

Кратные интегралы в системе MAPLE

Серия: Информационные системы и логика

Третий выпуск

О.А. Романова З.М. Трачевская

Иркутск 2005

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|---|-----------|
| 1. Двойной интеграл..... | 3 |
| 1.1. Свойства двойных интегралов..... | 5 |
| 1.2. Теорема Фубини о приведении кратного интеграла к повторному..... | 6 |
| 1.3. Изменение порядка интегрирования..... | 12 |
| 1.4. Замена переменных в двойном интеграле..... | 14 |
| 1.5. Двойной интеграл в полярных координатах..... | 16 |
| 2. Тройной интеграл..... | 20 |
| 2.1. Вычисление тройного интеграла..... | 21 |
| 2.2. Замена переменных в тройном интеграле..... | 22 |
| 2.3. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах..... | 25 |
| 3. Математическая система MAPLE..... | 31 |
| 3.1. Обзор интерфейса..... | 32 |
| 3.2. Меню системы Maple..... | 34 |
| 3.3. Начальные навыки работы..... | 35 |
| 4. 2D-графика в MAPLE..... | 37 |
| 4.1. Основная функция двумерной графики – plot..... | 38 |
| 4.2. Параметры..... | 40 |
| 4.3. Управление стилем и цветом линий 2D-графиков..... | 42 |
| 4.4. Графики функций с разрывами..... | 43 |
| 4.5. Построение графиков неявных функций..... | 44 |
| 4.6. Параметрическая графика..... | 46 |
| 4.7. Построение графиков в различных системах координат..... | 48 |
| 4.8. Анимация 2D графиков..... | 50 |
| 4.9. Совмещение графиков..... | 52 |
| 5. 3D-графика в MAPLE..... | 53 |
| 5.1. Особенности применения функции plot3d..... | 54 |
| 5.2. Простейшее построение 3D-поверхности с разным стилем..... | 56 |
| 5.3. Неявно заданные 3-D поверхности..... | 58 |
| 5.4. Построение графиков параметрически заданных поверхностей..... | 62 |
| 5.5. Построение ряда трехмерных фигур..... | 63 |
| 6. Основы интегрирования в MAPLE..... | 64 |
| 6.1. Двойные интегралы..... | 65 |
| 6.2. Тройные интегралы..... | 66 |
| 6.3. Другие координатные системы..... | 67 |
| 7. Задачи на вычисление двойных и тройных интегралов..... | 68 |
| 7.1. Задача 1..... | 69 |
| 7.2. Задача 2..... | 71 |
| 7.3. Задача 3..... | 73 |
| 7.4. Задача 4..... | 76 |
| 7.5. Задача 5..... | 80 |
| 8. Литература..... | 83 |

1. Двойной интеграл

Мы будем рассматривать функции $f(x, y)$, определенные на квадратуемом (т.е. имеющем площадь) множестве D . Изложение теории определенного интеграла начинается с понятия разбиения T отрезка $[a, b]$. По аналогии, определим разбиение T квадратуемого множества D , как представление множества D в виде объединения конечного числа квадратуемых частей,

$$D = \bigcup_{i=1}^n D_i.$$

Практически всегда D представляет собой криволинейную трапецию или конечное объединение криволинейных трапеций. Можно считать, что и разбиение D на части D_i определяется с помощью непрерывных кривых, т.е. все D_i - также криволинейные трапеции или их конечные объединения).

В одномерном случае мы рассматривали длины частей разбиения $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$. В двумерном случае обобщение понятия длины Δx_i будет площадь ΔS_i . Однако нам потребуется также и понятие диаметра D_i , $\text{diam}(D_i)$. Эта величина определяется как точная верхняя грань расстояния между точками множества D_i .

Определим диаметр $d(T)$ разбиения T как наибольший из диаметров $\text{diam}(D_i)$ частей этого разбиения.

Далее, как и в одномерном случае, выберем точки $N_i \in D_i$ (было: $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$). Пусть N_i имеет координаты (ξ_i, η_i) . Важную роль в дальнейшем будет играть понятие интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sigma(f, T, \{N_i\}).$$
 Так же, как в одномерном случае, эта величина имеет простой

геометрический смысл. Интегральная сумма $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ равна объему тела, состоящего из цилиндров с высотой $f(\xi_i, \eta_i)$ (для простоты считаем, что $f(x, y) \geq 0$) и основаниями - D_i .

Определение

Пусть $f(x, y)$ - ограниченная на квадратуемом множестве D функция. Пусть $I \in \mathbb{R}$. Если $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall T: d(T) < \delta \quad \forall N_i \quad |\sigma(f, T, \{N_i\}) - I| < \varepsilon$, то будем говорить, что f - интегрируемая на D функция и $I = \iint_D f(x, y) dx dy$.

Критерий существования определенного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ формируется в терминах сумм

Дарбу вида $s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$, $S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$, где $m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$, т.е. m_i - нижняя грань, а M_i - верхняя грань значений $f(x)$ при $x \in [x_{i-1}, x_i]$.

Аналогично, обозначим, для ограниченной на D функции

$$f(N), \quad m_i = \inf_{N \in D} f(N), \quad M_i = \sup_{N \in D} f(N) \quad (\text{эти числа существуют ввиду предполагаемой})$$

ограниченности $f(N)$ на D и, значит, на всех D_i) и определим суммы Дарбу равенствами

$$s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i, \quad S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i.$$

Эти величины представляют собой объемы тел, состоящих из цилиндров с основаниями D_i и высотами, соответственно m_i и M_i . Ясно, что при любом выборе $\{N_i\}$ $s(T) \leq \sigma(f, T, \{N_i\}) \leq S(T)$.

Рассмотрим критерий интегрируемости.

Теорема 1

Ограниченная $f(x, y)$ интегрируема на квадратуемом

$$D \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta \quad \forall T \quad d(T) < \delta \quad S(T) - s(T) < \epsilon$$

Из этого критерия следует теорема.

Теорема 2

Если $f(x, y)$ непрерывна на квадратуемом множестве D , то $f(x, y)$ интегрируема на этом множестве.

1.1. Свойства двойных интегралов

Свойство 1

Если f_1, f_2 - интегрируемые на D функции, а α_1, α_2 - числа, то

$$\iint_D (\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) dx dy = \alpha_1 \iint_D f_1 dx dy + \alpha_2 \iint_D f_2 dx dy$$
. Иными словами, интеграл - линейный функционал.

Свойство 2

Если $f(x, y)$ - интегрируема на $D = D_1 \cup D_2$, причем если область D при помощи кривой площади нуль разбивается на две связные и не имеющие общих внутренних точек области D_1 и D_2 , то
$$\iint_{D_1 \cup D_2} f dx dy = \iint_{D_1} f dx dy + \iint_{D_2} f dx dy$$
.

Свойство 3

Если $f(x, y)$ - интегрируемая на D функция и $f(x, y) \geq 0$, то
$$\iint_D f dx dy \geq 0$$
.

Свойство 4

Если f_1, f_2 - интегрируемые на D и $f_1 \geq f_2$, то
$$\iint_D f_1 dx dy \geq \iint_D f_2 dx dy$$
.

Свойство 5

Если $f(x, y)$ - интегрируемая на D функция, то $|f|$ - также интегрируемая, причем

$$\left| \iint_D f dx dy \right| \leq \iint_D |f| dx dy.$$

Свойство 6

Если $f(x, y)$ - интегрируемая на D функция, причем $m \leq f \leq M$, где m, M - ограничивающие множество значений $f(x, y)$ числа, то
$$m \cdot S(D) \leq \iint_D f dx dy \leq M \cdot S(D)$$
 ($S(D)$ - площадь D), т.е.

$\exists \mu, m \leq \mu \leq M : \iint_D f dx dy = \mu \cdot S(D)$. Если, кроме того, $f(x, y)$ - непрерывна на D , то

$$\exists (\xi, \eta) \in D : \iint_D f dx dy = f(\xi, \eta) \cdot S(D).$$

Можно доказать, что если $f(x, y)$ - непрерывная на D функция, то $f(x, y)$ - интегрируема на D .

Свойство 2 позволяет утверждать, что если $f(x, y)$ имеет разрывы на D лишь вдоль конечного числа непрерывных линий, разбивающих D на квадратируемые области, то $f(x, y)$ - интегрируема на D , т.к., по свойству 2, интеграл по D есть просто сумма конечного числа интегралов по полученным частям D_i (где $f(x, y)$ - непрерывна и, значит, интегрируема).

1.2. Теорема Фубини о приведении кратного интеграла к повторному

Теорема 1 (Фубини)

Рассмотрим произвольную ограниченную замкнутую квадрируемую область D с границей Γ . Пусть выполнены следующие условия:

1) область D такова, что любая прямая, параллельная оси Oy , пересекает границу Γ по целому отрезку $[y_1(x), y_2(x)]$ либо не более чем в двух точках, ординаты которых есть $y_1(x)$ и $y_2(x)$, где $y_1(x) \leq y_2(x)$;

2) функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и для любого $x \in [a, b]$ допускает существование однократного интеграла $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ ($[a, b]$ - проекция области D на ось Ox). Тогда существует

повторный интеграл $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Замечание

В теореме можно поменять ролями x и y , т.е. можно предположить, что выполнены следующие два условия:

1) область D такова, что любая прямая, параллельная оси Ox , пересекает границу Γ по целому отрезку $[x_1(y), x_2(y)]$ либо не более чем в двух точках, ординаты которых есть $x_1(y)$ и $x_2(y)$, где $x_1(y) \leq x_2(y)$;

2) функция $f(x, y)$ интегрируема в области D и для любого $y \in [c, d]$ допускает существование однократного интеграла $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ ($[c, d]$ - проекция области D на ось Oy). Тогда существует

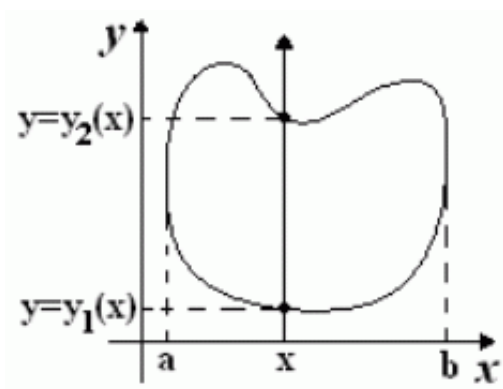
повторный интеграл $\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ и справедливо равенство

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

Доказательство теоремы

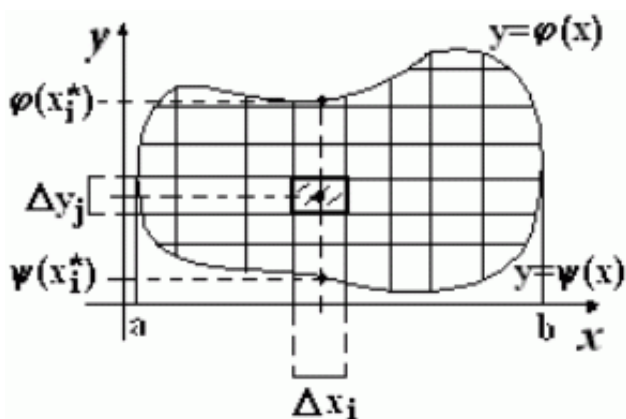
Если область D можно записать неравенствами:

$$D: \begin{cases} a \leq x \leq b \\ y_1(x) \leq y \leq y_2(x) \end{cases}, \text{ то } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$



Справа стоит повторный интеграл, в котором внутренний интеграл вычисляется по переменной y в предположении, что $x = \text{const}$; результатом вычисления внутреннего интеграла является некоторая функция $\Phi(x)$. Затем вычисляется внешний интеграл от $\Phi(x)$ по переменной x в постоянных пределах; в результате получается число.

Вывод формулы:



Т.к. $\iint_D f(x, y) dx dy$ не зависит от способа разбиения области D на части, то сделаем разбиение горизонтальными и вертикальными прямыми на прямоугольные элементарные части. Всего элементарных частей будет: $n = n_1 \times n_2$, n_1 - количество частей по оси OX , n_2 - количество частей по оси OY . $\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ - площадь элементарной части.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \max \Delta y_j \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} f(x_i^*, y_j^*) \cdot \Delta x_i \Delta y_j =$$

{выполним суммирование сначала по j , т.е. по вертикальным элементарным частям при фиксированном x_i , затем по i , т.е. просуммируем массы вертикальных полосок}

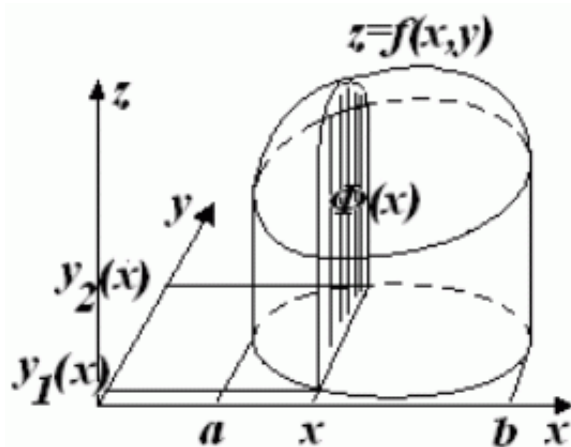
$$\begin{aligned}
&= \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_1} \underbrace{\left(\lim_{\max \Delta y_j \rightarrow 0} \sum_{j=1}^{n_2} f(x_i^*, y_i^*) \Delta y_j \right) \Delta x_i}_{\substack{\varphi(x_i^*) \\ \int_{\psi(x_i^*)}^{\varphi(x_i^*)} f(x_i^*, y) dy = \Phi(x_i^*)}} = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{n_1} \Phi(x_i^*) \Delta x_i = \\
&= \int_a^b \Phi(x) dx = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy \right)}_{x=\text{const}} dx
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $\varphi(x) = y_2(x)$; $\psi(x) = y_1(x)$.

Смысл формулы (1) можно также проиллюстрировать на объеме цилиндрида, зная формулу для вычисления объема тела с известной площадью поперечного сечения:

$$\Phi(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy - \text{площадь поперечного сечения,}$$

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \Phi(x) dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

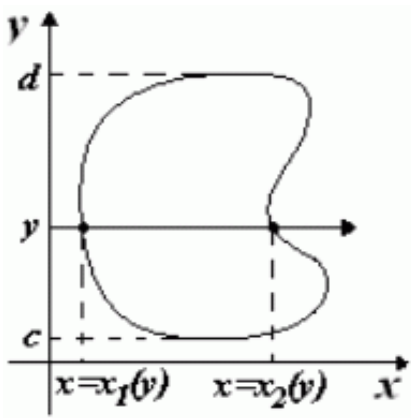


Доказательство замечания

Если область D - правильная в направлении оси OX, то она записывается неравенствами:

$$D: \begin{cases} c \leq y \leq d \\ x_1(y) \leq x \leq x_2(y) \end{cases},$$

$$\text{Тогда } \iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$



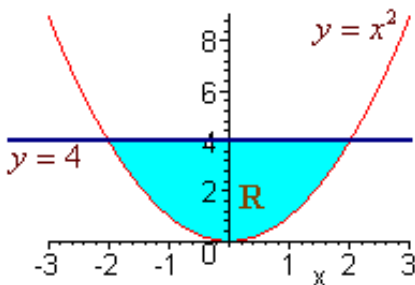
Справа стоит повторный интеграл, в котором внутренний интеграл вычисляется по переменной x в предположении, что $y = \text{const}$; результатом вычисления внутреннего интеграла является некоторая функция $\Psi(y)$. Затем вычисляется внешний интеграл от $\Psi(y)$ по переменной y в постоянных пределах; в результате получается число.

Пример 1

Найти двойной интеграл от $f(x, y) = 6x^2 + 2y$ по множеству D , где D - область между $y = x^2$ и $y = 4$.

Решение

Пределы интегрирования определены как x^2 и 4. Область D лежит в пределах от $x = -2$ слева до $x = 2$ справа по оси абсцисс:



Проинтегрируем:

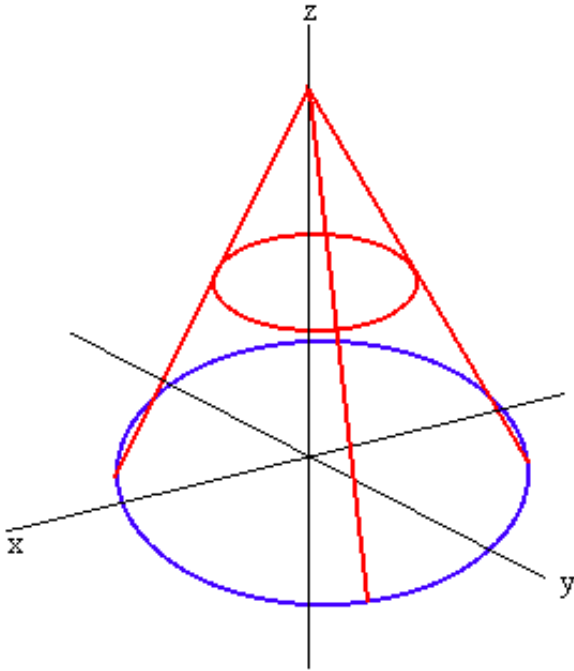
$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \int_{x^2}^4 (6x^2 + 2y) dy dx &= \int_{-2}^2 \left[6x^2 y + y^2 \right]_{x^2}^4 dx = \int_{-2}^2 [(24x^2 + 16) - (6x^4 + x^4)] dx = \\ &= \left[8x^3 + 16x - \frac{7}{5} x^5 \right]_{-2}^2 = 102,4 \end{aligned}$$

Пример 2

Найти объем фигуры ограниченной поверхностью конуса $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ и плоскостью Oxy .

