'_2(x)e^{-x}=6e^{2x}, \end{cases} \quad c'_1(x)=\frac{7}{2}e^x, \quad c'_2(x)=-\frac{9}{2}e^{3x}.$$

Интегрируем полученные выражения:

$$\frac{dc_1(x)}{dx}=\frac{7}{2}e^x,\ dc_1(x)=\frac{7}{2}e^x dx,\ c_1(x)=\frac{7}{2}e^x+c_1,$$

$$\frac{dc_2(x)}{dx}=-\frac{9}{2}e^{3x},\ dc_2(x)=-\frac{9}{2}e^{3x}dx,\ c_2(x)=-\frac{3}{2}e^{3x}+c_2.$$

Общее решение заданной неоднородной системы имеет вид

$$y=\left(\frac{7}{2}e^x+c_1\right)e^x+\left(-\frac{3}{2}e^{3x}+c_2\right)e^{-x}=c_1e^x+c_2e^{-x}+2e^{2x},$$

$$z=3\left(\frac{7}{2}e^x+c_1\right)e^x+\left(-\frac{3}{2}e^{3x}+c_2\right)e^{-x}=3c_1e^x+c_2e^{-x}+9e^{2x}.$$

§4. Дифференциальные уравнения высших порядков

Обыкновенным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение, связывающее неизвестную функцию y, независимую переменную x и производные от y по x до n-го порядка включительно: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

Ограничимся рассмотрением уравнений n-го порядка, разрешенных относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{6.23}$$

где f — определенная, однозначная и непрерывная функция в области изменения своих аргументов. Решением дифференциального уравнения (6.23) в интервале (a, b) называется функция $y = \varphi(x)$, которая обращает это уравнение в тождество при всех значениях x из этого интервала, причем функция $\varphi(x)$ имеет в заданном интервале непрерывные производные до n-го порядка включительно.

Будем говорить, что для уравнения (6.23) поставлена задача Коши, если требуется найти его решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \tag{6.24}$$

где $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа. Эти числа называются начальными данными, а условия (6.24) — начальными условиями, или условиями Коши.

Можно доказать **теорему существования и единственности** решения, из которой следует, что если в окрестности $(n+1)$-мерной точки $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ функция f непрерывна по своим аргументам и имеет ограниченные первые производные по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, то в некоторой окрестности x_0 существует решение уравнения (6.23), удовлетворяющее условиям (6.24).

Решение задачи Коши зависит от начальных данных x_0, y_0, ${y'}_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$. Если выполнены условия теоремы существования и единственности, то решение, заданное на конечном промежутке, есть непрерывная функция от этих данных. Уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y + a_n(x) = f(x) \tag{6.25}$$

называется линейным. Рассмотрим уравнение (6.25) с заданными начальными условиями (6.24). Уравнение (6.25) можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных. Рассмотрим этот метод на примере уравнения третьего порядка

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x), \tag{6.26}$$

$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = {y'}_0,\ y''(x_0) = {y''}_0$. Обозначим $y' = u$, тогда $y'' = u' = v,\ y''' = v'$. Уравнение (6.26) в новых переменных запишется

$$\begin{cases} v' + a_1(x)v + a_2(x)u + a_3(x)y = f(x), \\ y' = u, \\ u' = v. \end{cases} \tag{6.27}$$

Таким образом, уравнение (6.26) заменим системой дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ u(x_0) = {y'}_0,\ v(x_0) = {y''}_0. \tag{6.28}$$

Систему (6.27) можно записать еще иначе:

$$\begin{cases} v' = f_1(x, y, u, v), \\ y' = f_2(x, y, u, v), \\ u' = f_3(x, y, u, v)v, \end{cases} \tag{6.29}$$

где $f_1 = -a_1(x)v - a_2(x)u - a_3(x)y + f(x)$, $f_2 = u$, $f_3 = v$. Систему (6.29) с начальными условиями (6.28) можно решать известными методами.

§5. Дифференциальные уравнения в биологии

1. Динамика численности популяции. Под термином "популяция" будем понимать совокупность биологических индивидов, населяющих определенную территорию и связанных общностью процессов самовоспроизведения и выживания. Динамика численности популяции, т.е. изменение общего числа живых особей в связи с рождаемостью и смертностью — важнейший вопрос экологии популяции. Область практических приложений составляют задачи, возникающие при эксплуатации полезных для человека популяций и подавлении популяций вредителей (вредных грызунов, насекомых и т.д.).

Рассмотрим вид животных, который живет изолированно в неизменной среде с неограниченными ресурсами питания или сосуществует с другими видами без прямого или косвенного воздействия в некоторой среде. В этом случае прирост числа особей N в некотором интервале времени будет пропорционален числу N :

$$\frac{dN}{dt} = \varepsilon N. \tag{6.30}$$

Решая это уравнение с начальным условием $N(t_0) = N_0$, получим

$$N = N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}. \tag{6.31}$$

Здесь коэффициент ε называется коэффициентом прироста и выражает отношение скорости прироста $\dfrac{dN}{dt}$ к числу N. Из формулы (6.31) видно, что численность растет с ростом t по экспоненте. Уравнение (6.30) — уравнение Мальтуса (1802) имеет лишь теоретический смысл. Более точное описание динамики численности популяции дает уравнение Ферхюльста–Перла (1845). Оно учитывает внутривидовую борьбу: $\dfrac{dN}{dt} = \varepsilon N - \gamma N^2$, $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$. Здесь γ — коэффициент внутривидовой конкуренции.

2. Модели Вольтерра. Рассмотрим некоторый ограниченный ареал, в котором обитают два вида, имеющих численность $N_1(t)$ и $N_2(t)$ соответственно. В условиях неограниченного ресурса питания и отсутствия хищника функции $N_1(t)$ и $N_2(t)$ удовлетворяли бы дифференциальным уравнениям $\dfrac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1$, $\dfrac{dN_2}{dt} = \varepsilon_2 N_2$, где ε_1, ε_2 — коэффициенты прироста. В реальных условиях оба вида взаимодействуют друг с другом. Рассмотрим два типа взаимодействия: а) борьба за общую пищу, б) один вид является хищником по отношению к другому.

Рассмотрим два вида, борющихся за общую пищу. В реальных условиях они живут на ограниченной территории и количество пищи уменьшается при возрастании чисел N_1 и N_2. Это приводит к убыванию коэффициентов прироста. Пусть $F(N_1, N_2)$ — количество пищи, поедаемой в единицу времени. Очевидно, что $F(N_1, N_2) \to 0$ при $(N_1+N_2) \to 0$ и $F(N_1, N_2) \to \infty$, когда хотя бы одно из чисел N_1 и $N_2 \to \infty$. Поэтому в качестве коэффициентов прироста естественно взять выражения $\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)$, $\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)$, где γ_1, γ_2 — положительные постоянные, соответствующие потребности в пище для каждого из двух видов. Отсюда получаем систему, описывающую развитие видов

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(N_1, N_2)]N_1, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = [\varepsilon_2 - \gamma_2 F(N_1, N_2)]N_2. \end{cases}$$

Функцию $F(N_1, N_2)$ можно взять в виде $F(N_1, N_2) = \lambda_1 N_1 +$

$\lambda_2 N_2$, где λ_1, λ_2 — коэффициенты чувствительности к недостатку корма ($\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$).

