



Ключевую роль в теории формирования волокон занимают гидродинамические модели, описываемые нелинейными краевыми задачами пограничного слоя. Настоящая монография ставит своей целью рассмотрение таких краевых задач с привлечением современных методов функционального анализа, гидродинамики и вычислительной математики. Разработан аналитический метод построения решений в одномерных стационарных моделях с краевым условием. Предложен численный метод относительно ошибки которого при определении характеристик теплового потока для плоской пластины не зависят от числа Рейнольдса. Впервые доказаны теоремы существования решений краевых задач, возникающих в физико-технических моделях полимеров, с использованием теоремы Коши-Ковалевской и принципа неподвижной точки Шаудера. С помощью общих теорем существования решений нелинейных уравнений с векторным параметром доказано существование решений краевой задачи из теории погранслоя на неограниченном полуинтервале. Монография рассчитана на специалистов в области промышленной математики, ее приложений в химических технологиях, в теории материалов, а также научных работников и инженеров, интересующихся нелинейными краевыми задачами.

Алёна Дрегла

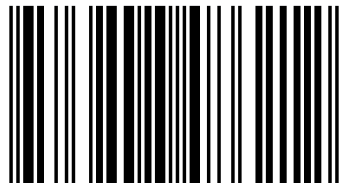
Краевые задачи в моделировании формования волокон

аналитические и численные методы



Алёна Дрегла

А.И.Дрегла окончила магистратуру университета Орадя в 2000 г. под рук. проф. M.I. Ursul в области топологической алгебры. С 2001 г. по 2006 г. преподавала в Дублинском технологическом институте, занималась математическим моделированием в теории материалов в лаб. проф. L.J. Crane и проф. Г.И. Шишкина. С 2007 г. работает в Иркутском госуниверситете.



978-3-8484-8621-2

Алёна Дрегла

**Краевые задачи в моделировании формирования
волокон**

Алёна Дрегла

**Краевые задачи в
моделировании формирования
волокон
аналитические и численные методы**

LAP LAMBERT Academic Publishing

Impressum/Imprint (nur für Deutschland/only for Germany)

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek: Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Alle in diesem Buch genannten Marken und Produktnamen unterliegen warenzeichen-, marken- oder patentrechtlichem Schutz bzw. sind Warenzeichen oder eingetragene Warenzeichen der jeweiligen Inhaber. Die Wiedergabe von Marken, Produktnamen, Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen u.s.w. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutzgesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Coverbild: www.ingimage.com

Verlag: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Deutschland
Telefon +49 681 3720-310, Telefax +49 681 3720-3109
Email: info@lap-publishing.com

ДА: Иркутск, Иркутский Государственный Университет, 2012

Herstellung in Deutschland:
Schaltungsdienst Lange o.H.G., Berlin
Books on Demand GmbH, Norderstedt
Reha GmbH, Saarbrücken
Amazon Distribution GmbH, Leipzig
ISBN: 978-3-8484-8621-2

Только для России и стран СНГ

Библиографическая информация, изданная Немецкой Национальной Библиотекой. Немецкая Национальная Библиотека включает данную публикацию в Немецкий Книжный Каталог; с подробными библиографическими данными можно ознакомиться в Интернете по адресу <http://dnb.d-nb.de>.

Любые названия марок и брендов, упомянутые в этой книге, принадлежат торговой марке, бренду или запатентованы и являются брендами соответствующих правообладателей. Использование названий брендов, названий товаров, торговых марок, описаний товаров, общих имён, и т.д. даже без точного упоминания в этой работе не является основанием того, что данные названия можно считать незарегистрированными под каким-либо брендом и не защищены законом о брендах и их можно использовать всем без ограничений.

Изображение на обложке предоставлено: www.ingimage.com

Издатель: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Germany
Telefon +49 681 3720-310, Факс +49 681 3720-3109
Email: info@lap-publishing.com

Напечатано в России
ISBN: 978-3-8484-8621-2

АВТОРСКОЕ ПРАВО ©2012 принадлежат автору и LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG и лицензиарам
Все права защищены. Saarbrücken 2012

Оглавление

Список обозначений	8
Введение	11
1 Математические модели формирования волокна: аналитический обзор	18
1.1 Математические модели пограничного слоя, возникающего при формировании волокна	18
1.1.1 Формование волокна (технический аспект)	18
1.2 Уравнения пограничного слоя	20
1.3 Математическая модель формирования волокна в случае потока с аксиальной симметрией	24
1.3.1 Аксиальная симметрия погранслоя вдоль длинного тонкого цилиндра	25
1.3.2 Вывод краевой задачи с использованием преобразования Блазиуса	33
1.3.3 Решение сингулярной краевой задачи на полуоси	35
1.3.4 Краевая задача в моделировании теплового процесса в подвижном цилиндрическом волокне с аксисимметричным погранслоем	39
1.3.5 Теплопередача от движущегося волокна	43