Решение

Искомая фигура выглядит следующим образом:



Область D определяется окружностью в плоскости Oxy. Найдем ее уравнение полагая $z = 0$.

$$0 = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Решаем его относительно y :

$$y = \pm\sqrt{16 - x^2}$$

Это будут нижний и верхний внутренние пределы интегрирования. Найдем внешние пределы интегрирования следующим образом:

$$-4 < x < 4$$

Искомый интеграл имеет вид:

$$\int_{-4}^4 \int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} (4 - \sqrt{x^2 + y^2}) dy dx$$

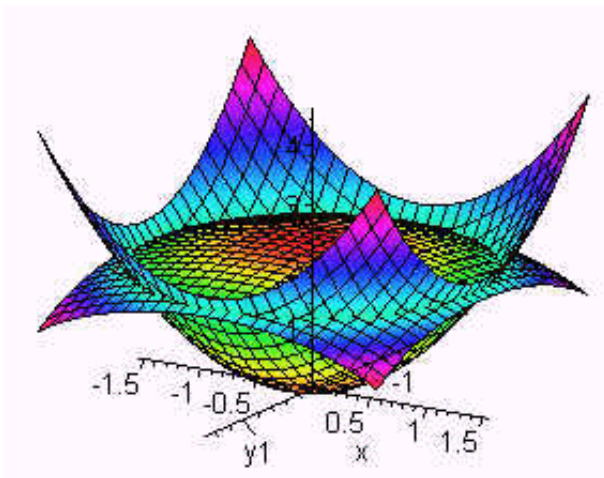
Полученный результат будет равным:

$$V = 64 \frac{\pi}{3}$$

Пример 3

Найти и вычислить двойной интеграл, который описывает объем фигуры, ограниченной сферой $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ сверху и параболоидом $z = x^2 + y^2$ снизу.

Решение



Данная иллюстрация показывает, что искомая фигура имеет вид диска, лежащего внутри окружности, по которой пересекаются две поверхности.

Заключаем, что

$$x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 = 6$$

или

$$x^2 + y^2 + (x^2 + y^2)^2 - 6 = 0$$

Решаем данное квадратное уравнение относительно $x^2 + y^2$

$$(x^2 + y^2 - 2)(x^2 + y^2 + 3) = 0$$

Единственным положительным решением данного уравнения будет:

$$x^2 + y^2 = 2$$

Разрешаем его относительно y

$$y = \pm\sqrt{2 - x^2}$$

$$\text{и } -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$$

Т.о. объем между двумя поверхностями будет равен двойному интегралу от функции двух переменных, равной разности значений функций на верхней поверхности минус значения функции на нижней поверхности:

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (\sqrt{6-x^2-y^2} - (x^2 + y^2)) dy dx$$

Вычисляем интеграл и получаем

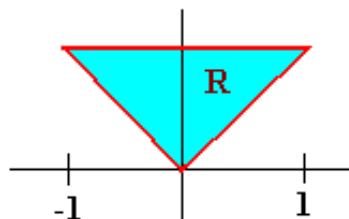
$$V = 7,74$$

1.3. Изменение порядка интегрирования

Если область интегрирования ограничена слева функцией $x = h_1(y)$ и справа функцией $x = h_2(y)$, а снизу и сверху $y = c$ и $y = d$ соответственно, то двойной интеграл "dxdy" можно найти сначала проинтегрировав по x , а затем по y . Иногда будет целесообразным изменить порядок интегрирования.

Пример 4

Найти двойной интеграл от функции $f(x, y) = 3y$ по области R : треугольник с вершинами в точках $(-1, 1)$, $(0, 0)$ и $(1, 1)$.



Решение

Если сначала мы попытаемся проинтегрировать функцию по y , то придется разделить область интегрирования на две составляющие ее области и взять два интеграла. Вместо этого, можно сначала проинтегрировать по x . Таким образом, данная область будет ограничена слева $x = -y$ и справа $x = y$. Пределы интегрирования по y будут $y = 0$ и $y = 1$ соответственно. Интеграл

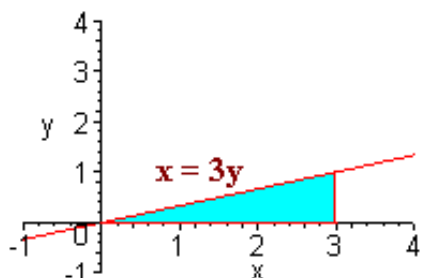
выглядит следующим образом:
$$\int_0^1 \int_{-y}^y 3y dx dy = \int_0^1 [3xy]_{-y}^y dy = \int_0^1 6y^2 dy = [2y^3]_0^1 = 2.$$

Пример 5

Вычислить интеграл
$$\int_0^1 \int_{3y}^3 e^{x^2} dx dy$$

Решение

Интеграл от e^{x^2} не вычисляется в элементарных функциях. Поэтому изменим порядок интегрирования. Область интегрирования изображена на рисунке:



Сверху область ограничена $y = 1/3x$ и снизу $y = 0$. Вычисляем двойной интеграл сначала по y , а затем по x :

$$\int_0^3 \int_0^{x/3} e^{x^2} dy dx$$

e^{x^2} является константой по отношению к y . Поэтому:

$$\int_0^3 \left[e^{x^2} y \right]_0^{x/3} dx = \int_0^3 \frac{x}{3} e^{x^2} dx$$

Данный интеграл вычисляем заменой переменных: $u = x^2$ и $du = 2x dx$:

$$\frac{1}{6} \int_0^9 e^u du = \left[\frac{1}{6} e^u \right]_0^9 = \frac{1}{6} e^9 - \frac{1}{6}$$

1.4. Замена переменных в двойном интеграле

При вычислении интегралов часто бывает удобно сделать замену переменных

$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, где $x(u, v)$, $y(u, v)$, $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial x}{\partial v}(u, v)$, $\frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$ -

непрерывны в некоторой области $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Впоследствии мы будем часто писать просто $\frac{\partial x}{\partial u}$

вместо $\frac{\partial x}{\partial u}(u, v)$ и т.п. и, кроме того, говорить при выполнении вышеупомянутых условий, что x и y - непрерывно дифференцируемые в Δ функции.

Пусть при этом формулы $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ задают взаимно-однозначное отображение областей: $D \leftrightarrow \Delta$ $(x, y) \in D$, $(u, v) \in \Delta$. Кроме того, не стремясь к минимальности условий, потребуем, чтобы всюду на области Δ

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \text{ не равнялся } 0.$$

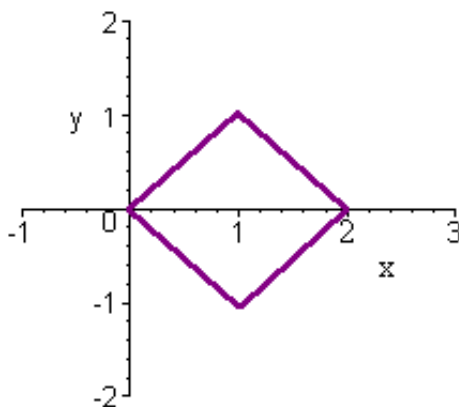
Теорема 1

При сформулированных выше условиях для непрерывной на D функции $f(x, y)$ справедливо

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{\Delta} f(x(u, v), y(u, v)) |J| du dv.$$

Пример 6

Используя необходимую замену переменных, найти объем, ограниченный сверху $z = (x - y)^2$, снизу - осью Ox , на параллелограмме с вершинами $(0,0)$, $(1,1)$, $(2,0)$, and $(1,-1)$



Решение

Найдем уравнения четырех прямых, составляющих параллелограмм

$$y = x \quad y = x - 2 \quad y = -x \quad y = -x + 2$$

$$\text{или } x - y = 0 \quad x - y = 2 \quad x + y = 0 \quad x + y = 2$$

Область задана следующими неравенствами:

$$0 < x - y < 2 \text{ и } 0 < x + y < 2.$$

Произведем замену переменных:

$$x(u, v) = u - v, y(u, v) = u + v$$

Матрица Якобиана:

$$J = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \frac{1}{J} = 2.$$

Область задана неравенствами:

$$0 < x < 2 \text{ и } 0 < y < 2,$$

а функция z уравнением $z = u^2$.

Получаем двойной интеграл:

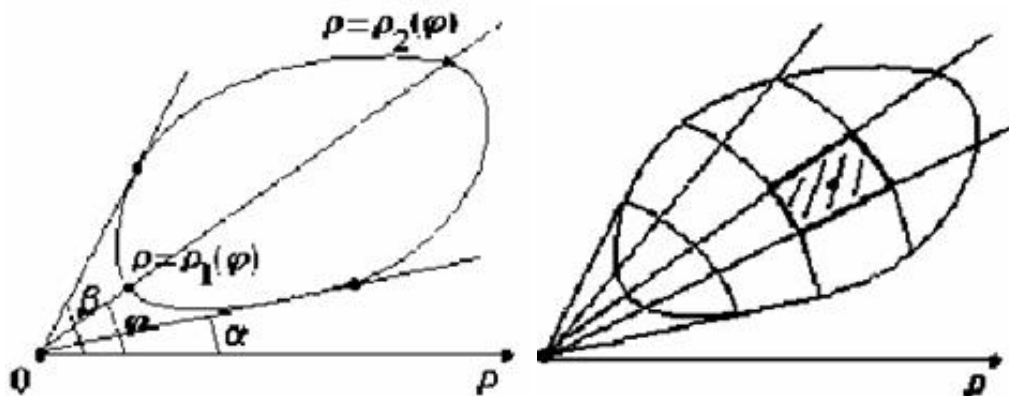
$$\int_0^2 \int_0^2 u^2 \left(\frac{1}{2} \right) du dv = \int_0^2 \left[\frac{u^3}{6} \right]_0^2 dv = \int_0^2 \frac{4}{3} dv = \frac{8}{3}.$$

1.5. Двойной интеграл в полярных координатах

Пусть область D записывается системой неравенств в полярных координатах:

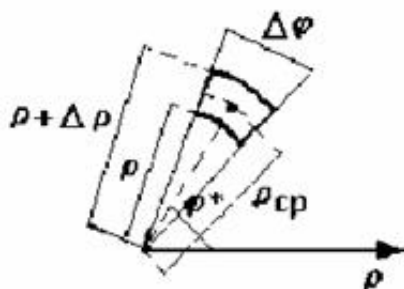
$$D: \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi) \end{cases}$$

Такая область называется правильной в полярной системе координат, если каждый луч, выходящий из полюса, пересекает границу области не более, чем в 2-х точках.



По определению $\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*) \cdot \Delta S_k$.

Т. к. значение двойного интеграла не зависит от способа разбиения области D на элементарные части, то сделаем это разбиение координатными линиями полярной системы координат (лучами из полюса и концентрическими окружностями).



$$\Delta S = \frac{1}{2}(\rho + \Delta \rho)^2 \Delta \varphi - \frac{1}{2}\rho^2 \Delta \varphi = \left(\rho + \frac{1}{2}\Delta \rho\right) \Delta \rho \Delta \varphi = \rho_{cp} \Delta \rho \Delta \varphi,$$

$$f(x^*, y^*) = \begin{cases} x^* = \rho_{cp} \cos \varphi^* \\ y^* = \rho_{cp} \sin \varphi^* \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{т.к. точку } (x^*, y^*) \text{ можно} \\ \text{выбирать произвольно} \end{matrix} \quad \left. \vphantom{\begin{matrix} x^* \\ y^* \end{matrix}} \right\} = f(\rho_{cp} \cos \varphi^*, \rho_{cp} \sin \varphi^*)$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{\substack{\text{по всем} \\ \text{частям}}} f(\rho_{cp} \cos \varphi^*, \rho_{cp} \sin \varphi^*) \cdot \rho_{cp} \Delta \varphi \Delta \rho =$$

$$= \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \underbrace{\rho d\rho d\varphi}_{\substack{\text{элемент полярных} \\ \text{координат}}} = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho$$

Переведенный в полярные координаты двойной интеграл сведен к повторному по имеющейся записи области D неравенствами для переменных φ и ρ . В результате получаем формулу для вычисления двойного интеграла в полярных координатах:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho.$$

Обратите внимание, что в правой части формулы присутствует множитель ρ - это якобиан (определитель Якоби) преобразования, который находится следующим образом:

$$I = \begin{vmatrix} x'_\rho & x'_\varphi \\ y'_\rho & y'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \varphi + \rho \sin^2 \varphi = \rho$$

Пример 7

Найти $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Решение

I - это несобственный интеграл, и прежде всего следует установить его сходимость. По определению, $s(T) = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i$, $S(T) = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i$. Первый из интегралов - собственный, второй - сходится по 1-й теореме о сравнении, т.к. при $x \geq 1$ справедливы неравенства

$$x^2 \geq x \Rightarrow -x^2 \leq -x, \quad e^{-x^2} \leq e^{-x}, \quad \text{а } \int_1^{\infty} e^{-x} dx, \text{ очевидно, сходится.}$$

Обозначим $I_R = \int_0^R e^{-x^2} dx$ (очевидно, $I_R \rightarrow I$, $R \rightarrow \infty$). Тогда, поскольку обозначение переменной интегрирования можно выбрать произвольным,

$$I_R^2 = I_R \cdot I_R = \int_0^R e^{-x^2} dx \cdot \int_0^R e^{-y^2} dy = \iint_{S_R} e^{-x^2-y^2} dx dy, \text{ где } S_R - \text{квадрат, а } C_R, \quad C_{\sqrt{2}R} - \text{четверти круга,}$$

соответственно, радиусов R и $\sqrt{2}R$. Т.к. $e^{-x^2-y^2} \geq 0$, то по свойствам 2 и 3 двойного интеграла

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy \leq I_R^2 \leq \iint_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

В интеграле $\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy$ перейдем к полярным координатам:

$$\iint_{C_R} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{\pi/2} d\phi \int_0^R e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^R e^{-r^2} \frac{1}{2} d(r^2) = \frac{\pi}{4} \left(-e^{-r^2} \Big|_0^R \right) = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}).$$

Аналогично, $\iint_{C_{\sqrt{2}R}} e^{-x^2-y^2} dx dy = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$ и $\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq I_R^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2})$.

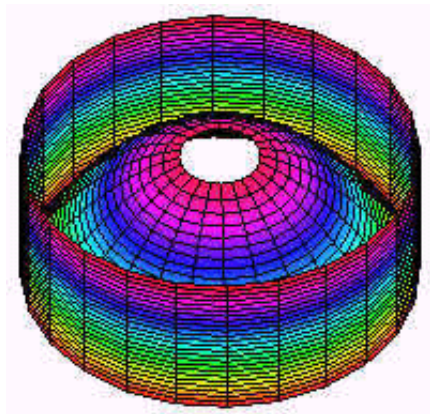
При стремлении $R \rightarrow \infty$ получаем, что $\lim_{R \rightarrow \infty} I_R^2 = \frac{\pi}{4}$, т.е. $I^2 = \frac{\pi}{4}$, $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Пример 8

Найти объем части параболоида $z = 9 - x^2 - y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

Решение

Поверхность выглядит следующим образом:



В данный пример целесообразно будет использовать полярные координаты. Область D - это часть плоскости Oxy, которая лежит внутри цилиндра. В полярных координатах уравнение цилиндра будет следующим: $r^2 = 4$

Вычисляем квадратный корень и, учитывая, что $r > 0$, получаем $r = 2$

Т.о. внутренность цилиндра задается следующими пределами:

$$0 < r < 2 \quad 0 < \theta < 2\pi$$

Тогда уравнение параболы принимает вид

$$z = 9 - r^2$$

На заключительном шаге находим интеграл

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 (9 - r^2) r dr d\theta$$

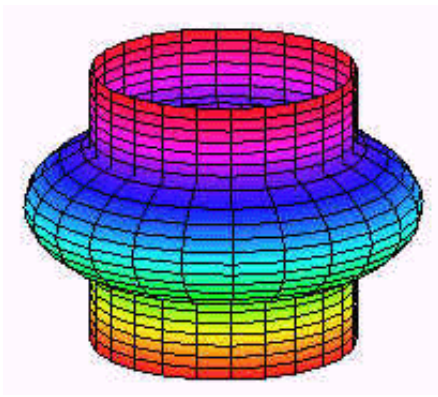
Он равен 28π .