Рассмотрим теперь два вида, один из которых является хищником по отношению к другому. Пусть $N_1(t)$ — численность жертвы и пусть ресурсы ее питания неограниченны. Пусть $N_2(t)$ — численность хищника в момент t. Изменение численности жертвы ΔN_1 за время Δt складывается из естественного прироста $\varepsilon N_1 \Delta t$ и убыли в силу истребления жертвы хищником. Эту убыль можно считать пропорциональной количеству встреч $N_1 \cdot N_2$, т.е. убыль выразится величиной $\gamma_1 N_1 N_2 \Delta t$. Тогда $\Delta N_1 = \varepsilon_1 N_1 \Delta t - \gamma_1 N_1 N_2 \Delta t$ или $\dfrac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2$. Изменение численности ΔN_2 за время Δt складывается из прироста, обусловленного рождаемостью, и убыли из-за естественной смертности $(-\varepsilon_2 N_2 \Delta t)$. Прирост можно считать пропорциональным питанию, т.е. количеству съеденной жертвы $\gamma_2 N_1 N_2 \Delta t$. Тогда $\Delta N_2 = \gamma_2 N_1 N_2 \Delta t - \varepsilon_2 N_2 \Delta t$ или $\dfrac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2$.

Итак, получили систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = \varepsilon_1 N_1 - \gamma_1 N_1 N_2, \\ \dfrac{dN_2}{dt} = -\varepsilon_2 N_2 + \gamma_2 N_1 N_2, \ \varepsilon_1, \varepsilon_2, \gamma_1, \gamma_2 > 0, \end{cases}$$

которая описывает динамику численности жертвы и хищника.

ГЛАВА VII. РЯДЫ И ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ

§1. Числовые ряды

1. Основные понятия. Рассмотрим последовательность $\{a_n\} = a_1, a_2, \ldots, a_n$. Сумма членов бесконечной последовательности

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n \tag{7.1}$$

называется **числовым рядом**, числа a_i $(i = \overline{1, n})$ — членами ряда, a_n — **общим членом ряда**. Для краткости записи ряда применяется символ суммы $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Индексы показывают, в каких пределах ведется суммирование. Суммы вида $S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2, \ldots, s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называются **частичными суммами**.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то S — сумма ряда (7.1), а сам ряд является **сходящимся**. В противном случае — ряд **расходящийся**. Примером сходящегося ряда служит геометрическая прогрессия

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n+1} + \ldots, \quad |q| < 1,$$

$$S_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{1 - \lim\limits_{n\to\infty} q^n}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}.$$

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, и ряд расходится. Если $q = -1$, то данный ряд имеет вид $1 - 1 + 1 - \ldots$ и его частичная сумма S_n при $n \to \infty$ равна то нулю, то единице. Следовательно, не существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ и ряд расходится. Если в ряду (7.1) отбросить первые m членов, то получится ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{7.2}$$

называемый остатком ряда (7.1) после m-го члена.

Теорема 1. *Если сходится ряд (7.1), то сходится и любой из его остатков (7.2); обратно, из сходимости остатка (7.2) вытекает сходимость исходного ряда (7.1).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фиксируем m и обозначим k-ю частичную сумму ряда (7.2) через $\tilde{S}_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_{m+i}$. Тогда очевидно

$$\tilde{S}_k = S_{m+k} - S_m. \tag{7.3}$$

Если ряд (7.1) сходится, так что $S_n \to S$ при $n \to \infty$, то при $k \to \infty$ существует конечный предел

$$\tilde{S} = S - S_m \tag{7.4}$$

и для суммы $\tilde{S}_k$, что и означает сходимость ряда (7.2). Обратно, если дано, что сходится ряд (7.2), так что $\tilde{S}_k \to \tilde{S}$ при $k \to \infty$, то перепишем равенство (7.3), полагая в нем $k = n - m$ (при $n > m$), тогда $S_n = S_m + \tilde{S}_{n-m}$. Отсюда видно, что при $n \to \infty$ S_n имеет предел

$$S = S_m + \tilde{S}, \tag{7.5}$$

т.е. сходится ряд (7.1). Иными словами, отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда (в смысле его сходимости или расходимости).

Сумму ряда (7.2), если он сходится, обозначим вместо $\tilde{S}$ символом R_m, указывая значком, после какого члена берется остаток. Тогда равенства (7.4) и (7.5) перепишутся следующим образом: $S = S_m + R_m$, $R_m = S - S_m$. Если устремить $m \to \infty$, то $S_m \to S$, а $R_m \to 0$.

Теорема 2. *Если ряд (7.1) сходится, то сумма R_m его остатка после m-го члена с возрастанием m стремится к нулю.*

Сумма R_m остатка ряда есть **погрешность**, которую мы допускаем, если вместо суммы ряда S берем сумму n первых членов сходящегося ряда.

Теорема 3. Необходимый признак сходимости ряда. *Если ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как ряд сходится, то

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{n-1}, \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad S_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i.$$

Тогда $a_n = S_n - S_{n-1}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1}) = 0$.

Следствие. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд расходится.*

2. Сходимость положительных рядов. Вопрос о сходимости ряда проще всего решается для рядов с неотрицательными членами. Такие ряды мы будем называть положительными.

Теорема 4. Условие сходимости положительного ряда. *Положительный ряд всегда имеет сумму. Сумма будет конечной (и, следовательно, ряд — сходящимся), если частичные суммы ряда ограничены сверху, и бесконечной (а ряд — расходящимся) в противном случае.*

Существуют различные признаки сходимости положительных рядов. Остановимся лишь на некоторых из них.

Теорема 5. *Пусть даны два положительных ряда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{7.6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots. \tag{7.7}$$

Если, хотя бы начиная с некоторого члена (скажем для $n > N$*), выполняется неравенство* $a_n \le b_n$*, то из сходимости ряда (7.7) вытекает сходимость ряда (7.6) или из расходимости ряда (7.7) следует расходимость ряда (7.6).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как отбрасывание конечного числа начальных членов ряда не отражается на его поведении (теорема 1), мы можем считать, не нарушая общности, что $a_n \leq b_n$ при всех значениях n. Обозначив частичные суммы рядов (7.6) и (7.7) соответственно A_n и B_n, будем иметь $A_n \leq B_n$. Пусть ряд (7.7) сходится, тогда суммы B_n ограничены (теорема 4); $B_n \leq M$ ($M = \text{const}$). В силу предыдущего неравенства и $A_n \leq M$, а это по теореме 4 влечет за собой сходимость ряда (7.6).

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 5^2} + \frac{1}{4 \cdot 5^3} + \ldots$$

Решение. Сравним его с бесконечной убывающей прогрессией:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{n-1}} = 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots$$

Это сходящийся ряд, так как $q = \dfrac{1}{5} < 1$.

$$\frac{1}{n5^{n+1}} \leq \frac{1}{5^{n+1}} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^{n-1}}.$$

Ряд сходится.

Теорема 6. Признак Даламбера. *Пусть* $a_n > 0$ *и при* $n \to \infty$ *существует* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Тогда ряд сходится, если* $l < 1$, *и расходится, если* $l > 1$.

Пример.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{2}{2!} + \frac{4}{3!} + \ldots$$

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(n+1)!2^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Ряд сходится.