1.3.6	Теплообмен на малых расстояниях от фильеры . .	45
1.3.7	Краевые задачи в теории охлаждения испарением в процессе формования стекловолокна	54
1.4	Модель испарения погранслоя неподвижного волокна в подвижном воздухе	56
2	Некоторые аналитические методы в теории моделиро- вания полимеров	60
2.1	Существование решений краевых задач в задачах с по- гранслоем	60
2.1.1	Некоторые сведения из нелинейного анализа . . .	61
2.1.2	Теоремы существования решений нелинейных краевых задач	63
2.2	Построение аналитических решений краевых задач . . .	71
2.2.1	Построение решений в виде рядов	74
2.2.2	Построение решений методом последовательных приближений	80
2.3	Построение точных решений краевых задач	81
2.3.1	Построение точного решения при линейном выбо- ре радиуса волокна	81
2.3.2	Разрешающее уравнение относительно функции тока и три точных параметрических семейства решений системы Блазиуса	83
3	Численное решение краевых задач, возникающих при моделировании формования волокна	87
3.1	Краевые задачи, возникающие при моделировании им- пульсного теплового пограничного слоя	87
3.1.1	Задача Блазиуса	89

3.1.2	Робастный метод для задачи Блазиуса	91
3.1.3	Краевая тепловая задача	98
	Заключение	103

Введение

Постановка задачи и ее актуальность

Настоящее исследование посвящено изучению краевых задач, возникающих при математическом моделировании процесса формирования волокна из расплава полимера. Кратко опишем суть процесса формирования волокна. Расплавленный полимер продавливается через сопло фильеры, охлаждается потоком воздуха и затем полимер затвердевает. В застывшем состоянии волокно наматывается на приемный валик со скоростью значительно превосходящей скорость продавливания (экструзии) полимера через сопло. Отметим, что по мере удаления от фильеры радиус волокна уменьшается, принимая стационарное значение. В конце технологического процесса готовое волокно наматывается на приемный валик. Сразу после выхода из фильеры полимер слегка набухает, а затем сжимается, как только скорость увеличивается до конечной скорости. В промышленных установках одновременно производится несколько сотен волокон. Математическое моделирование взаимодействия волокна и воздушных потоков является достаточно сложной задачей, соответствующие модели строились и исследовались в работах [24], [17]. На свойства волокна влияет совокупность таких факторов как скорость потока воздуха, поверхностное натяжение волокна в жидком состоянии, молекулярная структура полимера

и другие факторы [24], [17].

В статье [16] используется тот факт, что скорость потока вблизи поверхности цилиндра пропорциональна логарифму его расстояния от оси цилиндра. Этот логарифмический профиль позволил [16] решить задачу потока цилиндра в состоянии покоя более точно. Подобный логарифмический профиль использовался и ранее Сакиадисом [23]. Сакиадис вычислил решение уравнения Блазиуса и показал, что инвертирование граничных условий не обязательно ведет к инвертированию профиля скорости. Себан [25] и позднее Глауэрт [16] заметили, что ламинарный импульсный пограничный слой может быть описан безразмерно с помощью преобразования системы координат. Факт наличия малого ускорения установлен на основе Релеевского решения [20]. В статье [21] рассмотрен ламинарный подход к задаче формирования волокна используя безразмерный импульсный пограничный слой вдоль волокна с круглым сечением в аксиальном направлении, исследованы два типа граничных условий. Один тип называется квазиподобным решением и вычислен на полубесконечности, а другой тип – для непрерывно движущейся поверхности. Для обоих типов граничных условий разработаны разностные методы.

Полуаналитическое решение уравнений с погранслоем для несжимаемого потока с постоянными свойствами (т. е. не зависящими от температуры) указано в монографии [37], численные методы описаны в [22].

При построении и исследовании математических моделей эффективными оказалось сочетание классических методов гидродинамики, численных и аналитических приближенных методов решения нелинейных задач с сингулярностями. Особо отметим робастные разностные схемы Г. И. Шишкина [22], используемые и в наших работах [12],

[13]. В настоящей работе мы рассматриваем единичное волокно. Условия производства волокна, в особенности его затвердевание после выхода из сопла фильеры, оказывают наиболее существенное влияние на качество и характеристики готового волокна [8], [15]. Глубокое понимание процесса затвердевания волокна способствует улучшению его производства. Поэтому моделирование процесса формования имеет как теоретический, так и практический интерес, привлекая внимание многих математиков.

Исследуемые физико-технические модели

Рассматривая широкий спектр краевых задач, возникающих при математическом моделировании процесса формования волокна из расплава, можно обнаружить довольно много белых пятен и нерешенных проблем как с точки зрения теоретического обоснования уже используемых аналитических методов, так и с точки зрения вычислительных методов. Перечислим задачи, известные в литературе, посвященной теории и приложениям моделирования формования волокна, некоторые из которых впервые решаются в настоящей монографии.

