Обобщенные решения интегральных уравнений Вольтерра первого рода

Н.А. Сидоров, М.В.Фалалеев
Иркутский государственный университет

Abstract

Получены достаточные условия однозначной разрешимости интегральных уравнений Вольтерра первого рода в пространстве обобщенных функций с ограниченным слева носителем.

Введение

Рассматривается интегральное уравнение

$$\int_0^t K(t,s)x(s)ds = f(t), \quad t \geq 0(.1) \tag{1}$$

где $K(t,s), f(t)$ - бесконечно дифференцируемые функции. Решение уравнения (B.1), продолжая исследования [2, 3] будем строить в классе D'_+.

1 Постановка задачи в классе обобщенных функций

Для любой функции $K(\tau,t) \in C^\infty(R^2)$ и любой обобщенной функции $x(t) \in D'_+$ [1] определим новую обобщенную функцию $(\theta(t) * K(\tau,t)x(t)) \mid_{\tau=t}$ действующую на основные функции $\varphi(t) \in D(R^1)$ по правилу

$$((\theta(t) * K(\tau,t)x(t)) \mid_{\tau=t}, \varphi(t)) \stackrel{\text{def}}{=} (x(t), \int_t^\infty K(\tau,t)\varphi(\tau)d\tau). \tag{1.1}$$

Очевидно функция

$$\psi(t) = \int_t^\infty K(\tau,t)\varphi(\tau)d\tau$$

вообще говоря не принадлежит классу $D(R^1)$, т.к. $supp\,\psi(t) \equiv (-\infty, \tau_1]$, где $\tau_1 = \sup(supp\,\varphi(\tau))$. Однако, равенство (1.1) будет иметь смысл, ибо в наших предположениях $supp\,x(t) \subset [0, +\infty)$, поэтому множество $supp\,x(t) \cap supp\,\psi(t)$ является ограниченным. В этом случае $\psi(t)$ можно заменить финитной функцией $\psi_1(t)$

$$\psi_1(t) = \int_t^\infty K_1(\tau,t)\varphi(\tau)d\tau$$

где $K_1(\tau,t) \in D(R^2), K_1(\tau,t) \equiv K(\tau,t)$ на множестве $\{(\tau,t) \mid t,\tau \in [0,\tau_1]\}$, тогда на этом множестве $\psi_1(t) \equiv \psi(t)$. Теперь уже определено значение $(x(t),\psi_1(t))$ и оно не зависит от выбора значений функции $K_1(\tau,t)$ вне указанного множества.

Покажем, что функционал $(\theta(t) * K(t,\tau)x(t)) \mid_{\tau=t}$ принадлежит D'_+. Линейность следует из свойств линейности интеграла и функционала $x(t) \in D'_+$. Установим непрерывность. Если $\varphi_k(\tau) \longrightarrow 0$ в $D(R^1)$, тогда $\exists R > 0$ такое, что $supp\,\varphi_k(\tau) \subset [-R,R]\,\forall\, k \in N$. Пусть $K_1(\tau,t) \in D(R^2), K_1(\tau,t) \equiv K(\tau,t)$ на множестве $\{(\tau,t) \mid t,\tau \in [0,R]\}$, тогда последовательность $\psi_1^k(t) = \int_t^\infty K_1(\tau,t)\varphi_k(\tau)d\tau \longrightarrow 0$ в $D(R^1)$ и значит $(x(t),\psi_1^k(t)) \longrightarrow 0$. Если $supp\,\varphi(\tau) \subset (-\infty;0)$, то $supp\,\psi(t) \subset (-\infty;0)$ и $supp\,x(t) \cap supp\,\psi(t) \equiv \emptyset$, поэтому $supp\,((\theta(t) * K(t,\tau)x(t)) \mid_{\tau=t}) \subset [0,+\infty)$.

Замечание 1 *Если $supp\,K(\tau,t) \subset \{(\tau,t) \mid t \geq t_1\}$, то $\psi(t) \in D(R^1)$ причем $supp\,\psi(t) \subset [t_1,\tau_1]$ и равенство (1.1) имеет смысл, Формула (1.1) также корректна и в случае финитности ядра $K(\tau,t)$.*

Пример 1 *Если $x(t) \in D'_+-$ регулярная обобщенная функция, т.е. $x(t) = u(t)\theta(t)$, где $u(t)-$ локально интегрируема, то*

$$((\theta(t) * K(\tau,t)x(t)) \mid_{\tau=t}, \varphi(t)) = \int_0^{+\infty} u(t) \int_t^{+\infty} K(\tau,t)\varphi(\tau)d\tau dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} (\int_0^\tau K(\tau,t)u(t)dt)\varphi(\tau)d\tau = ((\int_0^t K(t,s)u(s)ds)\theta(t), \varphi(t)),$$