3. Сходимость произвольных рядов. Абсолютная сходимость. Рассмотрим ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{7.8}$$

члены которого могут иметь произвольные знаки. Если члены ряда не все положительны, но, начиная с некоторого места, становятся положительными, то, отбросив достаточное количество начальных членов ряда, сведем задачу к исследованию положительного ряда. Если члены ряда отрицательны или, по крайней мере, с некоторого места становятся отрицательнами, то мы вернемся к уже рассмотренным случаям путем изменения знаков всех членов.

Пусть среди членов ряда (7.8) есть бесконечное количество положительных и отрицательных членов.

Теорема 7. *Пусть ряд (7.8) имеет члены произвольных знаков. Если сходится ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|, \tag{7.9}$$

то и ряд (7.8) сходится.

Доказательство. Неравенство $|a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{n+m}| \leq |a_{n+1}| + \ldots + |a_{n+m}|$ показывает, что если условие сходимости выполняется для ряда (7.9), то оно тем более выполняется для ряда (7.8). Следовательно, ряд (7.8) сходится.

К положительному ряду (7.9) могут быть применены все признаки сходимости, рассмотренные в пункте 2. Ряд (7.8) называется абсолютно сходящийся, если сходится сам ряд (7.8) и ряд (7.9). Если же ряд (7.8) сходится, а ряд (7.9) расходится, то ряд (7.8) называется **условно сходящимся**.

§2. Функциональные ряды

Ряд вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) = a_1(x) + a_2(x) + \ldots + a_n(x) + \ldots$ называется **функциональным**. **Степенным** рядом называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots, \qquad (7.10)$$

где a_i — действительные числа. При конкретном значении x ряд становится числовым. Поэтому к ряду (7.10) можно применить признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}|x| = l. \qquad (7.11)$$

Из него можно определить, при каких x ряд сходится, а при каких — расходится.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \mathcal{L}$. Тогда из равенства (7.11) и признака Даламбера ряд (7.10) сходится, если $\mathcal{L}|x| < 1$, и расходится, если $\mathcal{L}|x| > 1$, т.е. ряд сходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| < \frac{1}{\mathcal{L}}$, и расходится для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > \frac{1}{\mathcal{L}}$. Величина $\frac{1}{\mathcal{L}} = R$ называется **радиусом сходимости** степенного ряда. Итак, в промежутке $(-R, R)$ ряд сходится и расходится вне этого промежутка, $R = \frac{1}{\mathcal{L}} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

Примеры.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty.$$

Ряд сходится при любом x.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^{n-1}}{n} = 1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \ldots + \dfrac{x^{n-1}}{n} + \ldots$

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Степенные ряды можно почленно складывать и вычитать, причем, если ряд $a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n + \ldots$ имеет радиус сходимости R_2, то радиус сходимости ряда $(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \ldots + (a_n + b_n)x^n + \ldots$ не меньше, чем меньшее из чисел R_1 и R_2. Степенные ряды можно умножать по правилу умножения многочленов. Сходящиеся степенные ряды можно почленно дифференцировать внутри промежутка сходимости $(-R, R)$ любое число раз: $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, $S'(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$, $S''(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \ldots$ Их можно почленно интегрировать в любом промежутке из $(-R, R)$.

Разложение функции в степенной ряд. Рассмотрим формулу Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + r_m(x). \tag{7.12}$$

При этом m мы можем брать сколь угодно большим. Это естественно приводит к мысли о бесконечном раэложении

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \ldots \tag{7.13}$$

Такой ряд называется **рядом Тейлора** для функции $f(x)$. Так как разность между $f(x)$ и суммой $(m+1)$-го члена ряда Тейлора, ввиду формулы (7.12) есть как раз $r_m(x)$, то очевидно, что для того, чтобы при некотором значении $\overline{x}$ действительно имело место разложение (7.13), необходимо и достаточно, чтобы член $r_m(x)$ формулы Тейлора при этом значении x стремился к нулю, т.е. $\lim\limits_{m\to\infty} r_m(x) = 0$.

Чаще употребляется разложение функции в ряд вида (7.13) при $x_0 = 0$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + \ldots \quad (7.14)$$

Такой ряд называется **рядом Маклорена**. Для ряда (7.14)

$$r_m(x) = \frac{f^{(m+1)}(\theta x)}{(m+1)!}x^{m+1},\ 0 < \theta < 1. \qquad (7.15)$$

Основные элементарные функции имеют следующие разложения в ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^m}{m!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + \ldots,$$
$$-\infty < x < +\infty;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!} + \ldots,\ -\infty < x < +\infty;$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{2m+1}}{2m+1} + \ldots,\ -1 < x < 1;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^m\frac{x^{m+1}}{m+1} + \ldots,\ -1 < x < 1;$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!}x^m + \ldots,$$
$$-1 < x < 1.$$

Докажем, например, что для функции $y = e^x,\ x \in [-H, H]$ справедливо приведенное разложение. Для этого покажем, что при $m \to \infty$ $r_m(x) \to 0$. Действительно, возьмем $r_m(x)$ в виде (7.15). Тогда

$$|r_m(x)| \le \frac{|f^{(m+1)}(\theta x)|}{(m+1)!}|x|^{m+1} < \frac{e^H \cdot H^{m+1}}{(m+1)!}, \ \lim_{m\to\infty} \frac{e^H \cdot H^{m+1}}{(m+1)!} = 0.$$

Для остальных представленных здесь разложений доказательство проводится аналогично.

Степенные ряды широко применяются в приближенных вычислениях. Так, подставляя конкретное значение аргумента x из области сходимости ряда, мы можем вычислить значения функций с любой точностью.

§3. Приближение функций

1. Постановка задачи о приближении функций. Пусть дана система функций $\{J_0(x), J_1(x), \ldots, J_m(x)\}$, которые в дальнейшем будем считать достаточно гладкими (например, непрерывно дифференцируемыми функциями). Функции вида

$$Q_m(x) = a_0 J_0(x) + a_1 J_1(x) + \ldots + a_m J_m(x), \tag{7.16}$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_m$ — постоянные коэффициенты, называются обобщенными многочленами или обобщенными полиномами.

Рассмотрим некоторую функцию $f(x)$. Задача о приближении ставится следующим образом: данную функцию $f(x)$ требуется приближенно заменить (аппроксимировать) обобщенным полиномом $Q_m(x)$ (7.16) так, чтобы отклонение в некотором смысле функции $f(x)$ от полинома $Q_m(x)$ на заданном множестве $X = \{x\}$ было наименьшим. Этого можно достичь за счет надлежащего подбора коэффициентов a_i $(i = \overline{0, m})$. При этом полином $Q_m(x)$ называется аппроксимирующим.

Что касается смысла понятия “отклонение двух функций”, то в зависимости от обстоятельств его можно понимать поразному. Например, формулу Тейлора можно рассматривать как приближение функции $f(x)$ некоторым полиномом по следующему критерию "наименьшего отклонения" в заданной точке $x_0 : f(x_0) = Q_m(x_0)$, а в окрестности этой точки $|f(x) - Q_m(x)| = o\|x - x_0\|^{m+1}$, где $\dfrac{o(\|\Delta x\|)^n}{\|\Delta x\|^n} \to 0$. Разность $R(x) = f(x) - Q_m(x)$ будем называть **остаточным членом**.

Для практики весьма важен случай, когда основная система функций $\{J_i(x)\}$ представляет собой последовательность целых неотрицательных степеней переменной x, т.е. $J_0(x) = 1,\ J_1(x) = x,\ \ldots, J_m(x) = x^m, \ldots$ В этом случае функции $Q_m(x)$ являются обычными полиномами

$$Q_m(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{m-1} x^m, \tag{7.17}$$

где a_i — постоянные. Таким образом, приходим к задаче приближения функции $f(x)$ полиномом $Q_m(x)$.