Пример 9

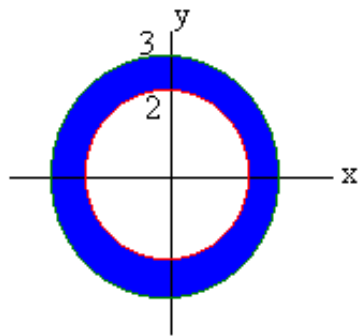
Цилиндр радиуса 2 пересекает сферу радиуса 3 так, то оси цилиндра и сферы совпадают. Найти объем фигуры внутри цилиндра.

Решение

Иллюстрация к данному примеру:



Область D будет представлять собой кольцо между окружностями радиуса $r = 2$ и $r = 3$:



Уравнение сферы в декартовых координатах:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

Уравнение сферы в полярных координатах:

$$r^2 + z^2 = 9$$

Решаем его относительно z :

$$z = \pm\sqrt{9 - r^2}$$

Получившийся интеграл выглядит следующим образом:

$$\int_0^{2\pi} \int_2^3 \left(\sqrt{9 - r^2} + \sqrt{9 - r^2} \right) r dr d\theta$$

Данный интеграл можно вычислить, используя замену переменной, полагая, что

$$u = 9 - r^2, \quad du = -2r dr$$

В итоге получаем:

$$-\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_5^0 2u^{1/2} du d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left[u^{3/2} \right]_5^0 d\theta = \frac{20\sqrt{5}\pi}{3}$$

2. Тройной интеграл

Рассмотрим кубируемую область в трехмерном пространстве $(V) \subset R^3$. Разбиение T на части (V_i) осуществляется непрерывными поверхностями. Диаметр разбиения определяется аналогично двумерному случаю. Также, по аналогии, можно определить для функции $f(x, y, z)$, разбиения T области (V) и выбранных точек $M_i(x_i, y_i, z_i) \in V_i$ интегральную сумму

$$\sigma(f, T, \{M_i\}) = \sum_{i=1}^n f(M_i) V_i, \text{ где } V_i \text{ обозначает объем области } (V_i).$$

Определение

Пусть $I \in R$ такое число, что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall T, \quad d(T) < \delta \quad \forall \{M_i\} \quad |\sigma(f, T, \{M_i\}) - I| < \varepsilon$. Тогда мы говорим, что f интегрируема на (V) , число I есть интеграл f по области (V) и обозначаем это так: $I = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$.

Как и в случае двойного интеграла, выполняются аналогичные [свойства 1-6](#). Можно доказать, что если $f(x, y, z)$ непрерывна на (V) , то она интегрируема на (V) . Точно также можно убедиться в том, что если точки разрыва $f(x, y, z)$ лежат на конечном числе непрерывных поверхностей, лежащих в (V) и разбивающих (V) на кубируемые области, то $f(x, y, z)$ интегрируема на (V) .

2.1. Вычисление тройного интеграла

Вычисление тройного интеграла производится по следующему правилу.

Теорема 1

Пусть (V) задана следующими неравенствами: $\psi_1(x, y) \leq z \leq \psi_2(x, y)$, $(x, y) \in D$, D -квадрируемая область на плоскости, ψ_1, ψ_2 - непрерывные. Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Замечание

Если область D задана неравенствами $a \leq x \leq b$, $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$, где ϕ_1, ϕ_2 -

непрерывные функции, то
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\psi_1(x, y)}^{\psi_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

2.2. Замена переменных в тройном интеграле

Сформулируем общую теорему о замене переменных.

Теорема 1

Пусть отображение $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между областями (Δ) , $(u, v, w) \in (\Delta)$ и (V) , $(x, y, z) \in (V)$, причем функции x, y, z - непрерывно дифференцируемые и

$$I = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ ни в одной точке } (\Delta).$$

Пусть $f(x, y, z)$ - непрерывная на (V) функция. Тогда

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(\Delta)} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \cdot |I| du dv dw$$

Как и для двойного интеграла ([см. 1.4. Замена переменных в двойном интеграле](#)), теорема остается верна в случае нарушения ее условий на множестве нулевого объема.

Пример 10

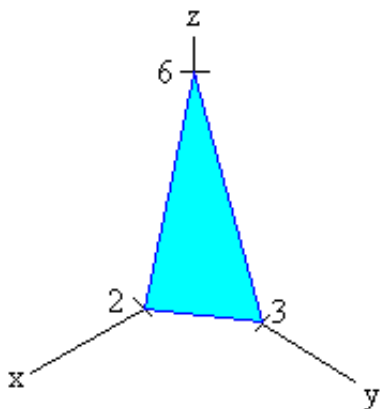
Вычислить

$$\iiint_{\mathcal{V}} f(x, y, z) dz dy dx,$$

где $f(x, y, z) = 1 - x$ и V лежит в первой четверти и ниже плоскости $3x + 2y + z = 6$

Решение

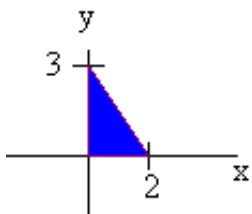
Область выглядит следующим образом:



Главная задача - найти пределы интегрирования. Рассмотрим внутренние пределы интегрирования, соответствующие переменной z . Нижний предел будет являться плоскостью Оху или $z = 0$

Верхний предел - плоскость из условия задачи: $3x + 2y + z = 6$. Решаем уравнение относительно z , и получаем $z = 6 - 3x - 2y$.

Далее рассмотрим средние пределы интегрирования, соответствующие переменной y . Рассмотрим проекцию поверхности на плоскость Oxy :



В этом случае пределы интегрирования находим как у двойных интегралов. Нижний предел: $y = 0$.

Пусть $z = 0$, решим уравнение относительно y , и получим верхний предел: $y = 3 - \frac{3}{2}x$.

Далее находим внешние пределы интегрирования по переменной x . Нижний предел и верхний предел будут находиться следующим образом: $0 < x < 2$.

Необходимый интеграл имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} \int_0^{6-3x-2y} (1-x) dz dy dx &= \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [z - xz]_0^{6-3x-2y} dy dx = \int_0^2 \int_0^{3-\frac{3}{2}x} [(6-3x-2y) - (6x-3x^2-2xy)] dy dx = \\ &= \int_0^2 (6y - 9xy - y^2 + 3x^2y + xy^2) \Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} dx = \\ &= \int_0^2 \left(18 - 9x - 27x + \frac{27}{2}x^2 - 9 + 9x - \frac{9}{4}x^2 + 9x^2 - \frac{9}{2}x^3 + 9x - 9x^2 + \frac{9}{4}x^3 \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(9 - 18x + \frac{45}{4}x^2 - \frac{9}{4}x^3 \right) dx = \left[9x - 9x^2 + \frac{15}{4}x^3 - \frac{9}{16}x^4 \right]_0^2 = 3 \end{aligned}$$

Пример 11

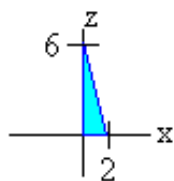
Поменять порядок интегрирования в предыдущем примере, чтобы оно осуществлялось следующим образом: $dy dx dz$.

Решение

Сначала рассмотрим интегрирование по переменной y . Нижний предел равен 0, а для нахождения верхнего предела разрешим уравнение плоскости относительно y и получим

$$y = 3 - \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}z.$$

Для нахождения пределов интегрирования по x , проецируем на плоскость Oxz :



Нижний предел по x равен 0. Для нахождения верхнего предела полагаем $y = 0$ и решаем уравнение относительно x и получаем:

$$x = 2 - \frac{1}{3}z.$$

Наконец, для нахождения пределов интегрирования по z , очевидно, что нижний предел будет равен 0, а верхний предел равен 6. Т.о. $0 < z < 6$.

Записываем интеграл в следующем виде:

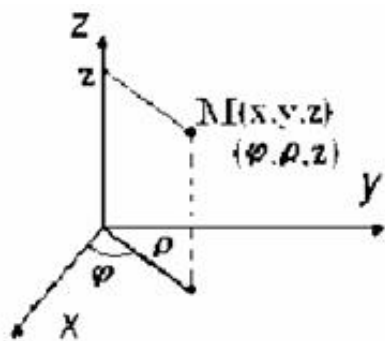
$$\int_0^6 \int_0^{2-\frac{1}{3}z} \int_0^{6-\frac{3}{2}x-\frac{1}{3}z} (1-x) dy dx dz.$$

2.3. Тройной интеграл в цилиндрических и сферических координатах

Цилиндрические координаты точки в пространстве - это ее полярные координаты в XOY и координата Z.

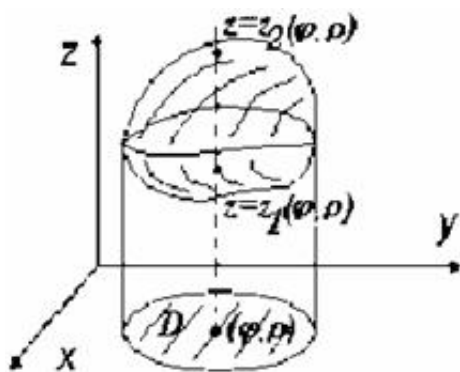
Связь между декартовыми и цилиндрическими координатами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z.$$

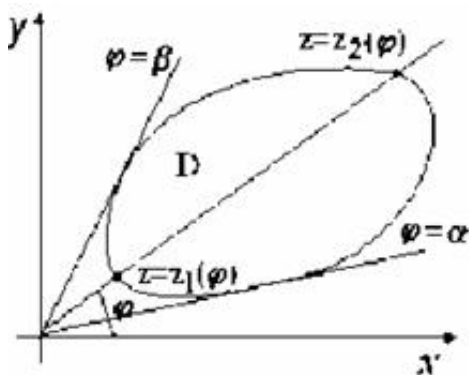


Перевод тройного интеграла к цилиндрическим координатам и сведение к повторному трехкратному интегралу осуществляется следующим образом:

$$V: \begin{cases} \alpha \leq \varphi \leq \beta \\ \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi) \\ z_1(\varphi, \rho) \leq z \leq z_2(\varphi, \rho) \end{cases}$$

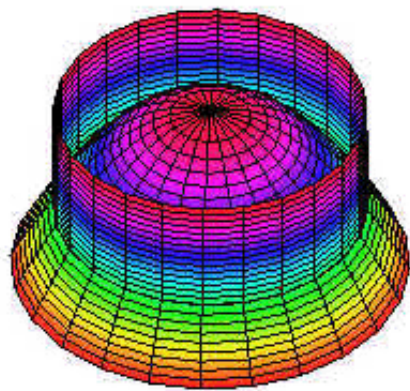


$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ dS = \rho d\varphi d\rho \\ dV = \rho d\varphi d\rho dz \end{cases} = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\varphi, \rho)}^{z_2(\varphi, \rho)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) dz$$



Пример 12

Найти момент инерции по оси z площади поверхности, которая лежит ниже параболоида $z = 25 - x^2 - y^2$, внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$, над плоскостью Oxy и имеет формулу распределения плотности $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + 6z$.



Решение

По формуле момента инерции получим:

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + 2z) dz dy dx$$

Уравнение области внутри цилиндра переведем в цилиндрические координаты. Получаем:

$$\begin{aligned} I_z &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{25-r^2} r^2 (r^2 + 6z) r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^2 [r^5 z + 3r^3 z^2]_0^{25-r^2} dr d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (-125r^5 + 2r^7 + 1875r^3) dr d\theta = \frac{37384\pi}{3} \end{aligned}$$

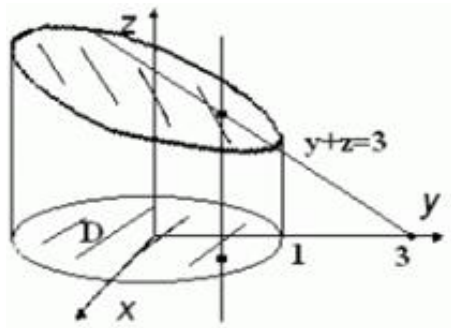
Пример 13

Вычислить $\iiint_V zx dV$, где

$$V: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y + z = 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

Решение

$$V: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq z \leq 3 - y = 3 - \rho \sin \varphi \end{cases}$$



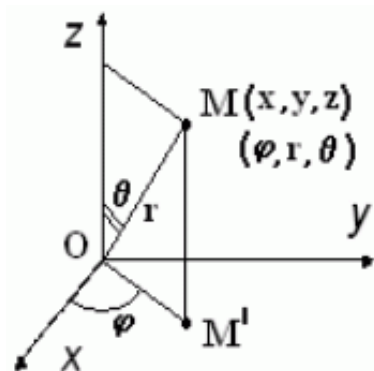
$$\begin{aligned} \iiint_V z x dV &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \int_{z=0}^{z=3-\rho \sin \varphi} \rho \cos \varphi z dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho \cdot \rho \cos \varphi \frac{z^2}{2} \Big|_{z=0}^{z=3-\rho \sin \varphi} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \left(\rho^2 \cos \varphi \frac{(3-\rho \sin \varphi)^2}{2} \right) d\rho = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi \cos \varphi \left(\int_0^1 9\rho^2 d\rho - 6 \sin \varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho + \sin^2 \varphi \int_0^1 \rho^4 d\rho \right) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(3 \cos \varphi - \frac{6}{4} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{5} \sin^2 \varphi \cos \varphi \right) d\varphi = \frac{1}{2} \left[3 \sin \varphi \Big|_0^{2\pi} - \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin^2 \varphi}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{5} \cdot \frac{\sin^3 \varphi}{3} \Big|_0^{2\pi} \right] = 0 \end{aligned}$$

Теорема 1 о переходе к сферическим координатам

Пусть x, y, z - непрерывно дифференцируемые и пусть $f(x, y, z)$ - непрерывная на (V) функция. Тогда

$$\iiint_V f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_V f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\phi d\theta$$

Переход к сферическим координатам осуществляется функциями



r - расстояние точки M от начала координат (длина радиус-вектора точки);

θ - угол между радиус-вектором \overline{OM} и положительным направлением оси OZ ;

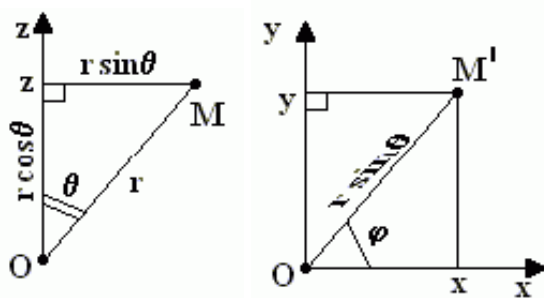
φ - угол между положительным направлением оси ОХ и проекцией радиус-вектора \overline{OM} на плоскость ХОУ, отсчитываемый против часовой стрелки (полярный угол).

Границы изменения сферических координат для всех точек пространства:

$$r \in [0; +\infty), \quad \varphi \in [0; 2\pi), \quad \theta \in [0; \pi).$$

Связь сферических и декартовых координат:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$



Замена переменных в тройном интеграле осуществляется в общем случае по формуле, аналогичной формуле замены переменных в двойном интеграле. В частности, при переходе к сферическим координатам эта формула имеет вид:

$$\iiint_V f(x, y, z) dz dy dx = \iiint_V F(r, \theta, \varphi) \cdot |I| \cdot dr d\theta d\varphi$$

I - это определитель Якоби, имеющий вид:

$$\begin{aligned} I &= \begin{vmatrix} x'_r & x'_\theta & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\theta & y'_\varphi \\ z'_r & z'_\theta & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \cos \theta \cdot \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \theta \cdot \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= \cos \theta r^2 \cos \theta \sin \theta \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \theta \sin \theta r \sin \theta \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

$$|I| = |r^2 \sin \theta| = r^2 \sin \theta, \text{ т.к. } \theta \in [0, \pi] \text{ и } \sin \theta \geq 0.$$

Формула перевода тройного интеграла к сферическим координатам:

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_V f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

Далее тройной интеграл сводится к трехкратному в соответствии с неравенствами для области V в сферических координатах.

Эффективно переводить в сферические координаты тройной интеграл по областям, в границах которых есть сфера.