1. Моделирование пограничного слоя в случае аксиальной симметрии волокна;
2. Вывод краевой задачи с использованием преобразования Блазиуса;
3. Решение сингулярной краевой задачи на полуоси;
4. Краевая задача в моделировании теплообмена в подвижном цилиндрическом волокне с аксисимметричным погранслоем;

5. Исследование существования решений краевых задач, возникающих при моделировании формования волокна.

Диапазон физико-технических моделей, связанных с формированием волокон, сводится к исследованию решений систем нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. В настоящей работе основное внимание уделяется математическим моделям, в которых исходные нелинейные модели, описываемые уравнениями в частных производных, мы сводим к обыкновенным дифференциальным уравнениям, для которых формулируются краевые задачи, исследуются вопросы существования их решений, построения точных и приближенных решений. В работе используются методы гидродинамики, методы нелинейного анализа и вычислительной математики. В данной работе численные расчеты с использованием адаптивных сеток являются точными в пределах погрешности входных данных и информативными, т.к. решение ищется строго в рамках пограничного слоя, учитываются такие сингулярности, как кромка (расчеты вблизи нуля, соответствующего соплу фильеры) и расчеты на бесконечности. В работах Г.И.Шишкина (см. библиографию в монографии [22]), используемых в данной работе, метод получил название робастного за счет устойчивости к такому важному параметру как вязкость.

Научная новизна настоящей монографии определяется следующими результатами, полученными автором.

1. Разработан аналитический метод построения решений в одномерных стационарных моделях с краевым условием. Установлена сходимость рядов в асимптотическом методе Глауэрта-Лайтхилла.
2. Для двумерных нелинейных систем Блазиуса построено разрешающее уравнение относительно функции тока и три точных решения.

3. Доказана теорема существования решения краевой задачи погранслоя. Доказана теорема существования и предложен численный метод решения нелинейной краевой задачи теории погранслоя.
4. Разработан численный метод для которого относительные ошибки теплового потока и сопротивления для плоской пластины, а также относительные ошибки компонент скоростей и температуры не зависят от числа Рейнольдса.
5. Впервые доказано существование решений краевых задач, возникающих в физико-технических моделях полимеров с использованием теоремы Коши-Ковалевской и принципа неподвижной точки Шаудера.
6. При помощи общих теорем существования решений нелинейных уравнений с векторным параметром доказано существование решений одной краевой задачи из теории погранслоя на неограниченном полуинтервале.

Монография состоит из введения, трех глав и заключения. **1-ая глава** носит вспомогательный характер и посвящена аналитическому обзору постановок краевых задач, возникающих при математическом моделировании процесса формирования волокон. Основное внимание уделено моделям, вытекающим из уравнения Навье-Стокса. Приведены вычисления автора по расчету сопротивления трению. **2-ая глава** посвящена построению аналитических решений нелинейных краевых задач Глауэрта и Лайтхилла и исследованию двумерных нелинейных систем, введенных Блазиусом. Доказана теорема существования для задач с погранслоем (двухточечной краевой задачи для дифференциального уравнения третьего порядка, частным случаем которого

является уравнение Блазиуса) с использованием теоремы Арцелла и принципа Шаудера. В этой же главе рассмотрены аналитические решения нелинейных систем в частных производных, введенные в 1954 году Глауэртом и Лайтхиллом [16]. Для указанной системы нелинейных уравнений в частных производных, введенной Глауэртом и Лайтхиллом построено точное решение с линейным выбором радиуса волокна. Кроме того в этом разделе изучены двухмерные нелинейные системы, введенные Блазиусом. Построено разрешающее уравнение относительно функции тока и три точных решения. Численное решение кривых задач, возникающих при моделировании пограничных слоев в формировании волокон рассмотрено в **3-ей главе**. Разработан робастный численный метод решения задачи Блазиуса позволяющий находить скорость, толщину погранслоя и коэффициент трения. Выполнены оценки глобальной ошибки для решения Блазиуса. Результаты автора, изложенные в монографии, опубликованы в работах [9] – [14], [28], [29], [34], [35].

Настоящее исследование выполнено при частичной поддержке Дублинского технологического института (Ирландия) и гранта компании Klüber Lubrication. Автор глубоко признателен профессору Daphne Gilbert (Дублинский технологический институт) и профессору Н.А. Сидорову (Иркутский госуниверситет) за поддержку и внимание. Монография выполнена в соответствии с темой НИР “Алгоритмический анализ сингулярных моделей” (номер госрегистрации НИР: 01200804682), развиваемой на кафедре дифференциальных и интегральных уравнений Иркутского государственного университета, научный руководитель д.ф.-м.н., профессор Н. А. Сидоров. Работа частично поддержана Федеральной целевой программой “Научные и

научно-педагогические кадры инновационной России” Минобрнауки
П696.