2. Интерполирование функций. Пусть X состоит из n точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. На множестве X задана функция $f(x)$, $x \in X$. Требуется построить полином $Q_n(x)$ вида (7.16). Будем считать отклонение $f(x)$ от $Q_n(x)$ наименьшим, если

$$f(x_i) = Q_n(x_i). \tag{7.18}$$

В этом случае задачу приближения функции назовем задачей **интерполирования**. Чаще в качестве полинома $Q_n(x)$ выбирают степенной полином

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Условие (7.18) приводит нас к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $a_0, a_1, \ldots, a_n$:

$$\begin{cases} a_0 x_0^n + a_1 x_0^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_0 + a_n = f(x_0), \\ a_0 x_1^n + a_1 x_1^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_1 + a_n = f(x_1), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 x_n^n + a_1 x_n^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x_n + a_n = f(x_n). \end{cases} \tag{7.19}$$

Определитель этой системы

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

называется определителем Вандермонда. Доказывается, что такой определитель не равен нулю. Следовательно, система (7.19) имеет единственное решение и полином $P_n(x)$ существует и единственный.

Разработаны различные методы интерполяции, в которых полином выбирается в той или иной форме. Рассмотрим одну из этих форм, так называемый **полином Лагранжа**

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x_k)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})\cdots(x_k-x_n)}. \tag{7.20}$$

Например, для таблично заданной функции

x	0	1	-3
$f(x)$	1	-2	4

$$P_2(x) = 1\cdot\frac{(x-1)(x+3)}{(0-1)(0+3)} - 2\cdot\frac{(x-0)(x+3)}{(1-0)(1+3)} +$$
$$+4\frac{(x-0)(x-1)}{(-3-0)(-3-1)} = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{13}{6}x + 1.$$

Теорема 8 (об остаточном члене). *Если функция $f(x)$ $(n+1)$ раз дифференцируема на $[a,b]$, то остаточный член $R_n(x)$ имеет вид $R_n(x) = \dfrac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$, где $a < \xi < b$, $\omega(x) = (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.*

Обозначим $\sup\limits_{[a,b]}|f^{n+1}(\xi)| = M_{n+1}$. Тогда можно получить оценку $\alpha(x)$ для остаточного члена, называемую **абсолютной погрешностью** интерполирования $|R_n(x)| \le \alpha(x)$, где

$\alpha(x) = \dfrac{M_{n+1}|\omega(x)|}{(n+1)!}$. В случае, если узлы интерполирования равноотстоящие, т.е. $x_0,\ x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_1 + h = x_0 + 2h, \ldots, x_n = x_{n+1} + h = x_0 + nh$, где $h =$const > 0, то полином Лагранжа упрощается:

$$P_n(x_0 + ht) = \frac{(-1)^n t(t-1)\cdots(t-n)}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i C_n^i}{(t-i)} y_i,$$

где $t = \dfrac{x - x_0}{n},\ y_i = f(x_i),\ C_i^n = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-i+1)}{i!}$.
Остаточный член для такого полинома запишется в виде

$$R_n(x) = R_n(x_0 + ht) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} h^{n+1} t(t-1)\cdots(t-n).$$

Интерполирование применяется во многих практических задачах, когда известны значения функции в некоторых точках отрезка $[a, b]$, а надо найти значения функции в промежуточных точках.

3. Точечный метод наименьших квадратов. Пусть X — конечное множество точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$. За меру отклонения полинома $Q_m(x)$ от данной функции $y = f(x)$ на множестве точек X принимают величину

$$S = \sum_{i=0}^{n} [Q_m(x_i) - f(x_i)]^2,$$

называемую **квадратичным отклонением**. В общем случае $m \neq n$.

Коэффициенты полинома $a_0, a_1, \ldots, a_m$ выбираются так, чтобы величина S была наименьшей.

Если $Q_m(x)$ — степенной полином (7.17), то для решения нашей задачи приближения найдем частные производные от величины $S = \sum\limits_{i=0}^{n} [a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2 + \ldots + a_m x_i^m - f(x_i)]^2$ по переменным $a_0, a_1, \ldots, a_m$ и приравняем их к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial a_0} = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m - y_i)\cdot 1 = 0, \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial a_1} = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m - y_i)x_i = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial S}{\partial a_m} = \sum\limits_{i=0}^{n}(a_0 + a_1 x_i + \ldots + a_m x_i^m - y_i)x_i^m = 0, \end{cases} \qquad (7.22)$$

где $y_i = f(x_i)$. Это линейная алгебраическая система $(m+1)$-го уравнения с $(m+1)$-м неизвестным $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$. Введем обозначения

$$S_k = x_0^k - x_1^k + \ldots + x_n^k, \quad t_k = x_0^k y_0 + x_1^k y_1 + \ldots + x_n^k y_n$$

$(k = 0, 1, 2 \ldots)$. Преобразуя систему (7.22) и используя введенные обозначения, будем иметь

$$\begin{cases} a_0 S_0 + a_1 S_1 + \ldots + a_m S_m = t_0, \\ a_0 S_1 + a_1 S_2 + \ldots + a_m S_{m+1} = t_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_0 S_m + a_1 S_{m+1} + \ldots + a_m S_{2m} = t_m, \end{cases} \qquad (7.23)$$

где $S_0 = n + 1$.

Можно доказать, что если среди точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ нет совпадающих и $m \le n$, то определитель системы (7.23) отличен от нуля, и, следовательно, эта система имеет единственное решение $a_0 = a_0^*,\ a_1 = a_1^*, \ldots, a_m = a_m^*$. Полином $Q_m(x)$ с такими коэффициентами будет обладать минимальным квадратичным отклонением $S_{\min}$. Если $m = n$, то аппроксимирующий полином $Q_m(x)$ совпадает с полиномом Лагранжа для системы точек $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и $S_{\min} = 0$. На практике обычно бывает, что степень полинома $Q_m(x)$ значительно меньше числа точек x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ и поэтому построение точного интерполяционного полинома, вообще говоря, невозможно. При $m > n$ система (7.23) становится неопределенной и такие случаи, как правило, не рассматриваются. Данный метод является более общим по сравнению с интерполированием.

4. Интегральный метод наименьших квадратов. Коэффициенты a_i $(i = \overline{0,m})$ будем задавать так, чтобы величина

$$I_n = \int\limits_a^b [Q_m(x) - f(x)]^2 dx = \int\limits_a^b \left[\sum_{i=0}^{m} a_i J_i(x) - f(x)\right]^2 dx,$$

называемая интегральным квадратичным отклонением полинома $Q_m(x)$ от функции $f(x)$, имела наименьшее значение.