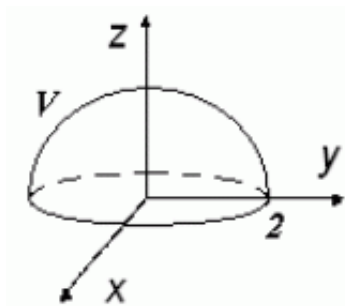
Пример 14

Вычислить $\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv$, где $V: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ z \geq 0 \end{cases}$

Решение

Запишем неравенствами область V в сферических координатах:

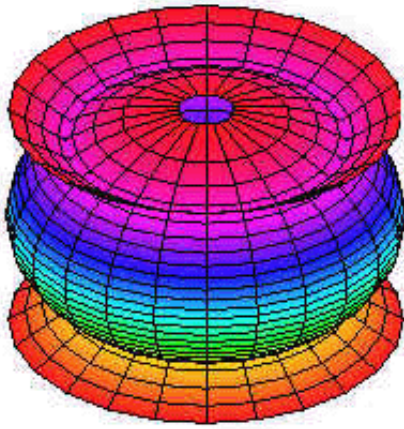
$$V: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dv &= \left\{ \begin{array}{l} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \\ dv = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta \end{array} \right\} = \\ &= \int \int \int_V r^2 r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \int_{\rho=0}^2 r^4 dr \underbrace{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta}_{-\cos \theta \Big|_0^{\pi/2} = 1} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 r^4 dr = 2\pi \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^2 = \frac{64}{5} \pi \end{aligned}$$

Пример 15

Найти объем, лежащий внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и снаружи конуса $z^2 = x^2 + y^2$



Решение

Прейдем к сферическим координатам. Уравнение сферы будет выглядеть следующим образом: $\rho = \sqrt{2}$. Добавим к уравнению конуса $z^2 = x^2 + y^2 + z^2$ справа и слева: $2z^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Осуществим переход:

$$2\rho^2 \cos^2 \theta = \rho^2$$

Сокращаем на ρ^2 и разрешаем относительно θ , получаем:

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \theta_2 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3\pi}{4}$$

Чтобы найти объем вычисляем следующий интеграл:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \frac{8\pi}{3}.$$

Объем равен:

$$V = \frac{8\pi}{3}$$

[См. решение примера в Maple](#)

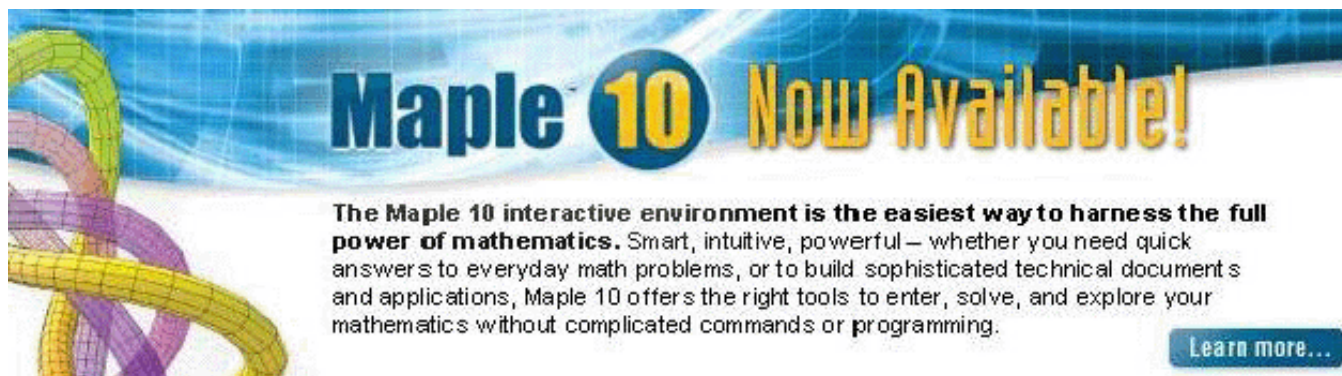
3. Математическая система Maple

Maple - это система для аналитического и численного решения математических задач, возникающих как в математике, так и в прикладных науках. Развитая система команд, удобный интерфейс и широкие возможности позволяют эффективно применять Maple для решения проблем математического моделирования.

Мощная программа аналитических и численных расчетов. Используется идеология интерактивных документов, включающих собственно программы, текст и графику. Имеется удобный графический интерфейс и развитая помощь, включающая помимо примеров, полное описание программы в гипертекстовом формате. Этот интерфейс основан на концепции рабочего поля (worksheet) или документа, содержащего строки ввода, вывода и текст, а также графику.

Работа в Maple проходит в режиме сессии (session) пользователь вводит предложения (команды, выражения, процедуры и др.), которые воспринимаются Maple. Если ввод предложения завершается разделителем ";", то в строке под предложением сразу будет отклик: результат исполнения команды или сообщение об ошибке. Разделитель ":" используется для "отложенного" ввода. Нажатие Enter запускает исполнение предложения. Если введено законченное предложение, то следует выполнение, иначе Maple ожидает завершения предложения. Обнаружив ошибку, Maple печатает на следующей строке сообщение о ней; при ошибке в написании имени команды символом "^" отмечается первая неузнанная литера.

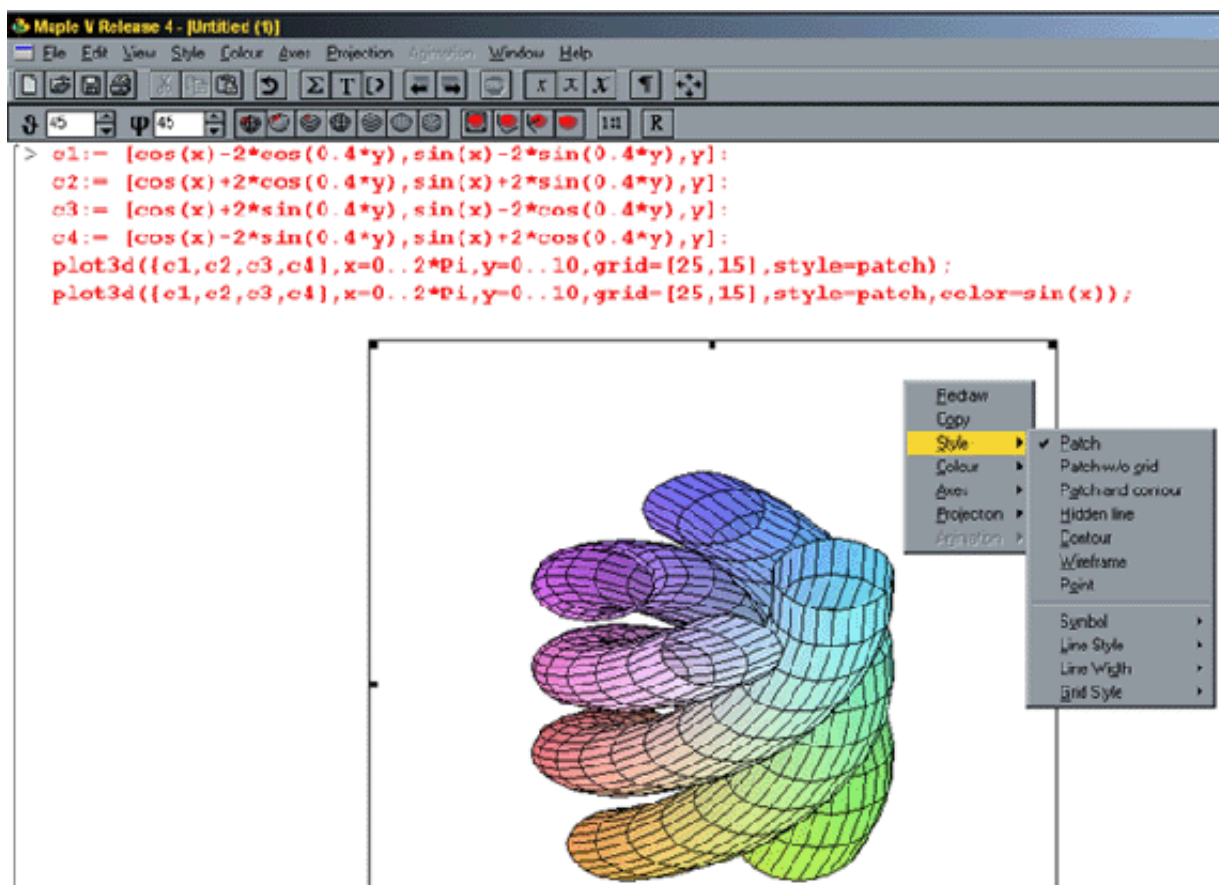
По умолчанию результаты сеанса сохраняются в файле с расширением 'ms'. Если задан режим сохранения состояния сеанса (session), то в файле с расширением 'm' будут записаны текущие назначения. Ядро программы Maple используется для символьных вычислений в различных интегрированных средах, например, в пакете Scientific WorkPlace, а также в программе Matlab. Сведения о последней версии программы можно найти на сервере компании [Waterloo Maple](http://www.waterloomaple.com). В мае 2005 г. компания Maplesoft объявила о выходе новой версии программы Maple 10.



3. 1. Обзор интерфейса

На данный момент математический пакет Maple имеет современный графический пользовательский интерфейс, характерный для приложений операционных систем Windows. Это повышает удобство работы с Maple и обеспечивает интеграцию со многими другими программными продуктами.

Как у всех приложений под Windows интерфейс Maple имеет ряд характерных элементов, видимых на рисунке и перечисленных ниже:



- строка заголовка (сверху);
- строка главного меню;
- главная панель инструментов;
- контекстная панель инструментов, вид которой зависит от режима работы с Maple;
- окно ввода и редактирования документов;
- строка состояния (внизу окна).

Пользовательский интерфейс Maple позволяет готовить документы, содержащие одновременно текстовые комментарии, команды входного языка (с возможным преобразованием их в естественную математическую форму), результаты вычислений в виде обычных математических формул и графические данные. Это обеспечивает понятное представление исходных данных и результатов вычислений, а также удобство их повторного использования.

В основе пользовательского интерфейса Maple лежит графический многооконный интерфейс операционной системы Windows. Управление системой Maple возможно с помощью главного

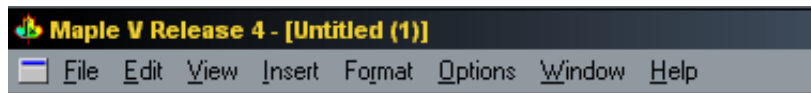
меню, панелей инструментов и палитр, а также "горячих" клавиш. Поддерживаются также многие возможности мыши, присущие приложениям под Windows.

Важно отметить и прекрасно реализованную справочную систему Maple. Преодолев первые трудности общения с системой, пользователь быстро осваивает систему справки, которая позволяет без какой-либо бумажной документации получить исчерпывающую информацию о любом операторе, функции или пакете (разумеется, на английском языке). На каждой странице справки находится по несколько примеров, причем их можно скопировать и перенести в редактор или в окно исполняемых документов системы. Это способствует быстрому обучению пользователя.

Пользователь Maple работает с документами, которые являются одновременно описаниями алгоритмов решения задач, программами и результатами их исполнения. Все данные команды и результаты размещаются в соответствующих ячейках. Графические построения выполняются как в ячейках документа, так и в отдельных окнах, и имеют свои меню, в том числе и контекстные, для оперативного управления параметрами.

Заметим также, что Maple позволяет экспортировать документы или сохранять их в различных форматах, включая HTML, LaTeX, Maple Explorer, Maple Text, Maple Plain и RTF.

3. 2. Меню системы Maple



Наиболее полные возможности управления предоставляет главное меню системы Maple. Оно, как обычно, расположено непосредственно под строкой заголовка. Меню предоставляет доступ к основным операциям и параметрам пользовательского интерфейса системы. Ниже дан перечень меню, доступных при наличии открытого документа:

File - работа с файлами и печатью документов;

Edit - команды редактирования документа и операции с буфером обмена;

View - управление видом пользовательского интерфейса;

Insert - операции вставки;

Format - операции задания форматов;

Options - задание параметров;

Window - управление окнами;

Help - работа со справочной системой.

Главное меню Maple является контекстно-зависимым. Это означает, что его вид может меняться в зависимости от текущего состояния (контекста) системы. Например, если все документы закрыты, то главное меню содержит только три заголовка меню: File, Options и Help. При этом место для окон документов пусто и окрашено в серый цвет. Вид меню также меняется в зависимости от того, какие объекты в документе выделены.

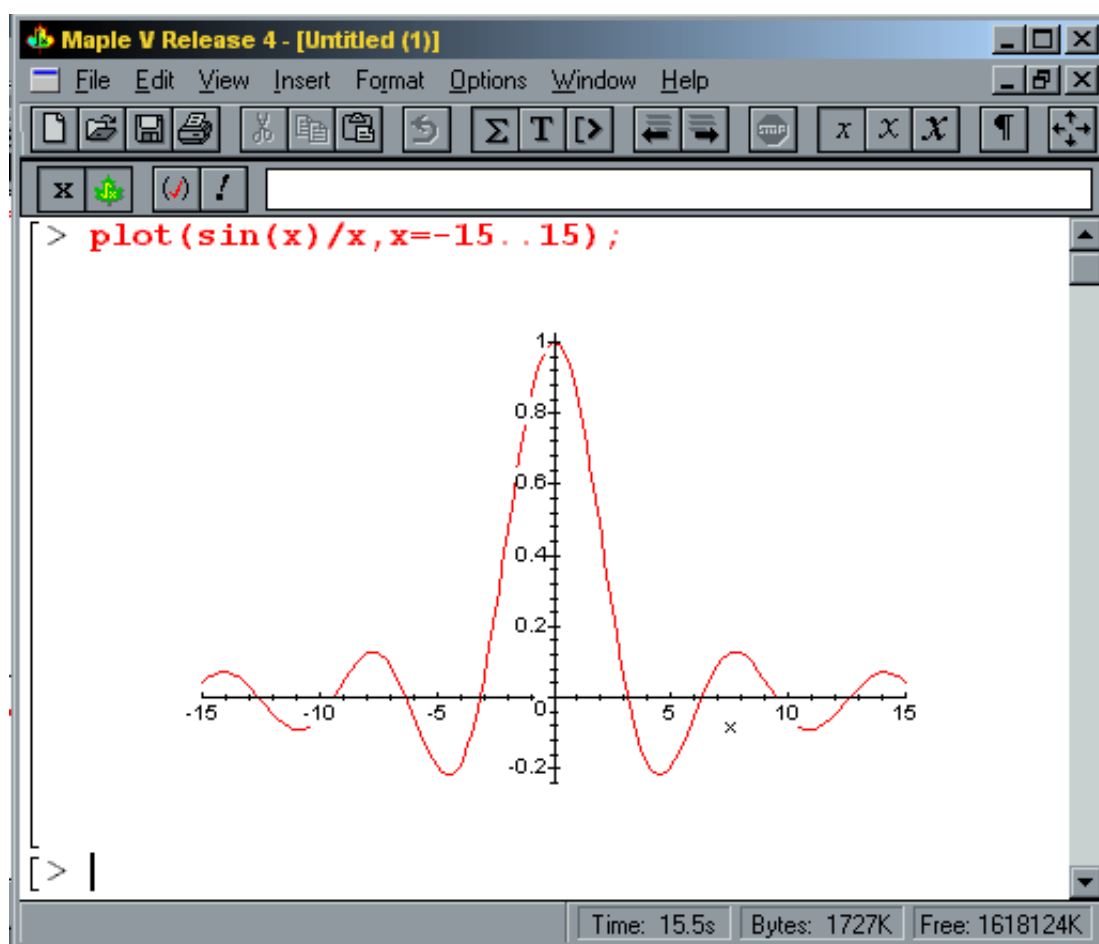
3.3. Начальные навыки работы

После загрузки и запуска системы можно начать диалог с ней, используя ее операторы и функции (с параметрами) для создания и вычисления математических выражений.

ВНИМАНИЕ

Во избежании грубых ошибок при исполнении того или иного примера рекомендуется перед этим исполнить команду `restart` которая снимает определения со всех использованных ранее переменных и позволяет начать вычисления "с чистого листа".

На рисунке представлен реальный диалог с системой (в виде копии экрана) при решении простейших арифметических задач и построении графика функции $\sin(x)/x$.



Уже из этого простого примера видны особенности диалога с Maple и синтаксиса ее входного языка, то есть языка, на котором системе задаются вопросы. Диалог идет в стиле: "задал вопрос, получил ответ".

Вопросы и ответы занимают отдельные блоки, выделяемые в левой части квадратными скобками. Длина квадратных скобок зависит от размера выражений - исходных (вопроса) и результатов вычислений (ответов на вопросы). Знак `>` является знаком приглашения к заданию вопроса. Мигающая вертикальная черта `|` - маркер ввода (курсор).

Ввод выражений (вопросов) задается по правилам, давно принятым для строчных редакторов. Они хорошо известны, и мы не будем на них останавливаться подробно. Отметим лишь, что клавиша `Ins` позволяет задавать два основных режима ввода - замены и вставки. В режиме замены вводимый символ заменяет существующий символ, который отмечен маркером ввода. А в режиме вставки новый символ вставляется в текст, не уничтожая имеющиеся символы.

Перемещение маркера ввода осуществляется клавишами перемещения курсора <- и -> Клавиша Backspace стирает символ слева от маркера ввода, а клавиша Del - справа от маркера ввода. Для ввода любого символа надо нажать соответствующую клавишу. Клавиша Shift включает верхний регистр для ввода заглавных (прописных) букв, а клавиша Caps Lock переключает верхний и нижний регистры клавиш с буквами (они меняются местами).

Знак фиксации конца выражения ; (точка с запятой) указывает, что результат его вычисления должен быть выведен на экран, а знак : (двоеточие) отменяет вывод и может использоваться как знак разделителя при записи нескольких выражений в одной строке. Клавиши перемещения курсора позволяют передвигаться по ранее введенным строкам на экране.

4. 2D-графика в MAPLE

Лидером по графическим возможностям среди математических систем для персональных компьютеров долгое время считалась система Mathematics. Однако в реализации Maple V R4 возможности графики системы Maple V приблизились к таковым у системы Mathematica. Они настолько обширны, что, будь математическая графика Maple единственным назначением системы, оно вполне оправдало бы ее разработку.