т.е.

$$(\theta(t) * K(\tau,t)x(t)) \mid_{\tau=t} = (\int_0^t K(t,s)u(s)ds)\theta(t).$$

Пример 2 *Если $x(t) = \delta^{(j)}(t)$, то*

$$(\theta(t) * K(\tau,t)\delta^{(j)}(t)) \mid_{\tau=t} = (-1)^j \frac{\partial^j K(t,0)}{\partial s^j}\theta(t) +$$

$$+ \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^i (\sum_{l=0}^{i} C_{j-1-l}^{i-l} C_j^l \frac{\partial^i K(0,0)}{\partial t^{i-l} \partial s^l})\delta^{(j-1-i)}(t).$$

Вернемся к уравнению (B.1). Пусть $x(t) \in C[0,t_0]-$ решение уравнения (B.1), тогда будучи продолженная нулем при $t < 0$ функция $x(t)$ удовлетворяет в обобщенном смысле равенству

$$(\theta(t) * K(\tau,t)x(t)\theta(t)) \mid_{\tau=t} = f(t)\theta(t),$$

поэтому задачу о построении решения уравнения

$$(\theta(t) * K(\tau,t)x(t)) \mid_{\tau=t} = f(t)\theta(t), \tag{1.2}$$

где $x(t) \in D'_+$, назовем задачей о разрешимости исходного уравнения (B.1) в классе D'_+.

2 Построение обобщенного решения уравнения (B.1)

Следуя работе [1], введем условие

$$A)\quad \frac{\partial^i K(t,s)}{\partial t^i}\mid_{s=t}= 0,\ i=0,1,\ldots,n-1,\ \frac{\partial^n K(t,s)}{\partial t^n}\mid_{s=t}\sim at^m,\ t\to 0+,\ a\neq 0,\ m\geq 0,$$

тогда на основании формулы Тейлора

$$K(t,s)=(t-s)^nQ(t,s),\ \frac{\partial^n K(t,s)}{\partial t^n}\mid_{s=t} n!Q(t,t)\sim at^m,\ t\to 0+.$$

Будем искать решение уравнения (1.2) в виде

$$x(t)=c_0\delta(t)+c_1\delta^{'}(t)+\ldots+c_{n+m}\delta^{(n+m)}(t)+u(t)\theta(t), \tag{2.1}$$

где $u(t)\in C[0,t_0]$, t_0- достаточно мало. Подставим (2.1) в (1.2) и выполним все тождественные преобразования в соответствии с формулами из примеров 1 и 2, после этого приравняем друг другу регулярные составляющие и потребуем обращения в нуль сингулярной составляющей. Тогда для определения функции $u(t)$ получаем уравнение

$$\int_0^t K(t,s)u(s)ds=F(t,\vec{c}) \tag{2.2}$$

с правой частью

$$F(t,\vec{c})=f(t)-\sum_{j=0}^{n+m}(-1)^j\frac{\partial^j K(t,0)}{\partial s^j}c_j,$$

при этом коэффициенты c_j удовлетворяют однородной системе линейных уравнений

$$A\vec{c}=A\begin{pmatrix} c_{n+m}\\ c_{n+m-1}\\ \cdot\\ \cdot\\ c_0\end{pmatrix}=0, \tag{2.3}$$

элементы матрицы A размера $m\times(n+m+1)$ вычисляются по формуле

$$a_{ij}=\begin{cases} 0, & j>i\\ (-1)^{n+(i-j)}\sum_{l=0}^{n+(i-j)}C_{n+m-j-l}^{m-i}C_{n+m-(j-1)}^{l}\frac{\partial^{n+(i-j)}K(0,0)}{\partial t^{n+(i-j)-l}\partial s^l}, & j\leq i.\end{cases}$$

В силу условия A) уравнение(2.2) эквивалентно интегральному уравнению Вольтерра 3-го рода

$$n!Q(t,t)u(t)+\int_0^t\frac{\partial^{n+1}K(t,s)}{\partial t^{n+1}}u(s)ds=F^{(n+1)}(t,\vec{c}) \tag{2.4}$$

при выполнении условий разрешимости $F^{(i)}(0,\vec{c}) = 0$, $i = 0,1,\ldots,n+m$, которые выпишем в векторно-матричном виде

$$B\vec{c} = \begin{pmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ \cdot \\ \cdot \\ f^{(n+m)}(0) \end{pmatrix}, \tag{2.5}$$

здесь B- квадратная матрица размера $(n+m+1)$ с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 0, & j > i+m \\ (-1)^{n+m-(j-1)} \frac{\partial^{n+m+(i-j)} K(0,0)}{\partial t^{i-1} \partial s^{n+m+1-j}}, & j \le i+m. \end{cases}$$