Для нахождения минимума функции $I_n = I_n(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ найдем ее частные производные по a_i $(i = \overline{0,m})$ и приравняем их к нулю, что и даст систему уравнений для определения коэффициентов a_i :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial I_n}{\partial a_0} = \int\limits_a^b \left[\sum\limits_{i=0}^{n} (a_i J_i(x) - f(x)\right] J_0(x) dx = 0, \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial I_n}{\partial a_1} = \int\limits_a^b \left[\sum\limits_{i=0}^{n} (a_i J_i(x) - f(x)\right] J_1(x) dx = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\partial I_n}{\partial a_m} = \int\limits_a^b \left[\sum\limits_{i=0}^{n} (a_i J_i(x) - f(x)\right] J_n(x) dx = 0. \end{cases} \tag{7.24}$$

Вводя сокращенные обозначения $(J, \psi) = \int\limits_a^b J(x)\psi(x)dx$ систему (7.24) можно записать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_0(J_0, J_0) + a_1(J_1, J_0) + \ldots + a_n(J_n, J_0) = (f, J_0), \\ a_0(J_0, J_1) + a_1(J_1, J_1) + \ldots + a_n(J_n, J_1) = (f, J_1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_0(J_0, J_n) + a_1(J_1, J_n) + \ldots + a_n(J_n, J_n) = (f, J_n). \end{cases} \tag{7.25}$$

Доказывается, что система (7.25) имеет единственное решение, которое соответствует наименьшему квадратичному отклонению I_n.

Пример. Найти наилучшую квадратичную аппроксимацию функции $f(x) = \sqrt{x}$ на отрезке $[0, 1]$ посредством полинома первой степени $Q(x) = c_0 + c_1 x$.

Решение. Здесь $J_0(x) = 1,\ J_1(x) = x$. Имеем

$$(J_0, J_0) = \int_0^1 1^2 dx = 1,\ (f, J_0) = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3},$$

$$(J_1, J_0) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2},\ (f, J_1) = \int_0^1 x\sqrt{x} dx = \frac{2}{5},$$

$$(J_1, J_1) = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, система (7.25) имеет вид

$$\begin{cases} c_0 + \frac{1}{2}c_1 = \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 = \frac{2}{5}. \end{cases}$$

Отсюда $c_0 = \frac{4}{15},\ c_1 = \frac{4}{5}$ и, значит, $Q(x) = \frac{4}{15} + \frac{4}{5}x$.

Замечание. Метод наименьших квадратов применяется для обработки статистических результатов.

ГЛАВА VIII. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ, ИНТЕГРИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

Продифференцировать, проинтегрировать функции, найти решение уравнений и их систем далеко не всегда можно точными методами. Часто приходится прибегать к помощи приближенных методов. Такие методы, в зависимости от того, ищется ли приближенное решение в аналитическом виде или в виде таблицы чисел, разделяются на аналитические и численные.

Численные методы решения задачи — это определенная последовательность операций над числами, т.е. вычислительный алгоритм, язык которого — числа и арифметические действия. Примитивность языка позволяет реализовать численные методы на ЭВМ, что делает их мощным и универсальным инструментом исследования.

§1. Численное дифференцирование

К численному дифференцированию прибегают тогда, когда функция задана в форме таблицы или имеет сложное аналитическое выражение. В первом случае обычные методы диффереициального исчисления вообще не применимы, во втором их применение довольно сложно.

В указанных случаях вместо функции $f(x)$ рассматривают интерполирующую функцию $J(x)$ и производную от $f(x)$ считают приближенно равной производной от $J(x)$, т.е. $f(x) = J(x)+R_n(x)$ и $f^{(m)}(x) \approx J^{(m)}(x)$. При этом говорят, что производная $f^{(m)}(x)$ аппроксимируется функцией $J^{(m)}(x)$, точность аппроксимации определяется величиной $R_n^{(m)}(x)$. При интерполировании мы полагали, что $R_n(x)$ является малой величиной, но это совсем не значит, что малой величиной будет $R_n^{(m)}(x)$. Поэтому при численном дифференцировании важно оценивать остаточный член.

При построении формул численного дифференцирования применяются различные интерполяционные полиномы. Мы приведем ряд наиболее употребительных формул, которые получаются с использованием полинома Лагранжа для равноотстоящих узлов. Пусть в точках $x_i \in [a, b]$, $a = x_0$, $x_1 = x_0 + h, \ldots, x_n = x_{n-1}+h = b$ заданы значения функции $y_0, y_1, \ldots, y_n$. Тогда

$y'(x_i) = \dfrac{y_i - y_{i-1}}{h} + o(h)$ — формула левосторонней производной,

$y'(x_i) = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h} + o(h)$ — формула правосторонней производной,

$y'(x_i) = \dfrac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + o(h^2)$ — формула с центральными разностями.

Здесь $y(x_i) = y_i$. Для нахождения вторых производных наиболее употребительными являются следующие формулы:

$y''(x_i) = \dfrac{y_i - 2y_{i+1} + y_{i+2}}{h^2} + o(h^2)$ — формула правосторонней производной,

$y''(x_i) = \dfrac{y_{i-2} - 2y_{i-1} + y_i}{h^2} + o(h^2)$ — формула левосторонней производной,

$y''(x_i) = \dfrac{y_{i+2} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + o(h^2)$ — формула с центральными разностями.

§2. Численное интегрирование

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ — ее первообразная, то $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Однако во многих случаях первообразная не может быть найдена с помощью элементарных средств или эта операция очень сложна. Кроме того, если функция $f(x)$ задана таблично, то понятие первообразной теряет для нее всякий смысл. Поэтому важное значение приобретают приближенные методы вычисления интегралов и в первую очередь численные методы.

Задача численного интегрирования функции состоит в вычислении определенного интеграла на основании ряда значений подинтегральной функции. Поскольку определенный интеграл геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции, задача вычисления его равносильна геометрической задаче о вычислении площади соответствующей криволинейной трапеции. Эту задачу можно решать несколькими способами.

1. Метод прямоугольников. Пусть на отрезке $[a, b]$ дана непрерывная функция $y = f(x)$. Требуется приближенно вычислить интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ или, иначе, найти площадь S криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a, b]$, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Каждый частичный отрезок x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ имеет длину $\dfrac{b-a}{n}$ $(i = \overline{0, n-1})$. Через точки x_i $(i = \overline{1, n-1})$ проведем ординаты $y_i = f(x_i)$ и разобьем криволинейную трапецию на полосы. Каждую полосу заменим прямоугольником с высотой y_i (или y_{i+1}) и основанием $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 30). Сумма площадей таких прямоугольников приближенно равна площади криволинейной трапеции, т.е.

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} y_i(x_{i+1} - x_i), \text{ где } x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$$

или $S = \dfrac{b-a}{n} \sum y_i$. Отсюда

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_i = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}). \quad (8.1)$$

Если за высоту каждого прямоугольника брать правую ординату, то формула примет вид

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} y_{i+1} = \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n). \quad (8.2)$$

Формулы (8.1) и (8.2) называются **формулами прямоугольников**. При увеличении числа делений n правая часть каждой

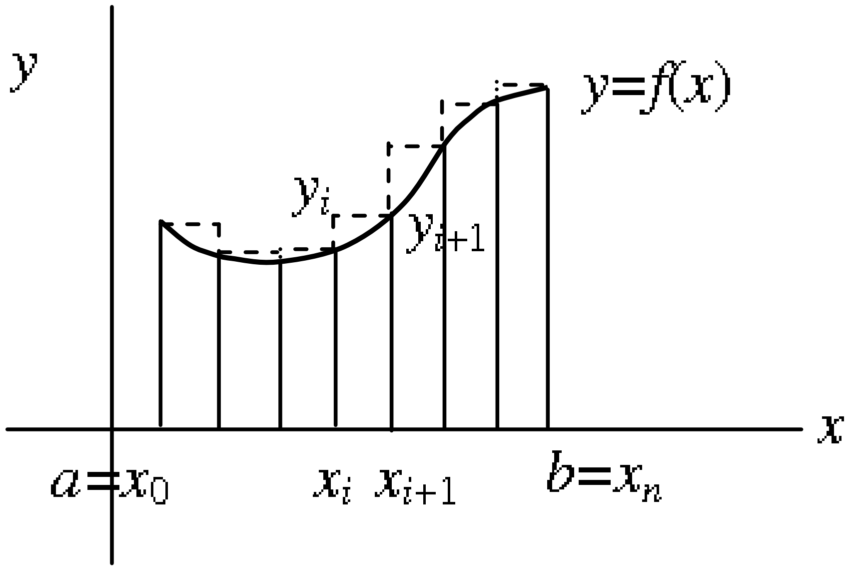

Рис. 30

из формул приближается к точному значению интеграла и в пределе при $n \to \infty$ равна ему.