Графика Maple реализует все мыслимые (и даже "немыслимые") варианты математических графиков - от построения графиков простых функций в Декартовой и в полярной системах координат до создания реалистических образов сложных пересекающихся в пространстве фигур с их функциональной окраской. Возможны наглядные графические иллюстрации решений самых разнообразных уравнений, включая системы дифференциальных уравнений.

В само ядро Maple встроено ограниченное число функций графики. Это прежде всего функция для построения двумерных графиков (2D-типа) - `plot` и функция для построения трехмерных графиков (3D-типа) - `plot3d`. Они позволяют строить графики наиболее распространенных типов. Для построения графиков специального типа (например, в виде векторных полей градиентов, решения дифференциальных уравнений, построения фазовых портретов и т.д.) в пакеты расширения системы Maple включено большое число различных графических функций. Для их вызова необходимы соответствующие указания.

Вообще говоря, средства для построения графиков принято считать графическими процедурами или операторами. Однако мы сохраним за ними наименование функций в силу двух принципиально важных свойств:

- графические средства Maple возвращают некоторые графические объекты, которые размещаются в окне документа в строке вывода или в отдельном графическом объекте;
- эти объекты можно использовать в качестве значений переменных, т.е. переменным можно присваивать значения графических объектов и выполнять над ними соответствующие операции (например, с помощью функции `show` выводить на экран несколько графиков).

Графические функции заданы таким образом, что обеспечивают построение типовых графиков без какой-либо особой подготовки. Все, что для этого нужно, это указать функцию, график которой строится, и пределы изменения независимых переменных. Однако с помощью дополнительных необязательных параметров - опций можно существенно изменить вид графиков, например, изменить стиль и цвет линий, вывести титульную надпись, изменить вид координатных осей и т.д.

4.1. Основная функция двумерной графики - plot

Для построения двумерных графиков служит функция plot. Она задается в виде:

`plot(f, h, v)` или `plot(f, h, v, o)`,

где *f* - функция (или функции), чей (чьи) график(и) строятся, *h* - переменная с указанием области ее изменения по горизонтали, *v* - заданная опционально переменная с указанием области изменения по вертикали, *o* - опция или набор опций, задающих стиль построения графика (толщину и цвет кривых, тип кривых, метки на них и т.д.).

Самыми простыми формами задания этой функции служат:

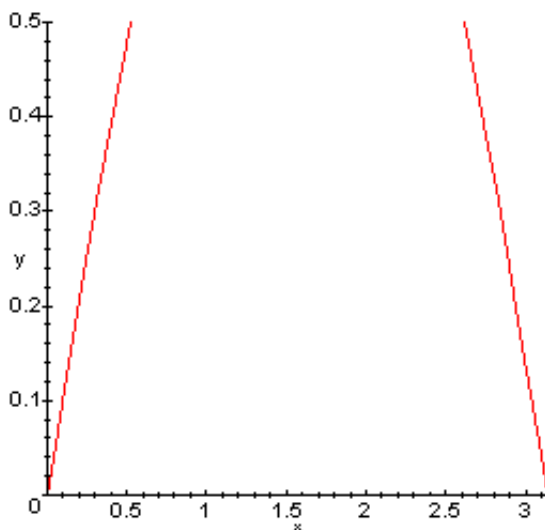
`plot(i,xmin..xmax)` - построение графика функции *f*, заданной только именем;

`plot(f(x),x=xmin..xmax)` - построение графика функции *f(x)*.

Диапазон изменения независимой переменной *x* задается как *xmin..xmax*, где *xmin* и *xmax* - минимальное и максимальное значение *x*, .. (две точки) - составной символ, указывающий на изменение независимой переменной. Разумеется, имя *x* здесь дано условно - независимая переменная может иметь любое допустимое имя.

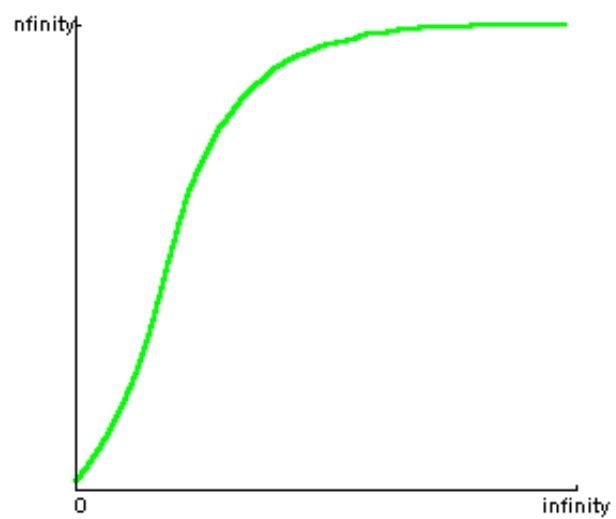
Пример 16

```
> plot(sin(x),x=0..Pi,y=0..0.5);
```



Пример 17

```
> plot(exp,0..infinity, color=green, thickness=2);
```



4.2. Параметры

Параметры перечисляются в команде plot после указания областей в форме

< имя параметра > = <значение>.

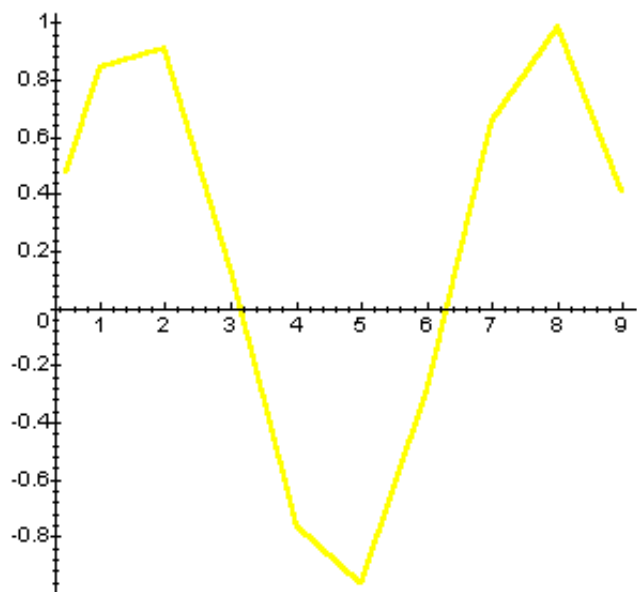
Список параметров приведен в таблице.

Таблица параметров функции plot

| | |
|-------------|---|
| axes | Вывод различных типов координат (axes=NORMAL — обычные оси, выводятся по умолчанию, axes=BOXES — график заключается в рамку с оцифрованными осями, axes=FRAME — оси в виде перекрещенных линий и axes=NONE — оси не выводятся). |
| color | Задаёт цвет кривых (см. далее). |
| coords | Задание типа координатных систем (см. далее). |
| numpoints | Задаёт минимальное количество точек графика (по умолчанию numpoints=49). |
| resolutions | Задаёт горизонтальное разрешение устройства вывода (по умолчанию resolutions=200, параметр используется при отключённом адаптивном методе построения графиков). |
| scaling | Задаёт масштаб графика CONSTRAINED (сжатый) или UNCONSTRAINED (несжатый — по умолчанию). |
| size | Задаёт размер шрифта в пунктах. |
| style | Задаёт стиль построения графика (POINT — точечный, LINE — линиями). |
| symbol | Задаёт вид символа для точек графика (возможны значения BOX — прямоугольник, CROSS — крест, CIRCLE — окружность, POINT — точка, DIAMOND — ромб). |
| title | Задаёт построение заголовка графика (title=«string», где string — строка). |
| titlefont | Определяет шрифт для заголовка (так же как и для font). |
| labelfont | Определяет шрифт для меток (labels) на осях координат (так же как и для font). |
| thickness | Определяет толщину линий графиков (0, 1, 2, 3, по умолчанию 0). |
| view=[A, B] | Определяет максимальные и минимальные координаты, в пределах которых график будет отображаться на экране, A = [xmin..xmax], B=[ymin..ymax] (по умолчанию отображается вся кривая). |
| xtickmarks | Задаёт минимальное число отметок по оси X. |
| ytickmarks | Задаёт минимальное число отметок по оси Y. |

Пример 18

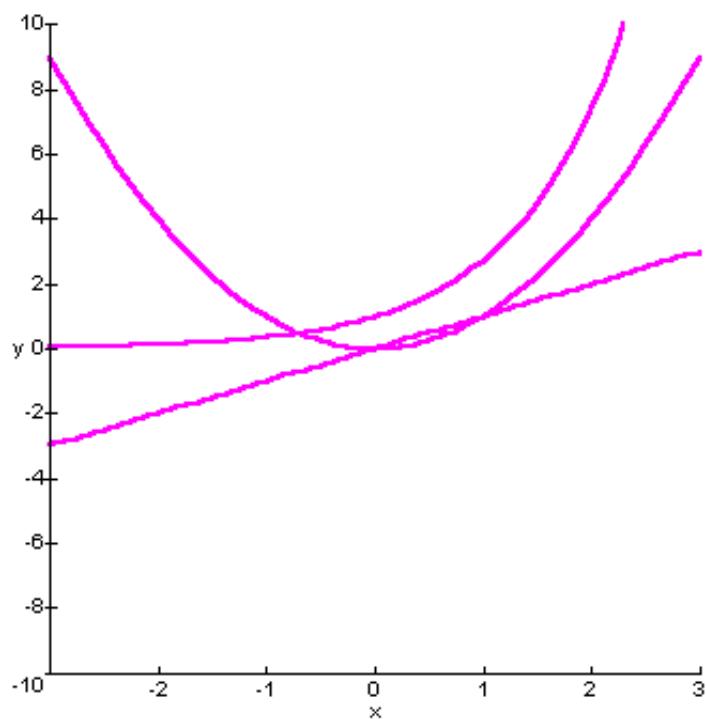
> plot(sin, sample=[0.5,1,2,3,4,5,6,7,8,9], adaptive=false,color=yellow, thickness=2);



Пример 19

```
>plot({x,x^2,exp(x)},x=-3..3,y=-10..10,title=`График функций y=x, y=x^2, y=exp(x).`,
axes=FRAME, xtickmarks=6, ytickmarks=10, color=magenta, thickness=2);
```

График функций $y=x$, $y=x^2$, $y=\exp(x)$.



4.3. Управление стилем и цветом линий 2D-графиков

Maple позволяет воспроизводить на одном графике множество кривых. При этом возникает необходимость их выделения. Для этого можно использовать построение линии разными стилями и разными цветами и разной толщиной линий. Набор средств выделения кривых позволяет уверенно различать их как на экране цветного дисплея и распечатках цветным струйным принтером, так и при печати монохромными принтерами.

Параметр `style` позволяет задавать следующие стили для линий графиков:

`SPISV = POINT` или `point` - график выводится по точкам;

`LINE` или `line` - график выводится линией.

Если задано построение графика точками то параметр `symbol` позволяет представить точки в виде различных символов, например, прямоугольника, креста, окружности или ромба.

Другой параметр `color` позволяет установить обширный набор цветов линий графиков: `aquamarine black blue navy coral cyan brown gold green gray grey khaki magenta maroon orange pink plum red sienna tan turquoise violet wheat white yellow`

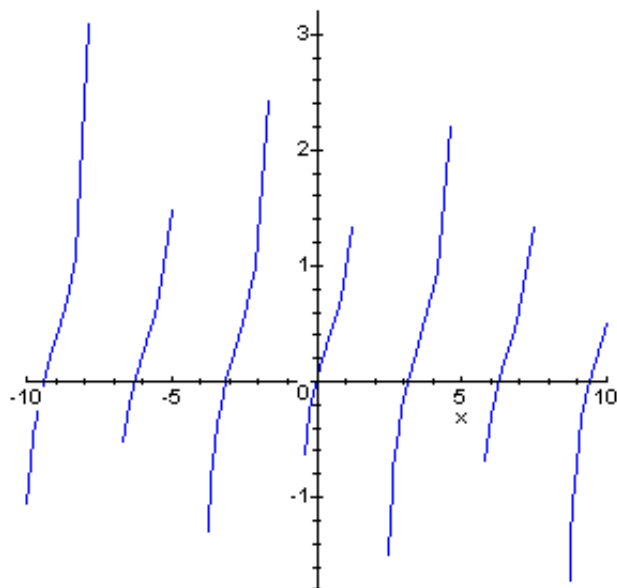
Различные цветовые оттенки получаются использованием RGB-комбинаций базовых цветов: `red` - красный, `green` - зеленый, `blue` - синий. Приведем перевод ряда других комбинированных цветов: `black` - черный, `white` - белый, `khaki` - цвет "хаки", `gold` - золотистый, `orange` - оранжевый, `violet` - фиолетовый, `yellow` - желтый и т.д. Перевод цветов некоторых оттенков на русский язык не всегда однозначен и потому не приводится. Средства управления стилем графиков дают возможность легко выделять различные кривые на одном рисунке, даже если для выделения не используются цвета.

4.4. Графики функций с разрывами

Некоторые функции, например $\tan(x)$, имеют при определенных значениях x разрывы, причем случается что значения функции в этом случае устремляются в бесконечность. Функция $\tan(x)$, к примеру, в точках разрывов устремляется к $+$ и $-$ бесконечности. Построение графиков таких функций нередко дает плохо предсказуемые результаты. Графический процессор Maple не всегда в состоянии определить оптимальный масштаб по оси ординат, а график функции выглядит весьма непредставительно:

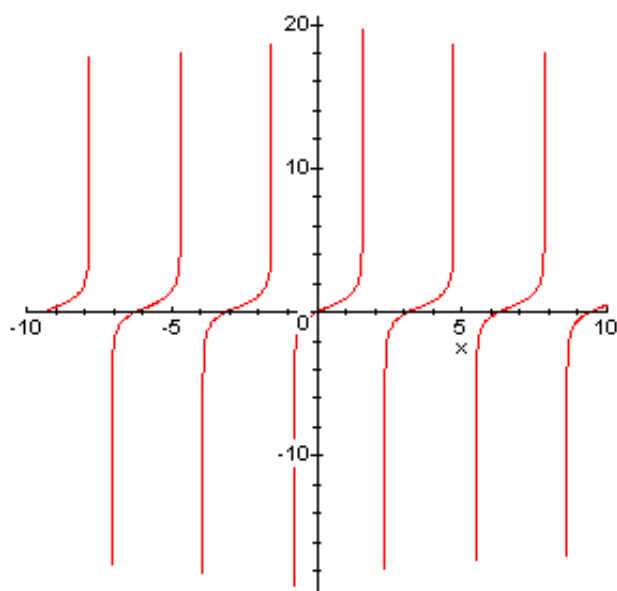
Пример 20

```
> plot(ln(1+tan(x)),x=-10..10,color=blue);
```



Среди параметров функции `plot` есть специальный параметр `discont`. Если задать его значение равным `true`, то качество графиков существенно улучшается. Улучшение достигается разбивкой графика на несколько участков, в которых функция непрерывна, и более тщательным контролем за масштабом.

```
> plot(ln(1+tan(x)),x=-10..10,color=red,discont=true);
```



4.5. Построение графиков неявных функций

Maple может строить графики функций, заданных неявно (в виде уравнения относительно x и y).

Пример 21

Построим с помощью команды `implicitplot` эллипс:

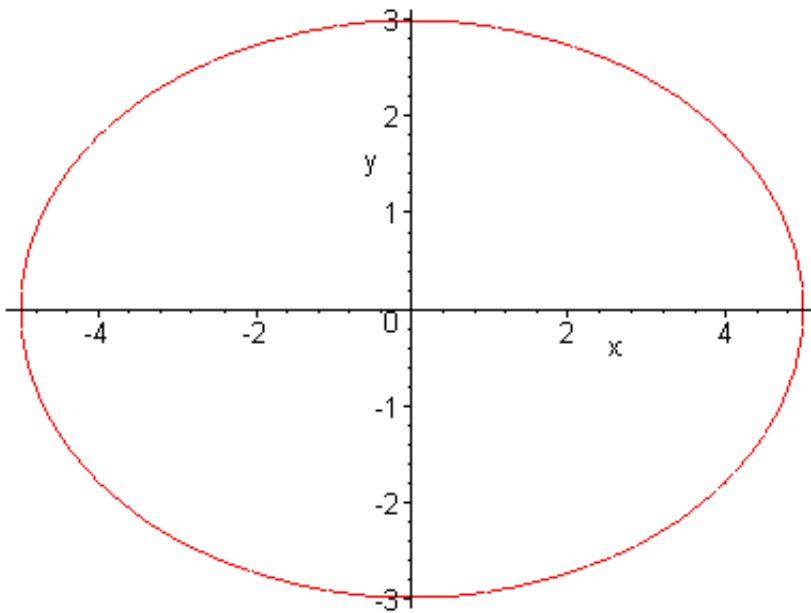
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Напомним, что из этого канонического уравнения следует, что большая полуось эллипса равна 5, а малая - 3.