Если система уравнений (2.3)-(2.5) окажется неразрешимой относительно c_i, то решений вида (2.1) не существует. Однако, если выполнено условие

$$B) \qquad \frac{\partial^{i+j} K(0,0)}{\partial t^i \partial s^j} = \begin{cases} 0, & \text{при } 0 \le i+j \le n+m-1, \\ \neq 0, & \text{при } i+j = n+m, \end{cases}$$

то матрица A будет нулевой, а B окажется нижней треугольной квадратной размера $(n+m+1)$ с определителем

$$(-1)^{\frac{(n+m)(n+m+1)}{2}} \prod_{i=0}^{n+m} \frac{\partial^{n+m} K(0,0)}{\partial t^i \partial s^{n+m-i}} \neq 0.$$

Таким образом доказана следующая

Лемма 1 *Если выполнены условия A) и B), то система уравнений (2.5) однозначно разрешима.*

Теорема 1 *Пусть выполнены условия A), B), тогда уравнение (1.2) имеет единственное решение вида (2.1).*

Перепишем уравнение (2.4) в виде

$$u(t) + \int_0^t L(t,s)u(s)ds = \frac{F^{(n+1)}(t,\vec{c})}{n!Q(t,t)}, \tag{2.6}$$

где введено обозначение

$$L(t,s) = \frac{1}{n!Q(t,t)} \frac{\partial^{n+1} K(t,s)}{\partial t^{n+1}}.$$

При выполнении условия B) для функции $K(t,s)$ справедливо представление

$$K(t,s)=\sum_{i+j=n+m}a_{ij}t^is^j+O((t+s)^{n+m+1}),$$

тогда при $0\le s\le t\le t_0$ существует константа $c>0$ такая, что

$$\mid L(t,s)\mid\le\frac{c}{t}. \tag{2.7}$$

Пусть вектор $\vec{c}-$ решение системы (2.5). Подставим $\vec{c}$ в (2.2) и с учетом условия B) перепишем правую часть уравнения (2.2) в виде

$$F(t,\vec{c})=f(t)-\sum_{i=0}^{n+m}f^{(i)}(0)\frac{t^i}{i!}-\sum_{j=0}^{n+m}(-1)^j(\frac{\partial^jK(t,0)}{\partial s^j}-\sum_{i=n+m-j}^{n+m}\frac{\partial^{i+j}K(0,0)}{\partial s^j\partial t^i}\frac{t^i}{i!})c_j,$$

при этом $F(t,\vec{c})=O(t^{n+m+1})$, соответственно $F^{(n+1)}(t,\vec{c})=O(t^{m+1})$ и в силу условия A) $\frac{F^{(n+1)}(t,\vec{c})}{n!Q(t,t)}=O(t)$.

Решение уравнения (2.6) будем искать в виде

$$u(t)=\sum_{i=1}^{N}u_it^i+V(t),$$

где u_i- коэффициенты формального решения, тогда для $V(t)$ получим уравнение

$$V(t)+\int_0^tL(t,s)V(s)ds=b(t),$$

здесь

$$b(t)=\frac{F^{(n+1)}(t,\vec{c})}{n!Q(t,t)}-\sum_{i=1}^{N}(u_it^i+\int_0^tL(t,s)u_is^ids).$$

Поскольку ядро $\frac{c}{t}$, $c>0$, имеет резольвенту $\frac{c}{t}(\frac{t}{c})^c$, то в силу оценки (2.7) ядро $L(t,s)$ при достаточно малом t_0 также имеет резольвенту $R(t,s)$ с оценкой

$$\mid R(t,s)\mid\le\frac{c}{t}(\frac{t}{c})^c,$$

но тогда при достаточно большом N интеграл $\int_0^tR(t,s)b(s)ds$ сходится и функция $V(t)$ определяется по формуле

$$V(t)=b(t)+\int_0^tR(t,s)b(s)ds.$$

Замечание 2 *Условие B) можно ослабить за счет усиления ограничений на функцию $f(t)$ (см. работу [3]). Изложенные результаты позволяют строить обобщенные решения вырожденных дифференциальных уравнений [4] с непостоянным оператором в главной части.*

References

[1] **Владимиров В.С.** Уравнения математической физики . - М.: Наука, 1981.

[2] **Мышкис А.Д.** Новое доказательство существования обобщенного решения у интегрального уравнения первого рода общего вида. - Сб. Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям., Фрунзе, "Илим", 1983.

[3] **Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н.** О разрешимости интегральных уравнений Вольтерра первого рода в пространстве обобщенных функций. - Сб. "Оптимизация, управление, интеллект.", Иркутск, 2000, Вып. 5.

[4] **Фалалеев М.В.** Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах. - СМЖ, 2000, N5.