Можно легко определить погрешность формулы прямоугольников. Обозначим через m_i наименьшее значение функции $f(x)$, а через M_i ее наибольшее значение на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$. Тогда площадь i-й криволинейной трапеции заключена между числами $m_i\dfrac{b-a}{n}$ и $M_i\dfrac{b-a}{n}$. Погрешность δ при замене криволинейной трапеции фигурой, состоящей из прямоугольников, будет удовлетворять условию

$$\delta < \sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i)\frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}(M_i - m_i).$$

2. Метод трапеций. Идея метода состоит в том, что полоски криволинейной трапеции заменяются прямоугольными трапециями. Снова разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей и из точек деления $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ восстановим ординаты до пересечения с данной кривой. Через точки с координатами (x_i, y_i) проведем ломаную (рис. 31). Криволинейную трапецию заменим несколькими прямоугольными трапециями. Площадь i-й из них определяется по формуле $S =$

$\dfrac{y_{i+1}-y_i}{2}(x_{i+1}-x_i),\ i=\overline{0,n-1}$. Тогда площадь данной трапеции может быть выражена приближенным равенством $S \approx \sum\limits_{i=0}^{n-1}\dfrac{y_i+y_{i+1}}{2}(x_{i+1}-x_i)$. Учитывая, что $x_{i+1}-x_i=\dfrac{b-a}{n}$ находим

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}[y_0+y_1+y_1+y_2+y_2+y_3+\ldots+y_{n-1}+y_{n-1}+y_n] =$$

$$= \frac{b-a}{n}[y_0+y_n+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})].$$

Погрешность формулы трапеции (8.3) может быть оценена неравенством $\delta < \dfrac{(b-a)^3}{12n^2}M$, где M — наибольшее значение $f'''(x)$ в промежутке $[a,b]$.

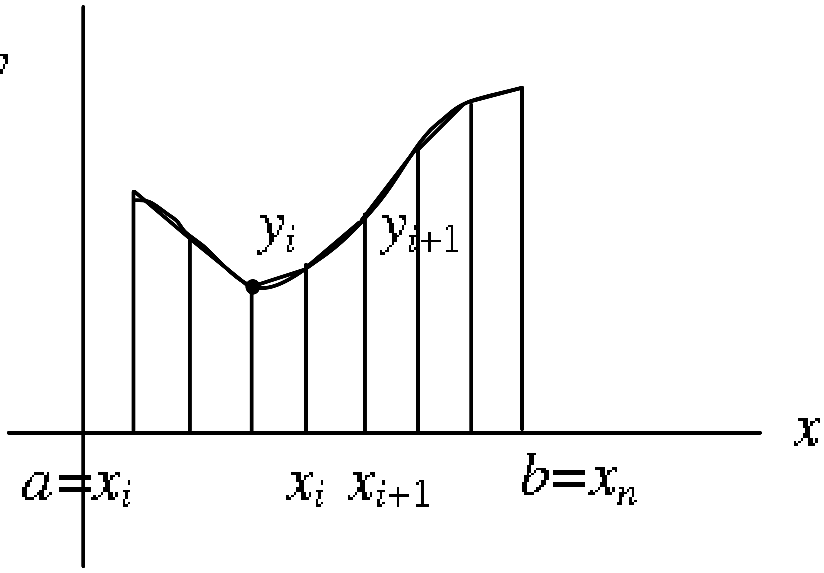

Рис. 31

При одном и том же n формула трапеции дает более точный результат, чем формула прямоугольников. При $n \to \infty$ правая часть формулы трапеции имеет своим пределом точное значение интеграла. Итак, если звенья ломаной, заменяющие участки кривой, совпадают с ней не в одной, а в двух точках, то формула приближенного интегрирования становится более точной.

3. Метод парабол (Симпсона). Заменим участки кривой $y = f(x)$ параболой, совпадающей с данной кривой в трех точках. Примем во внимание, что параболу $y = ax^2 + bx + c$ можно провести через любые три точки плоскости (для этого достаточно решить систему трех уравнений с тремя неизвестными). Предварительно вычислим площадь параболической трапеции, основанием которой служит отрезок $[0, h]$ оси Ox (рис. 32).

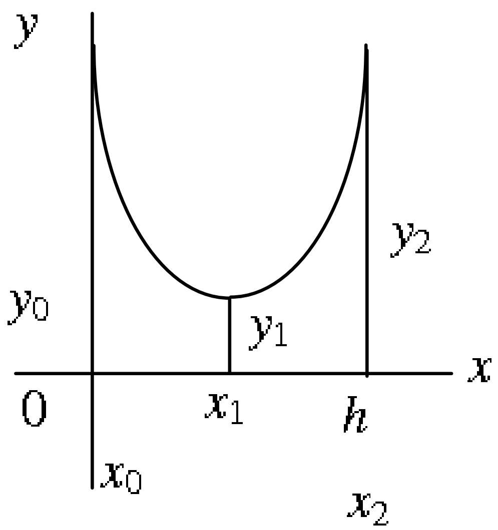

Рис. 32

Условимся ординаты из начала, середины и конца отрезка обозначать через y_0, y_1, y_2, а соответствующие абсциссы через x_0, x_1, x_2. Найдем точное значение площади этой трапеции $S = \int\limits_0^h (ax^2 + bx + c)dx = \left|\dfrac{ax^3}{3} + \dfrac{bx^2}{2} + cx\right|_0^4 = \dfrac{h}{6}(2ah^2 + 3bh + 6c)$. Выразим S через y_0, y_1, y_2. Для этого учтем, что $x_0 = 0,\ x_1 = h/2,\ x_2 = h$ и, соответственно, $y_0 = y(0) = C,\ y_1 = y(h/2) = \dfrac{ah^2}{4} + b\dfrac{h}{2} + C,\ y_2 = y(h) = ah^2 + bh + C$. Отсюда $y_0 + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 3bh + 6C$. Тогда $S = \dfrac{h}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2)$.

Вернемся к основной задаче. Разобьем отрезок $[a, b]$ на четное число равных частей $n = 2m$ и построим ординату $y = f(x_i)$ из точек деления. Обозначим на данной кривой точку с координатами (x_i, y_i) через M_i. Через каждые три соседние точки на кривой проведем параболы, заменяя ими нашу кривую. Длину каждой пары участков обозначим через $h = \dfrac{b-a}{m}$ (рис. 33).