В отличие от команды `plot`, на сей раз обязательно подключение библиотеки `plots`:

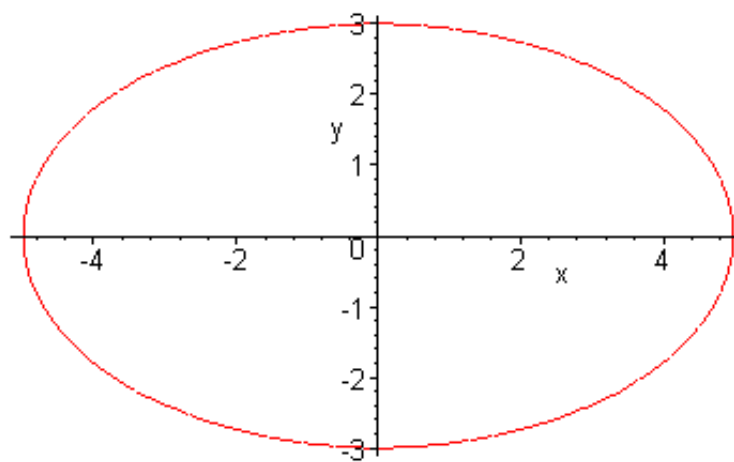
> `with(plots):`

> `implicitplot(x^2/25+y^2/9=1,x=-5..5,y=-5..5);`



Как ни странно, попытка может показаться неудачной! Вместо эллипса, не исключено, появится изображение окружности. Напомним, что Maple, по умолчанию, самостоятельно подбирает масштабы осей координат. Чтобы рисунок был качественно верным, в команду `implicitplot` следует вставить (через запятую) опцию `scaling=constrained`, задающую равенство масштабов по x и y :

> `implicitplot(x^2/25+y^2/9=1,x=-5..5,y=-5..5,scaling=constrained);`



4.6. Параметрическая графика

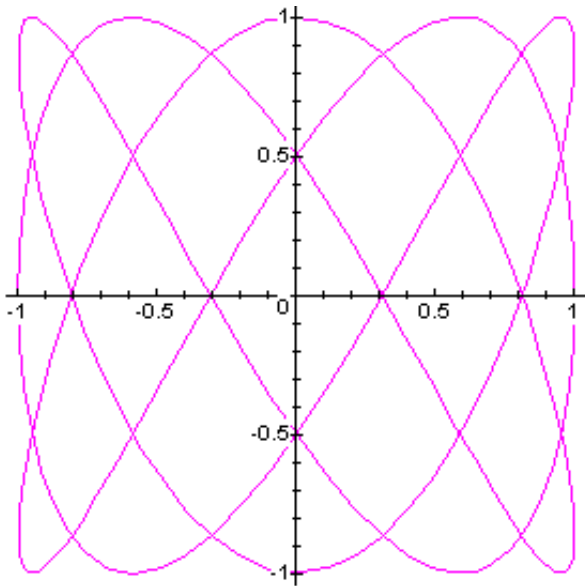
В ряде случаев для задания некоторых зависимостей используются заданные параметрически уравнения, например $x=f_1(t)$ и $y=f_2(t)$ при изменении переменной t в некоторых пределах. Точки (x,y) наносятся на график в Декартовой системе координат и соединяются отрезками прямых. Для этого используется функция `plot` в следующей форме:

```
plot([f1(t),f2(t),t=tmin..tmax],h,v,p)
```

Если функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$ содержат периодические функции (например, тригонометрические), то для получения замкнутых фигур диапазон изменения переменной t задается обычно $0..2*\pi$ или $-\pi..\pi$. К примеру, если задать в качестве функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ функции $\sin(t)$ и $\cos(t)$, то будет получен график окружности. Следующая иллюстрация показывает другие, чуть менее тривиальные примеры построения графиков такого рода.

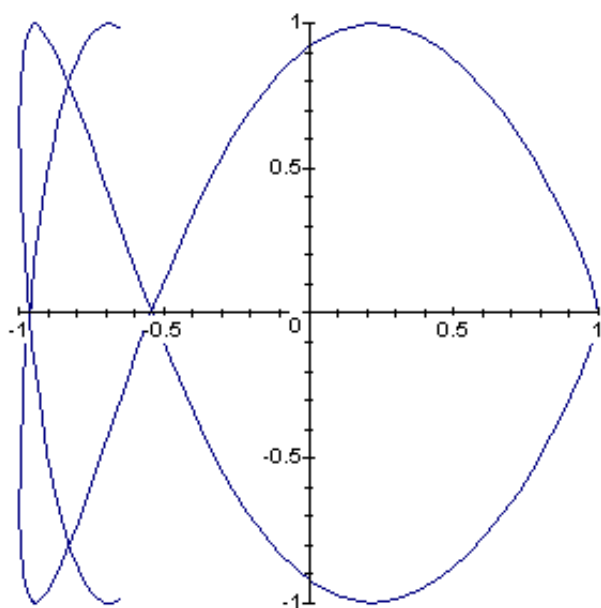
Пример 22

```
>plot([sin(3*t), cos(5*t),t=0..2*Pi],color=magenta);
```



Пример 23

```
> plot([cos(x^2), sin(x^3),x=-2..2],-1..1,-1..1,color=navy);
```



Задание указателей масштаба h и v , а также параметров p не обязательно. Но, как и ранее, позволяет получить вид графика, удовлетворяющий всем требованиям пользователя.

4.7. Построение графиков в различных системах координат

При необходимости можно выбрать систему координат, отличную от декартовой. Всего Maple может использовать 15 типов систем координат (для двумерного построения), которые задаются параметром `coords=имя координат`.

Графики в полярной системе координат представляют собой линии, которые описывает конец радиус вектора $r(t)$ при изменении угла t в определенных пределах - от t_{\min} до t_{\max} . Построение таких графиков производится также функцией `plot`, которая записывается в следующем виде:
`plot([r(t),theta(t),t=tmin..tmax],h,v,p,coords=polar)`

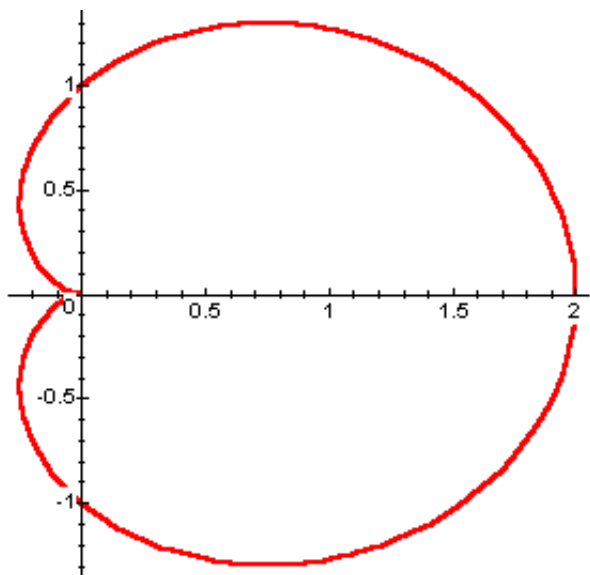
Здесь существенным моментом является задание полярной системы координат опцией `coords=polar`.

Графики параметрических функций и функций в полярной системе координат отличаются огромным разнообразием. Снежинки и узоры мороза на стеклах, некоторые виды кристаллов и многие иные физические объекты подчиняются математическим закономерностям, положенным в основу построения таких графиков.

Приведем примеры построения в полярных координатах:

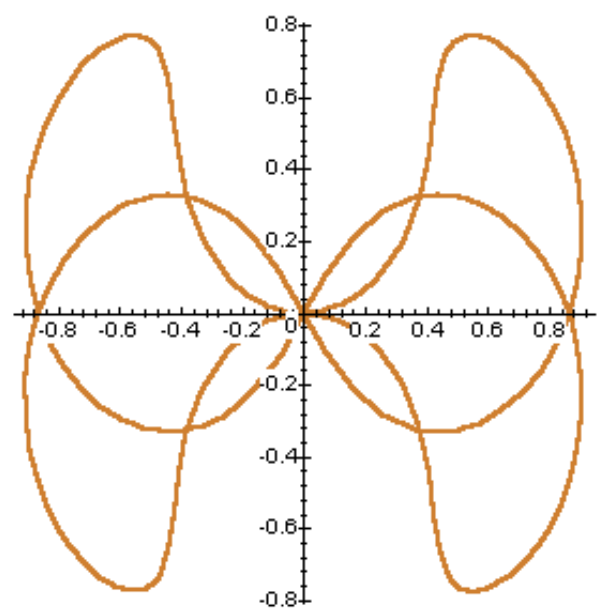
Пример 24

```
>plot([1 + cos(t), t, t=0..2*Pi], coords=polar, thickness=2);
```



Пример 25

```
>plot([sin(2*t), cos(3*t), t=0..2*Pi], coords=polar, color=gold, thickness=2);
```

4.8. Анимация 2D графиков

Визуализация графических построений и результатов моделирования различных объектов и явления существенно повышается при использовании средств "оживления" (анимации) изображений.

Пакет plots имеет две простые функции для создания анимационных графиков.

Первая из этих функций служит для создания анимации графиков, представляющих функцию одной переменной x - F :

`animate(F, x, t)` или `animate(F, x, t, o)`

При этом параметр x задает пределы изменения по переменной x , а параметр t - пределы изменения дополнительной переменной t . Суть анимации заключается в построении серии картинок (как в мультфильме), причем каждая картинка (фрейм) связана с изменяемой во времени переменной t . Если надо явно задать число кадров N анимации, то в качестве опции o надо использовать опцию `frame=N`.

Пример 26

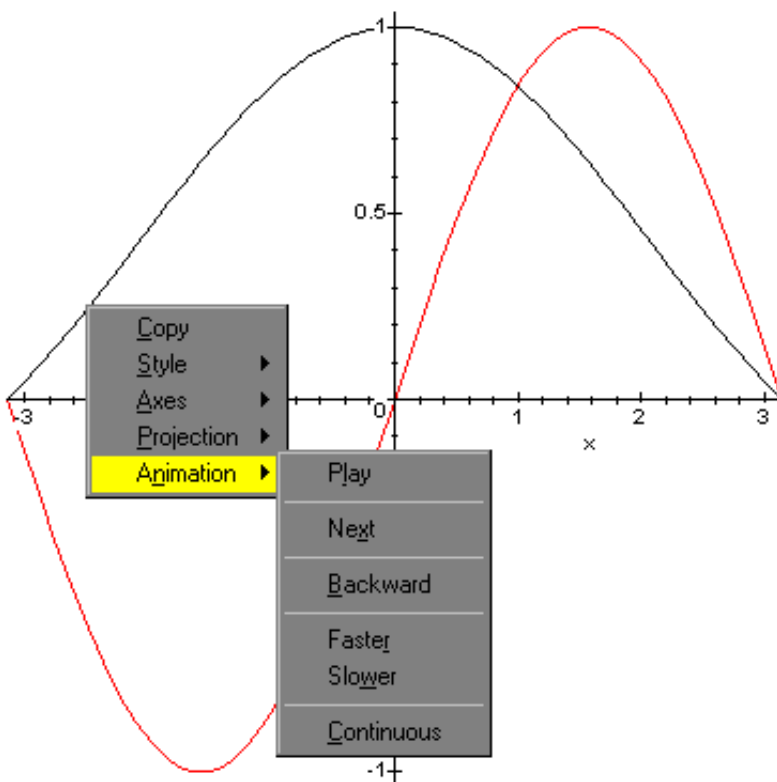
Следующий рисунок показывает применение функции `animate`.

```
> with (plots, animate, display):
```

```
> a:=plots[animate](sin(i*x)/(i*x),x=-Pi..Pi,i=1..3):
```

```
> b:=plot(sin(x),x=-Pi..Pi):
```

```
> plots[display]([a,b]):
```

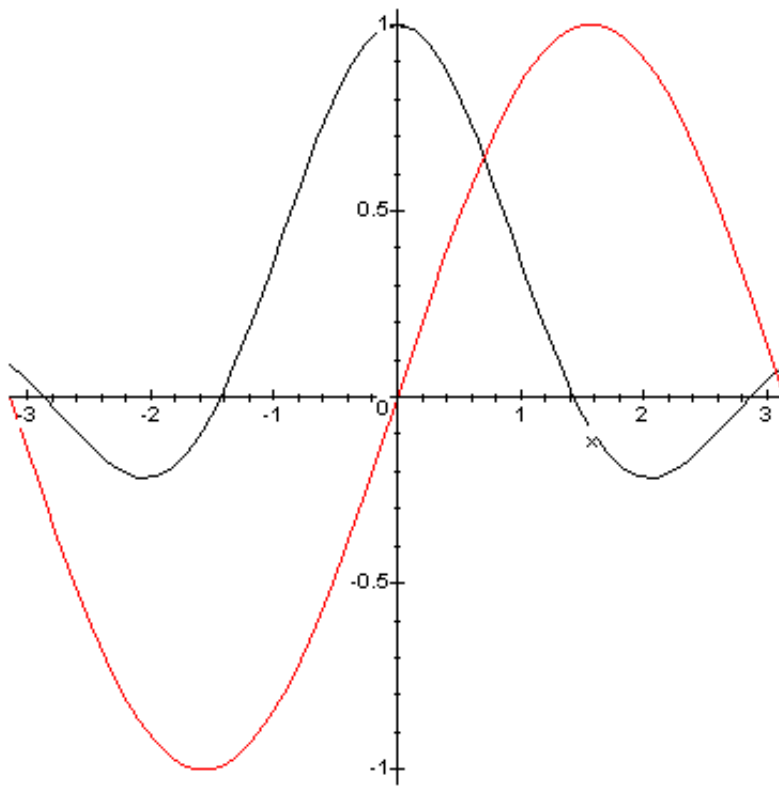


В документе строятся две функции - не создающая анимации функция $\sin(x)$ и создающая

анимацию функция $\sin(i*x)/(i*x)$, причем в качестве переменной t задана переменная i . Именно ее изменение и создает эффект анимации.

При исполнении функции `animate` и выделении полученного графика появляется панель проигрывания анимационных клипов. Она имеет кнопки управления с обозначениями, принятыми у современных магнитофонов. Пустив кнопку пуска (с треугольником, острием обращенным вправо), можно наблюдать изменение вида кривой для функции $\sin(i*x)/(i*x)$.

Приведем еще один стоп-кадр:



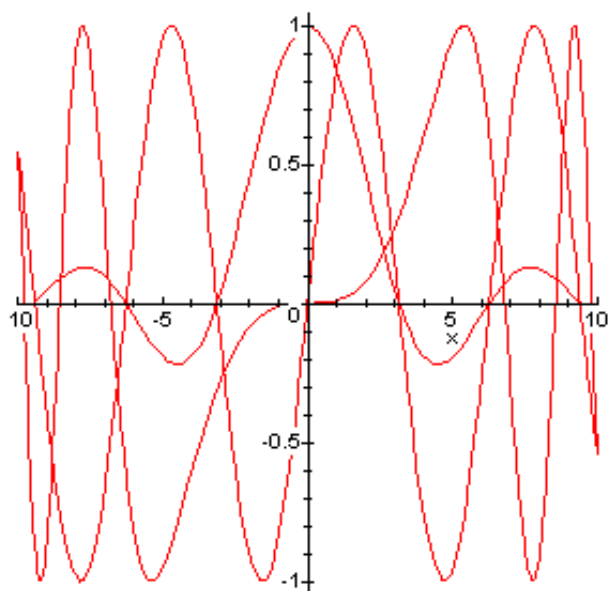
Нетрудно заметить, что на нем показана функция $\sin(i*x)/(i*x)$ в иной фазе, чем на предыдущем рисунке.

4.9. Совмещение графиков

Важное значение имеет возможность построения на одном рисунке графиков нескольких функций. В простейшем случае для построения таких графиков достаточно перечислить нужные функции и установить для них общие масштабы.

Пример 27

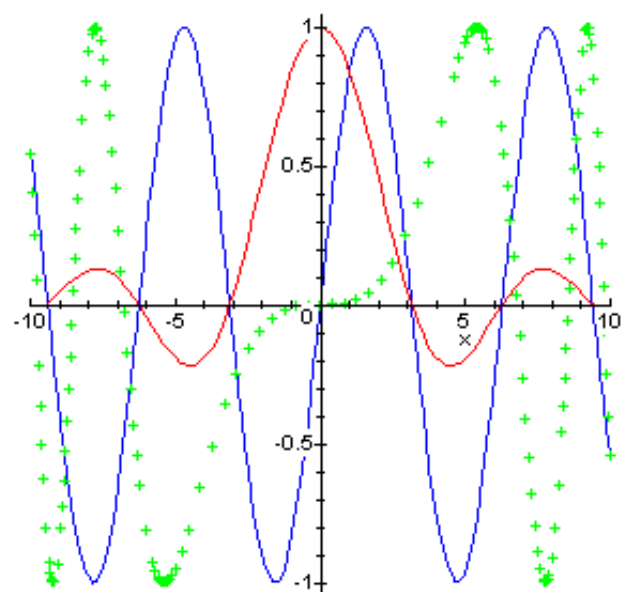
```
>plot([sin(x), sin(x)/x, sin(x^3/100)],x=-10..10,color=orange);
```



Обычно графики разных функций автоматически строятся разными цветами. Но они не всегда удовлетворяют пользователя - например, при распечатке графиков монохромным принтером некоторые кривые могут выглядеть слишком блеклыми или даже не пропечататься вообще. Используя [списки параметров](#) `color` (цвет линии) и `style` (стиль линий) можно добиться выразительного выделения кривых:

Пример 28

```
>plot([sin(x), sin(x)/x, sin(x^3/100)],x=-10..10,color=[blue,red,green],style=[line, line, point]);
```



5. 3D-графика в MAPLE

Для построения графиков трехмерных поверхностей Maple имеет встроенную в ядро функцию `plot3d`.

Она может использоваться в следующих форматах:

```
plot3d(expr1, x=a..b, y=c..d,p)
```

```
plot3d(f, a..b, c..d,p)
```

```
plot3d([exprf,exprg,exprh], s=a..b, t=c..d,p)
```

```
plot3d([f,g,h], a..b, c..d,p).
```

В двух первых формах `plot3d` применяется для построения обычного графика одной поверхности, в других формах - для построения графика с параметрической формой задания поверхности. В приведенных формах: `f`, `g` и `h` - функции, `expr1` - выражение, отражающее зависимость от `x` и `y`, `exprf`, `exprg` и `exprh` - выражения, задающие поверхность параметрически, `s`, `t`, `a` и `b` - числовые константы действительного типа, `end` - числовые константы или выражения действительного типа, `x`, `y`, `s` и `t` - имена независимых переменных и `p` - параметры-опции. Параметры для функции `plot3d` задаются аналогично их заданию для функции `plot`.

5.1. Особенности применения функции plot3d

С помощью параметров `r` можно в широких пределах управлять видом трехмерных графиков, выводя или убирая линии каркасной сетки, вводя функциональную окраску поверхностей, меняя угол их обзора и параметры освещения, изменяя вид координатных осей и т.д.

Следующие параметры функции `plot3d` задаются аналогично их заданию для функции `plot`: [*axesfont font color coords font labelfont linestyle numpoints scaling style symbol thickness title titlefont*](#).

Однако функция `plot3d` имеет ряд дополнительных специфических параметров:

| | |
|---|---|
| <code>ambientlight=[r,g,o]</code> | Задаёт интенсивность красного (red), зеленого (green) и синего (blue) цветов в относительных единицах (от 0 до 1). |
| <code>axes=f</code> | Задаёт вид координатных осей (BOXED, NORMAL, FRAME и NONE, по умолчанию NONE). |
| <code>grid=[m,nl]</code> | Задаёт число линии каркаса поверхности. |
| <code>gridstyle=x</code> | Задаёт стиль линий каркаса <code>x</code> ('rectangular' или 'triangular'). |
| <code>labels=[x,y,z]</code> | Задаёт надписи по осям (<code>x</code> , <code>y</code> и <code>z</code> — строки, по умолчанию пустые). |
| <code>light=[phi,theta,r,g, b]</code> | Задаёт углы, под которыми расположен источник освещения поверхности и интенсивности составляющих (<code>г</code> , <code>g</code> и <code>b</code>) цвета. |
| <code>lightmodel=x</code> | Задаёт режим яркости (соответственно, 'none', 'light1', 'light2', 'light3' и 'light4'). |
| <code>orientation=[theta, phi]</code> | Задаёт углы ориентации поверхности (по умолчанию 45 градусов). |
| <code>projection=r</code> | Задаёт перспективу при обзоре поверхности (<code>г</code> может быть числом 0 или 1, задающим включение или выключение перспективы, а также одной из строк 'FISHEYE', 'NORMAL', или 'ORTHOGONAL' (это соответствует численному значению <code>г</code> 0, 0.5, или 1, соответственно, причем по умолчанию задано <code>projection = ORTHOGONAL</code>). |
| <code>shading=s</code> | Задаёт направления, по которым меняется цвет функциональной окраски (значения <code>s</code> могут быть XYZ, XY, Z, ZGREYSCALE, ZHUE, NONE). |
| <code>tickmarks=[l,n,m]</code> | Задаёт характер маркировки по осям <code>x</code> , <code>y</code> и <code>z</code> (числа <code>l</code> , <code>n</code> и <code>m</code> имеют значения не менее 1). |
| <code>view=zmin..zmax или [xmin..xmax,ymin..ymax,zmin..zmax]</code> | Задаёт минимальные и максимальные координаты поверхности для ее видимых участков. |

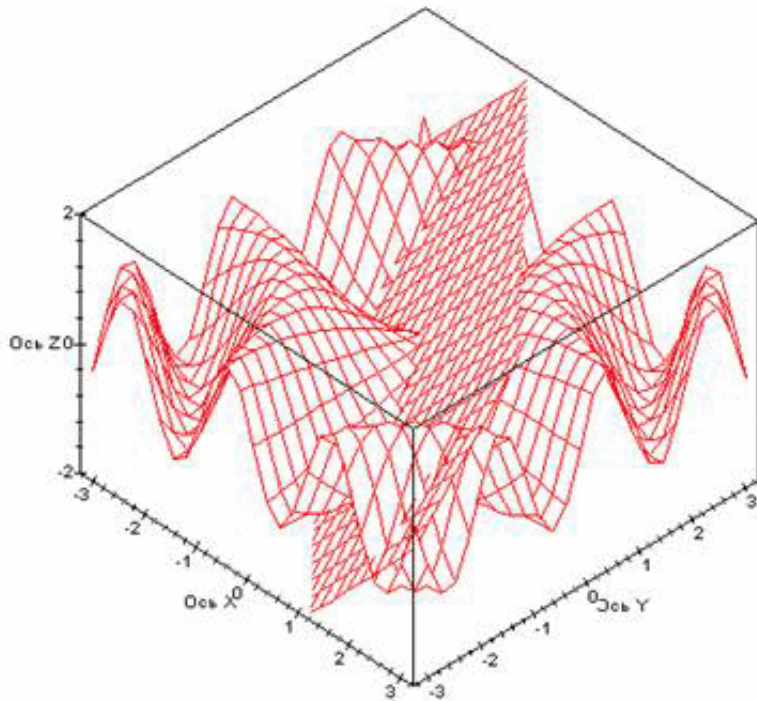
Пример 29

Рассмотрим пример построения следующей 3D-поверхности:

```
>plot3d({x+y, sin(x*y)}, x=-Pi..Pi, y=-Pi..Pi, orientation=[-48,56], view=-2..2, style=HIDDEN, axes=BOXED, shading=NONE, color=RED, labels=['Ось X','Ось Y','Ось Z'], title='Две
```

поверхности.);

Две поверхности.



Параметрически заданную поверхность можно изобразить также при помощи команды plot3d:

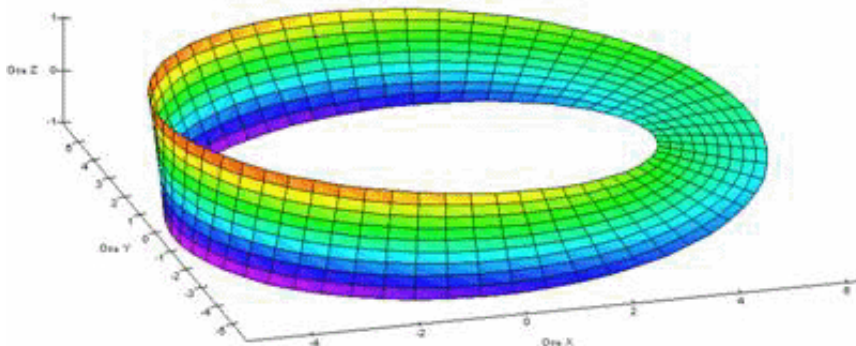
plot3d([expr1,expr2,expr3],var1=a..b,var2=c..d)

где координаты заданы выражениями expr1,expr2,expr3 от двух переменных var1, var2, которые изменяются на отрезках [a,b], [c,d].

Пример 30

```
>plot3d([(5+cos(1/2*t)*u)*cos(t), (5+cos(1/2*t)*u)*sin(t), sin(1/2*t)*u], t=0..2*Pi, u=-1..1,
grid=[60,10], scaling=CONSTRAINED, style=patch, orientation=[-106, 70], title='Лист Мёбиуса',
axes = FRAMED, shading=ZHUE, tickmarks=[5,8,3], labels=['Ось X', 'Ось Y', 'Ось Z']);
```

Лист Мёбиуса

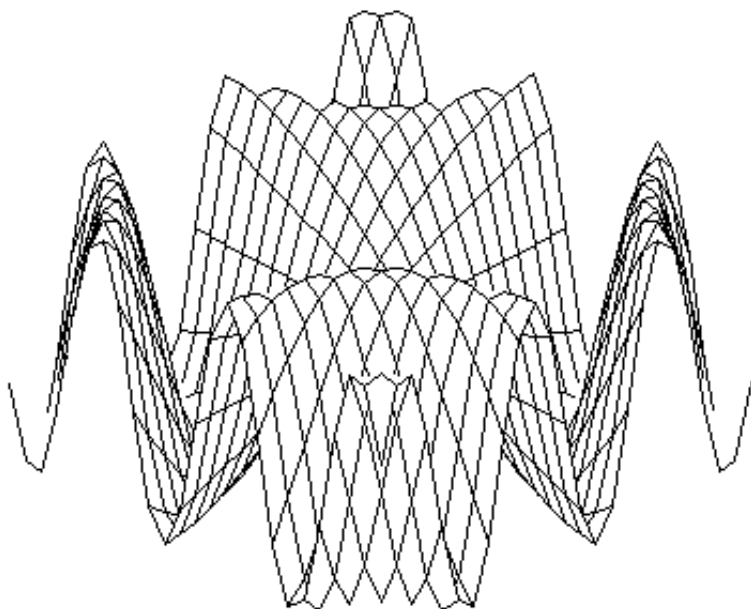


5.2. Простейшее построение 3D-поверхности с разным стилем

На следующем рисунке показаны примеры простейших построений графиков трехмерной поверхности. По умолчанию строится каркасная поверхность с функциональной окраской тонких линий каркаса и удалением невидимых линий. Чтобы график выглядел более четким, построение в первом примере задано линиями черного цвета с помощью параметра `color=black`.

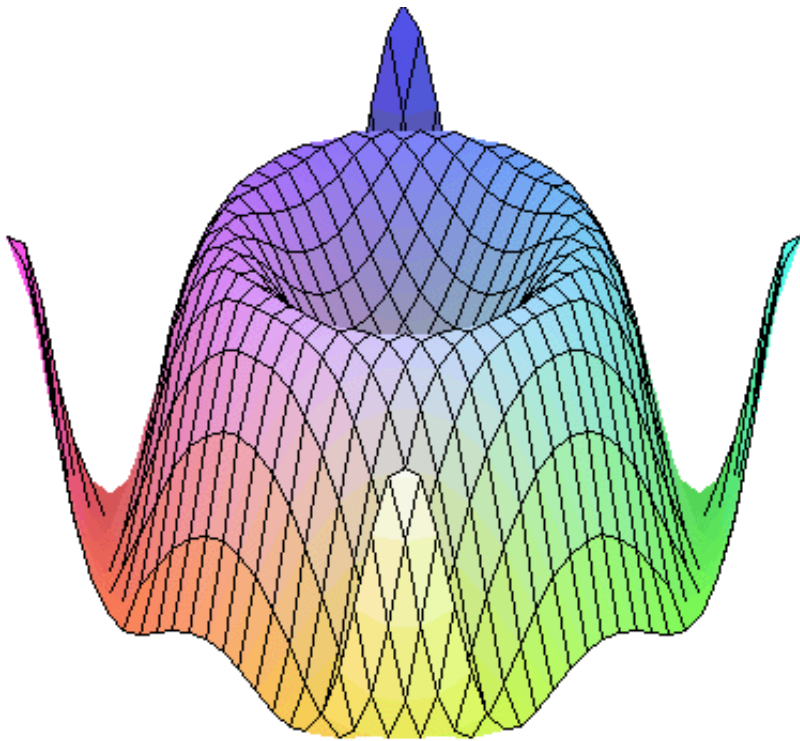
Пример 31

```
>plot3d(sin(x*y),x=-3..3,y=-3..3,color=black);
```



Пример 32

Во втором примере та же поверхность построена с параметром `style=patch`, что приводит к появлению ее функциональной окраски. Функциональная окраска делает рисунки более информативными.



Помимо значения `path`, можно задавать ряд других стилей для построения трехмерных поверхностей: `point` - точками, `contour` - контурными линиями, `line` - линиями, `hidden` - линиями каркаса с удалением невидимых линий, `wireframe` - линиями каркаса со всеми видимыми линиями, `patchnograd` - с раскраской, но без линий каркаса, `patchcontour` - раскраска с линиями равного уровня.

Цвет трехмерного графика может задаваться (как и у двумерного) опцией `col=c`, где `c` - цвет (оттенки цвета указывались выше). Возможно еще два алгоритма задания цвета:

HUE - алгоритм с заданием цвета в виде `color=f(x,y)`;

RGB - алгоритм с заданием цвета в виде `color=[exprg,exprg,exprb]`, где выражения `exprg`, `exprg` и `exprb` - выражения, задающие относительную значимость (от 0 до 1) основных цветов (красного - red, зеленого - green и синего - blue).

Удачный выбор углов обзора фигуры и применение функциональной окраски позволяют придать построениям трехмерных фигур весьма эффектный и реалистический вид.

5.3. неявно заданные 3-D поверхности

Рассмотрим трехмерные поверхности, заданные неявно, которые могут быть построены с помощью функции `implicitplot3d` (аналогичной функции [implicitplot](#) для двухмерных поверхностей).

1. эллипсоид:

```
> f:=x^2+y^2+z^2-1;
```

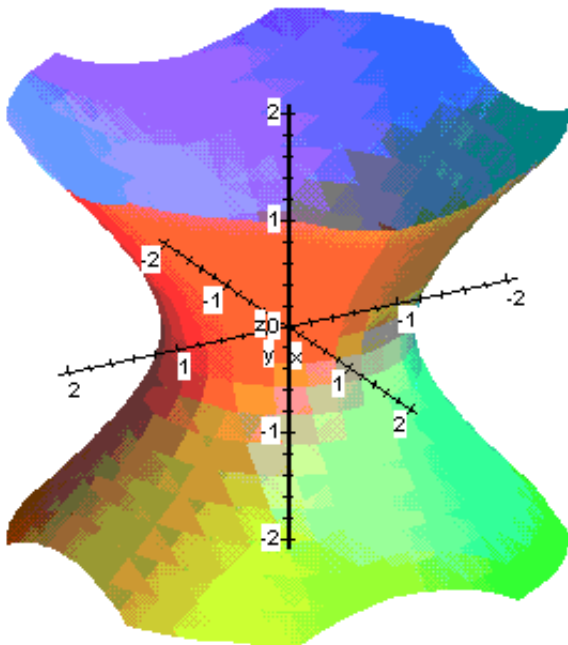
```
> implicitplot3d(f,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,style=patchnogrid);
```



2. гиперболоид:

```
> f:=x^2+y^2-z^2-1;
```

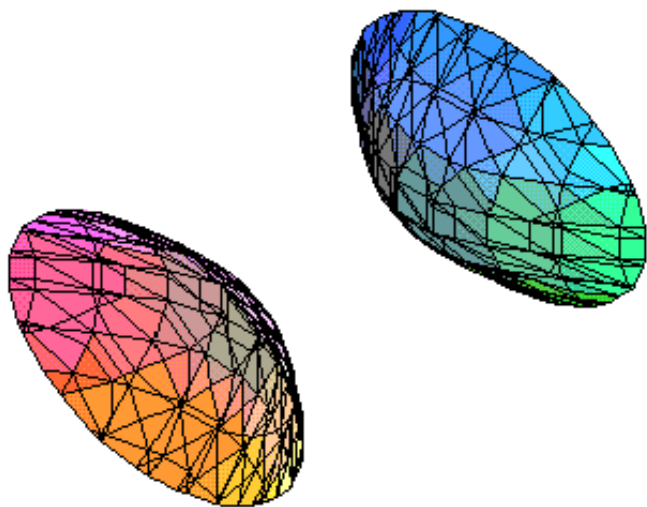
```
> implicitplot3d(f,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,style=patchnogrid,numpoints=3600, lightmodel=light3);
```



3. гиперболоид:

```
> f:=x^2-y^2-z^2-1;
```

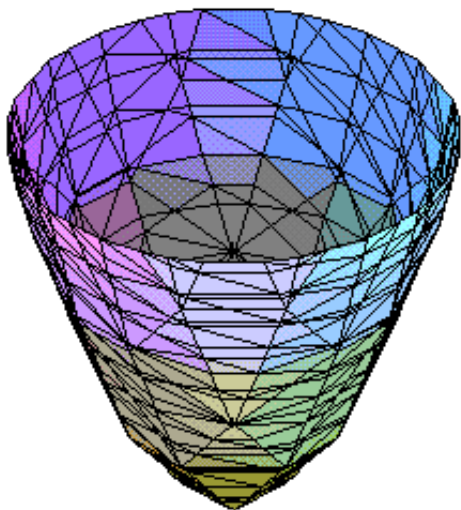
```
> implicitplot3d(f,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,style=patchnogrid);
```