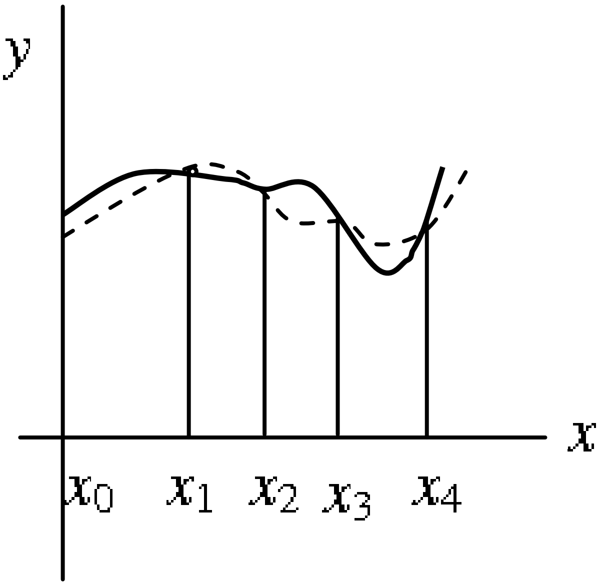

Рис. 33

На каждом частичном отрезке длины h вместо криволинейной трапеции имеем параболическую площадь, которая известна. Тогда $S \approx \dfrac{h}{6}[(y_0+4y_1+y_2)+(y_2+4y_3+y_4)+\ldots+(y_{n-2}+4y_{n-1}+y_n)]$, $h=(b-a)/n$. Иначе

$$S = \frac{b-a}{3\cdot 2m}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})] =$$

$$= \frac{b-a}{3n}[y_0+y_n+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})].$$

Формула (8.4) называется **формулой парабол** (Симпсона). Погрешность ее δ оценивается из неравенства $\delta < \dfrac{(b-a)^5}{180n^4}M$, где M — наибольшее значение $f^{IV}(x)$ в промежутке $[a,b]$.

§3. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений

Пусть дана система n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$Ax = b, \tag{8.5}$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Если $|A| \neq 0$, то система (8.5) имеет единственное решение и с теоретической точки зрения найти его не представляет труда. Компоненты вектора $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ могут быть вычислены по известной формуле Крамера $x_i = \dfrac{\det A_i}{\det A}$, где матрица A_i получается из матрицы A заменой ее i-го столбца столбцом свободных членов. Но такой способ решения приводит к вычислению $(n+1)$ определителей порядка n, что является весьма трудоемкой операцией при большом n.

Применяемые современные методы решения линейных систем можно разделить на две группы: точные и приближенные. **Точными** методами называются такие методы, которые в предположении, что вычисления ведутся точно (без округлений), приводят к точным значениям неизвестного x_i. **Приближенными** методами называются такие методы, которые даже в предположении, что вычисления ведутся без округлений, позволяют получить решение системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ лишь с заданной точностью.

1. Метод простой итерации. Пусть система (8.5) какимлибо образом приведена к виду

$$x = Cx + f, \tag{8.6}$$

где C — некоторая матрица, f — вектор-столбец. Исходя из произвольного вектора $x^{(0)}$

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \dots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

строим итерационный процесс $x^{(k+1)} = cx^{(k)} + f$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$. Доказано [2], что если $\|c\| < 1$, то процесс итерации сходится к точному решению системы x при любом начальном векторе $x^{(0)}$, т.е. $x = \lim\limits_{k\to\infty} x^{(k)}$.

Замечание. Норму матрицы C будем рассматривать в двух формах: а) $\max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} |C_{ij}|$; б) $\max\limits_{i} \sum\limits_{j=1}^{n} |C_{ij}|$. Оценка погрешности приближенного решения $x^{(k)}$ задается формулой [2] $|x_i - x_i^{(k)}| \leq \dfrac{\|c\|}{1 - \|c\|} \max\limits_{j=\overline{1,n}} |x_j^{(k)} - x_j^{(k-1)}|$. Начальный вектор $x^{(0)}$ может быть выбран произвольно. Иногда берут $x^{(0)} = f$. Однако целесообразно в качестве вектора $x^{(0)}$ брать приближенное значение x, полученное грубой прикидкой.

Приведение системы (8.5) к виду (8.6) можно осуществить различными способами, важно только, чтобы $\|c\| < 1$. Ограничимся рассмотрением двух таких способов.

Первый способ. Если $a_{ii} \neq 0$, то систему (8.5) можно записать в виде

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n), \\ x_2 = \dfrac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \dfrac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}). \end{cases}$$

В этом случае $c_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ $(j \neq j)$, $c_{ii} = 0$. Тогда условие сходимости приобретает вид

$$\max \sum_{\substack{i=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1 \text{ или } \max \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| < 1. \qquad (8.7)$$

Неравенства (8.7) выполняются, если диагональные элементы матрицы A удовлетворяют условию $|a_{ii}| > \sum\limits_{i \neq j} |a_{ij}|$ $(i = \overline{1, n})$, т.е. модули диагональных коэффициентов для каждого уравнения системы больше суммы модулей всех остальных коэффициентов (не считая свободных членов).

Второй способ. Покажем этот способ на примере

$$\begin{cases} 1,02x_1 - 0,05x_2 - 0,10x_3 = 0,795, \\ -0,11x_1 + 1,03x_2 - 0,05x_3 = 0,849, \\ -0,11x_1 - 0,12x_2 + 1,04x_3 = 1,398. \end{cases} \qquad (8.8)$$

Матрица этой системы такова, что диагональные элементы близки к единице, а остальные — значительно меньше единицы. Поэтому для метода итерации систему (8.8) запишем в виде

$$\begin{cases} x_1 = 0,795 - 0,02x_1 + 0,05x_2 + 0,10x_3, \\ x_2 = 0,849 + 0,11x_1 - 0,03x_2 + 0,05x_3, \\ x_3 = 1,398 + 0,11x_1 + 0,12x_2 - 0,04x_3. \end{cases} \qquad (8.9)$$

Условия сходимости для системы (8.9) выполнены. Действительно,

$$\sum_{j=1}^{3} |c_{1j}| = 0,02 + 0,05 + 0,10 = 0,17 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |c_{2j}| = 0,11 + 0,03 + 0,55 = 0,69 < 1,$$

$$\sum_{j=1}^{3} |c_{3j}| = 0,11 + 0,12 + 0,04 = 0,27 < 1,$$

$$\|c\| = \max_i \sum_{j=1}^{3} |c_{ij}| = 0,27 < 1.$$

Замечание. Метод итерации — самоисправляющийся метод, т.е. отдельная ошибка, допущенная в вычислениях, не отражается на окончательном результате, так как ошибочное приближение можно рассматривать как новый начальный вектор.

1. Метод наискорейшего спуска. Задача решения системы n уравнений $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ $(i = \overline{1,n})$ с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ эквивалентна задаче минимизации функции

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \equiv \sum_{i=1}^{n} |f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)|^2$$

или какой-либо другой возрастающей функции от абсолютных величин $|f_i|$ — **невязок** (ошибок), где $f_i = f_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$. Здесь $\tilde{x}_i$ — приближенное решение системы.

Задача отыскания минимума функции n переменных и сама по себе имеет большое практическое значение.

Пусть на некотором множестве X n-мерного евклидова пространства задана функция $F(x)$, $x = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Задача минимизации функции $F(x)$ на множестве X состоит в следующем: а) найти $F^* = \inf\limits_X F$, б) если на множестве X нижняя грань достигается, то найти точку $x^* \in X$, в которой $F(x^*) = F^*$, в) если на множестве X нижняя грань не достигается, то указать последовательность $\{x_k\} \in X$, для которой $\lim\limits_{k\to\infty} F(x_k) = F^*$.

Пусть $F(x)$ — непрерывная вектор-функция. Известно, что в точке x, в которой $F'(x) \neq 0$, направление наибыстрейшего возрастания функции совпадает с направлением градиента $F'(x)$, а направление наибыстрейшего убывания — с направлением антиградиента $(-F'(x))$. Это свойство положено в основу **градиентного** метода минимизации функции. Метод предполагает выбор некоторой начальной точки x_0. Имея x_0, строят последовательность $\{x_k\}$ по правилу

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k F'(x_k), \tag{8.10}$$

где α_k =const > 0 $(k = 0, 1, 2, \ldots)$.

Если $F'(x_k) \neq 0$, то можно подобрать такое $\alpha_k > 0$, чтобы $F(x_{k+1}) < F(x_k)$. Действительно, $F(x_k+h) - F(x_k) = F'(x_k) \cdot h + O(|h|)$, $h = x_{k+1} - x_k = -\alpha_k F'(x_k)$, $F(x_{k+1}) - F(x_k) = -\alpha_k \left[|F'(x_k)|^2 - \dfrac{O(\alpha_k)}{\alpha_k} \right]$. Тогда $F(x_{k+1}) - F(x_k) < 0$ при всех достаточно малых $\alpha_k > 0$.

Если $F(x_{k+1}) - F(x_k) < 0$, то x_k — стационарная точка. В этом случае процесс прекращается (при необходимости исследуют эту точку на минимум).

Существуют различные способы выбора α_k в формуле (8.10). В зависимости от выбора α_k получают различные варианты градиентного метода.

Метод наискорейшего спуска предполагает выбор из условия

$$g_k(\alpha_k) = \min_{\alpha \geq 0} g_k(\alpha), \quad g_k(\alpha) = F(x_k - \alpha F'(x_k)). \tag{8.11}$$

Отсюда имеем $F(x_0) \geq F(x_1) \geq F(x_2) \geq \ldots$

Теорема. *Пусть функция $F(x)$ непрерывна и ограничена снизу ($infl_{x \in E_n} F(x) = F^* > -\infty$) и градиент $F'(x)$ удовлетворяет условию $|F'(x) - F'(y)| \leq \mathcal{L}|x-y|$, $\mathcal{L}$ =const > 0. Пусть x_0 — произвольная фиксированная точка и последовательность $\{x_k\}$ получена из условий (8.10), (8.11). Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} F'(x_k) = 0$.*

§4. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем

1. Метод Эйлера. Пусть дано дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y) \tag{8.12}$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0. \tag{8.13}$$

Требуется найти решение задачи (8.12)–(8.13) на отрезке $[a, b]$ (задача Коши). Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0 = a,\ x_1 = a + h, \ldots, x_N = b$, где $x_i = a + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, N)$ (рис. 34).

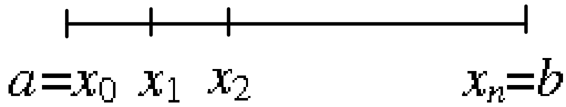

Рис. 34

Здесь h — шаг сетки. В точках деления, т.е. в точках x_i будем искать решение задачи (8.12)–(8.13). Для этого проинтегрируем уравнение (8.12) по x в пределах от x_0 до x_1 : $y(x_1) = y(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y)dx$. Будем считать, что на $[x_0, x_1]$ функция $f(x, y)$ постоянна и равна $f(x_0, y_0)$. Тогда $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$ или $y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$.

Интегрируя уравнение (8.12) от x_1 до x_2 и полагая на отрезке $[x_1, x_2]$ функцию $f(x, y) = f(x_1, y_1)$, получим $y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)$ и т.д., $y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i)$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$ или $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i,\ \Delta y_i = hf(x_i, y_i)$.

Метод Эйлера является простейшим численным методом интегрирования дифференциального уравнения. Недостатки его: а) малая точность, б) систематическое накопление ошибок.

Пример. $y' = x + y,\ y(0) = 1,\ h = 0,1$.

Решение. $f(x, y) = x + y,\ y_0 = 1,\ y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot 1 = 1,1,\ y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = 1,1 + 0,1 \cdot 1,2 = 1,22, \ldots, y_{i+1} = y_i + 0,1(x_i + y_i)$.

Существуют различные модификации метода Эйлера [1]. Он применяется и для решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка $Y' = F(x, Y),\ Y(x_0) = Y_0$. Здесь

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots \\ y_n(x) \end{bmatrix},\ F(x, Y) = \begin{bmatrix} f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ \dots \\ f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{bmatrix},\ Y_0 = \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \dots \\ y_n(x_0) \end{bmatrix}.$$

Согласно методу Эйлера решения находятся по формуле

$$Y_{i+1} = Y_i + hF(x_i, y_i).$$

Пример. Найти решение системы при $x = 0,5,\ h = 0,1$

$$\begin{cases} y' = z + 1,\ y(0) = 1, \\ z' = y - x,\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Результаты вычислений удобно располагать в таблице

x_i	y_i	$hf_1(x_i y_i z_i)$	z_i	$hf_1(x_i y_i z_i)$
0	1	0,2	1	0,1
0,1	1,2	0,21	1,1	0,11
0,2	1,41	0,221	0,21	0,121
0,3	1,631	0,2331	1,331	0,1331
0,4	1,8641	0,24641	1,4641	0,14641
0,5	2,11051	-	1,61051	-

Для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и их систем применяются и более точные методы.

Задача Коши для дифференциальных уравнений n-го порядка. Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y + a_n(x) = f(x) \qquad (8.14)$$

с заданными начальными условиями

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \qquad (8.15)$$

Требуется найти решение задачи (8.14)–(8.15) на отрезке $[a, b]$, где $a = x_0$.

Уравнение (8.14) можно свести к системе дифференциальных уравнений первого порядка путем введения новых переменных. Рассмотрим этот метод на примере уравнений третьего порядка

$$y''' + a_1(x)y'' + a_2(x)y' + a_3(x)y = f(x),$$
$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = {y'}_0,\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \tag{8.16}$$

Обозначим $y' = u,\ y'' = u' = v,\ y''' = v'$. Тогда уравнение (8.16) запишется в виде

$$v' + a_1(x)v + a_2(x)u + a_3(x)y = f(x), \tag{8.17}$$

где

$$y' = u,\ u' = v. \tag{8.18}$$

Таким образом, уравнение (8.16) мы запишем системой дифференциальных уравнений первого порядка (8.17) и (8.18) с начальными условиями $y(x_0) = y_0,\ u(x_0) = {y'}_0,\ v(x_0) = {y''}_0$. Систему (8.18) можно записать в виде

$$v' = f_1(x, y, u, v),$$
$$y' = f_2(x, y, u, v),$$
$$u' = f_3(x, y, u, v).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов В.И. Курс высшей математики. М., 1974, т. 1, с. 9–275; т. 3. с. 88–883.

2. Рудин У. Основы математического анализа. М.: Мир, 1976, с. 93–95, с. 39–41.

3. Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976, с. 15–21.

4. Динамическая теория биологических популяций. Под редакцией Р.А. Полуэктова. М.: Наука, 1974, с. 31–46.

5. Гильдерман Ю.И. Лекции по высшей математике. Новосибирск: Наука, 1974.