4. эллиптический параболоид:

```
> f:=x^2+y^2-z;
```

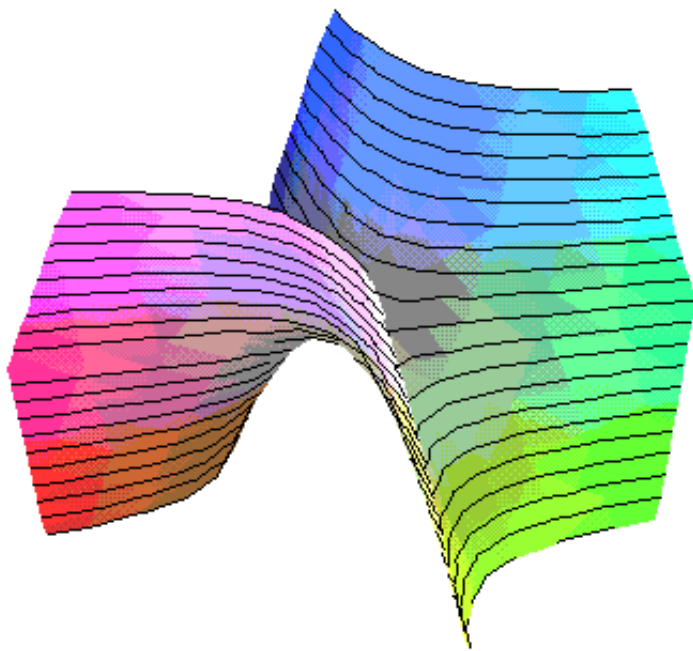
```
> implicitplot3d(f,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,style=patchnogrid);
```



5. гиперболический параболоид:

```
> f:=x^2-y^2-z;
```

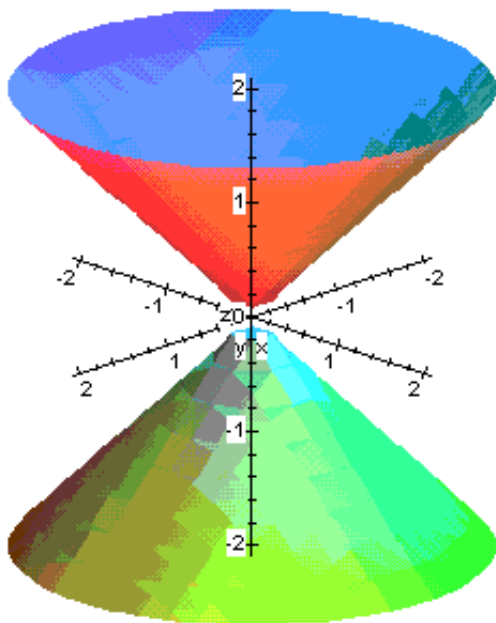
```
> implicitplot3d(f,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,style=patchnogrid);
```



6. конус:

```
> f:=x^2+y^2-z^2;
```

```
> implicitplot3d(f,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2,style=patchnogrid,axes=normal,
color=light3,numpoints=3600);
```



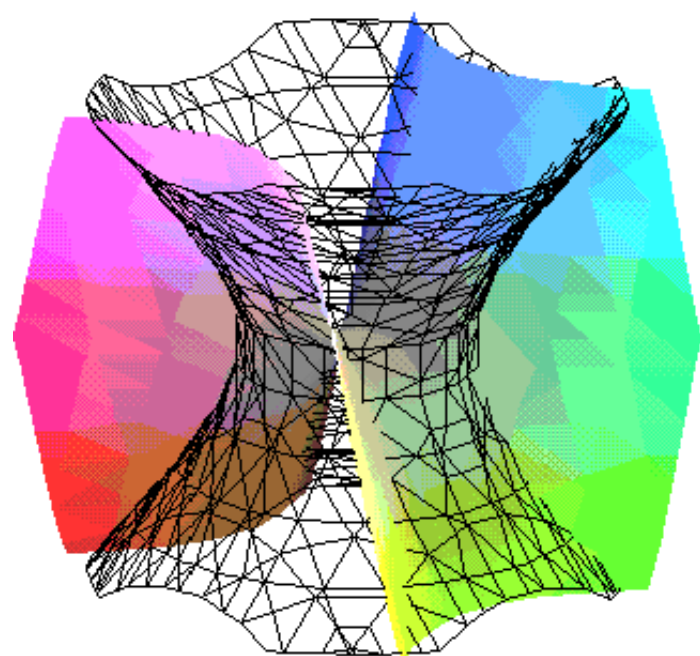
Также можно построить несколько поверхностей в одной системе координат.

Например, гиперболический параболоид и гиперboloид:

```
> with(plots):
```

```
> f:=implicitplot3d(x^2-y^2-z=0, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, style=patchnogrid):
```

```
> g:=implicitplot3d(x^2+y^2-z^2-1=0, x=-2..2, y=-2..2, z=-2..2, style=wireframe, color=black):
plots[display]([f,g]);
```

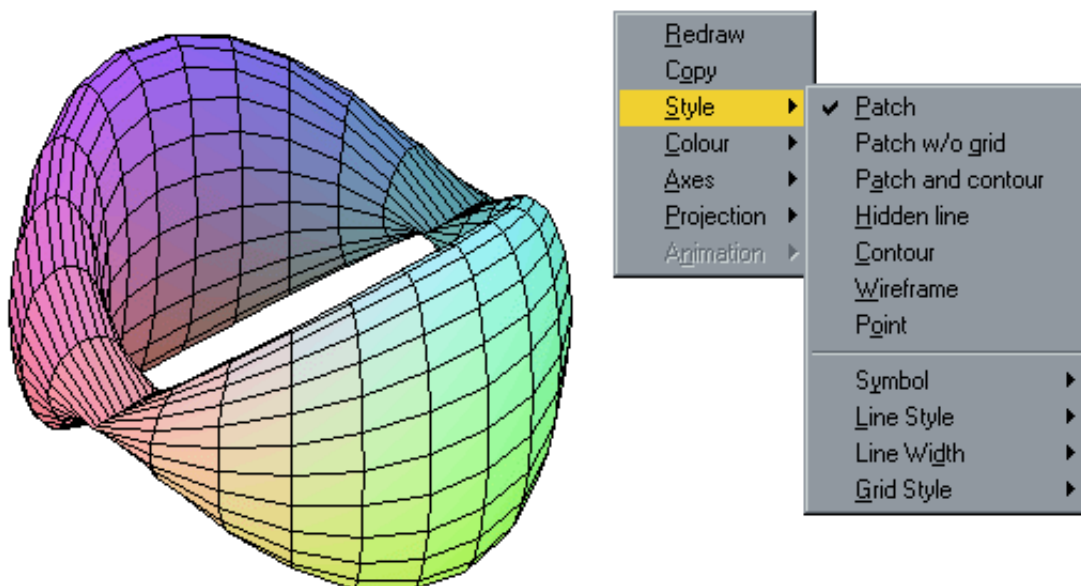


5.4. Построение графиков параметрически заданных поверхностей

На следующем рисунке показано построение поверхности при полном ее параметрическом задании. В этом случае поверхность задается тремя формулами, содержащимися в списке.

Пример 33

```
> plot3d([cos(t)*(10+2*sin(u)), sin(t)*(10+2*sin(u)), 2*sin(t)*cos(u)], t=0..2*Pi, u=-Pi..Pi);
```



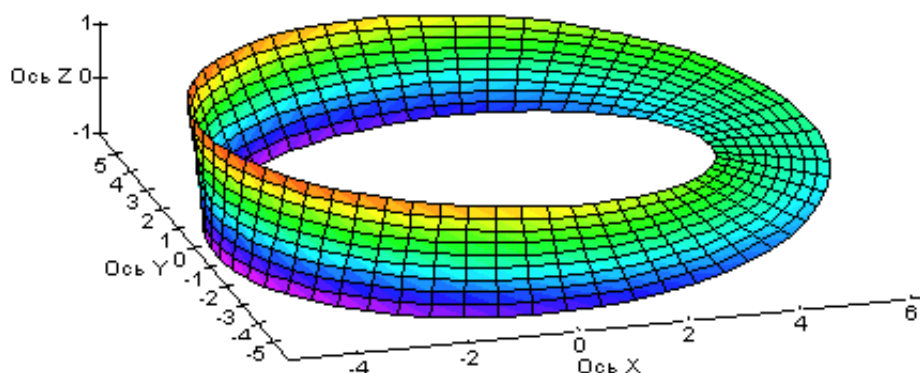
В данном случае функциональная окраска задана из меню, поэтому в состав функции соответствующий параметр не введен.

Рассмотрим еще один пример построения следующей 3D-поверхности:

Пример 34

```
> plot3d([(5+cos(1/2*t)*u)*cos(t), (5+cos(1/2*t)*u)*sin(t), sin(1/2*t)*u], t=0..2*Pi, u=-1..1,
grid=[60,10], scaling=CONSTRAINED, style=patch, orientation=[-106, 70], title='Лист
Мёбиуса', axes = FRAMED, shading=ZHUE, tickmarks=[5,8,3], labels=['Ось X', 'Ось Y', 'Ось
Z']);
```

Лист Мёбиуса



5.5. Построение ряда трехмерных фигур

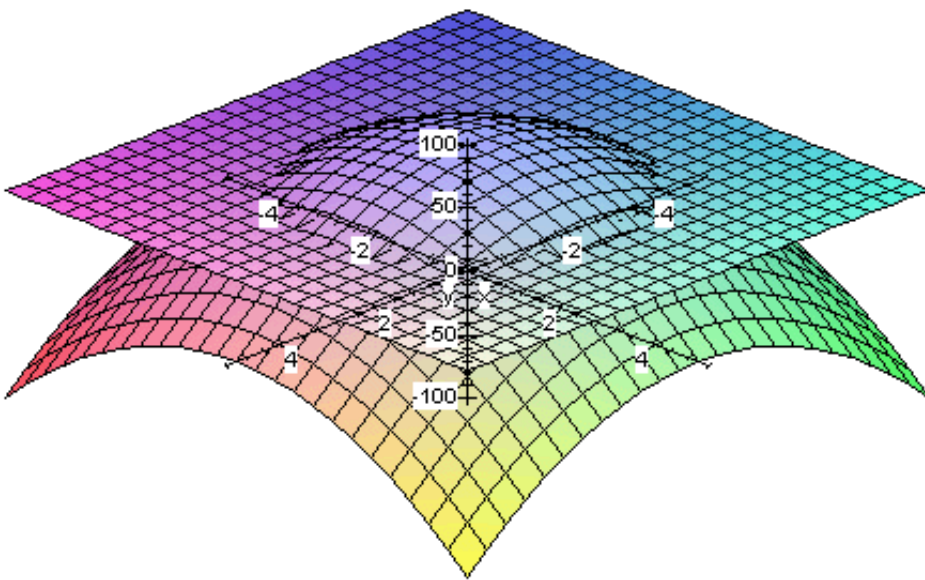
Функция `plot3d` позволяет строить одновременно несколько фигур, пересекающихся в пространстве.

При этом она обладает уникальной возможностью - автоматически вычисляет точки пересечения фигур и показывает только видимые части соответствующих фигур. Это создает графики фигур, выглядящие вполне естественно.

Для построения таких графиков достаточно вместо одной функции указать ряд функций. Пример такого построения для двух функций

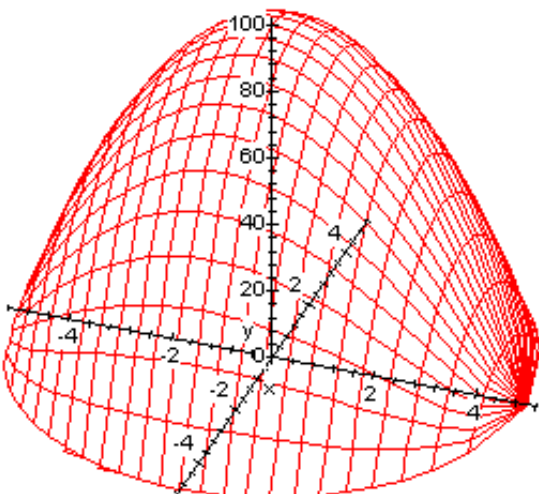
Пример 35

```
>plot3d( {100-4*x^2-4*y^2 , 64},x=-5..5,y=-5..5,axes=none, style=patch, axes=normal);
```



Если в данном примере кроме построения графиков двух функций нужно найти объем фигуры, полученной их пересечением, то выполним дополнительное построение:

```
>plot3d({100-4*x^2-4*y^2},x=-5..+5,y=-sqrt((100-4*x^2)/4)..sqrt((100-4*x^2)/4), style=wireframe, filled=true, style=HIDDEN, scaling=unconstrained, axes=normal, orientation=[-70,50], color=blue);
```



6. Основы интегрирования в MAPLE

Рассмотрим основные этапы вычисления кратных интегралов:

- построить и понять, как выглядит область интегрирования;
- решить, какую координатную систему можно использовать для упрощения процедуры интегрирования;
- определить пределы интегрирования;
- вычислить интеграл.

Как использование математического пакета Maple упрощает перечисленные этапы интегрирования?

Более эффективно и тщательно можно:

- с использованием функций `plot`, `plot3d` и `implicitplot3d` из библиотеки Maple визуализировать и построить область интегрирования;
- с использованием функций `int` and `evalf` вычислить интеграл как аналитическим, так и численным методом.

Тем не менее, пользователю Maple придется:

- решить какая координатная система будет использована в конкретном примере;
- по графику области интегрирования определить пределы интегрирования.

6.1. Двойные интегралы

Двойной интеграл можно вычислить, используя команду для вычисления определенного интеграла: `int(f(x),x=верхний предел..нижний предел)`.

Пример 36

Например, чтобы вычислить интеграл вида: $\int_0^2 \int_0^{x+2} x + y \, dy \, dx$, в рабочем поле пакета Maple введем:

```
>int(int(x+y,y=0..x+2),x=0..2).
```

Ответ: 16.

Необходимо заметить, что если команда `int` написана со строчной буквы `i`, то интеграл будет вычислен. Если же мы пишем команду `Int` с заглавной буквы `I`, то в результате Maple выдаст только вид интеграла: $\int_0^2 \int_0^{x+2} x + y \, dy \, dx$

Также Maple может вычислить интеграл численным методом, достаточно лишь заключить команду интегрирования в круглые скобки и добавить команду `evalf` впереди.

Пример 37

Например, чтобы вычислить $\int_0^3 \int_0^{x^2+1} \exp(-(x^2 + y^2)) \, dy \, dx$ используем следующую команду в Maple:

```
>evalf(int(int(exp(-(x^2+y^2)),y=0..x^2+1),x=0..3)).
```

Ответом будет .7231632654 или 0, 7231632654.

При интегрировании численным методом, Maple фактически использует определение двойного интеграла, определяет пределы интегрирования, строит разбиение области и приближенно вычисляет объем подынтегральной фигуры.

6.2. Тройные интегралы

Для вычисления тройных интегралов используется аналогичная команда `int()`, единственным отличием является то, что мы используем на 1 команду `int(f(x), x=верхний предел..нижний предел)` больше. Рассмотрим пример.

Пример 38

Необходимо вычислить $\int_0^{\pi/4} \int_0^{\ln \sec v} \int_{-\infty}^{2t} e^x dx dt dv$. Вводим в рабочем поле Maple команду следующего вида:

```
>int(int(int(exp(x),x=-infinity..2*t),t=0..ln(sec(v))),v=0..Pi/4);
```

На экране появляется ответ: $1/2 - \pi/8$. Заметим, что нижний предел по x , равный $-\infty$, не вызвал никаких проблем для вычисления. В команде мы обозначили $-\infty$ как `-infinity`. Тройные интегралы также можно вычислять численно, достаточно лишь заключить команду интегрирования в круглые скобки и добавить команду `evalf` впереди.

Пример 39

Например, для вычисления $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_1^{2-x-y} \frac{\sin z}{z} dz dy dx$ используем команду

```
>evalf(int(int(int(sin(z)/z,z=1..2-x-y),y=0..1-x),x=0..1));
```

Приближенным значением интеграла будет: .1259727389 или 0,1259727389.

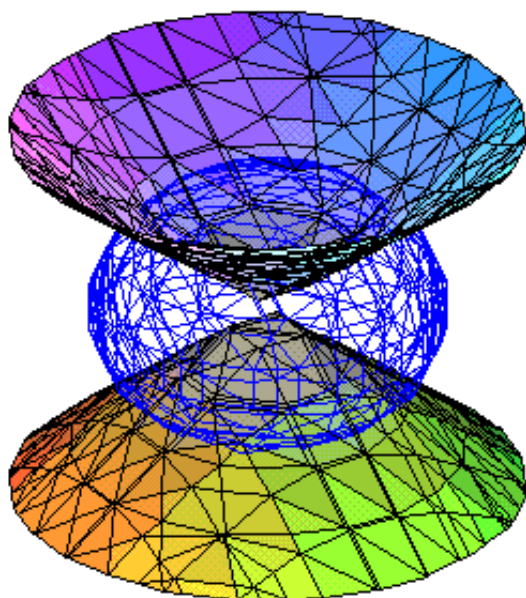
6.3. Другие координатные системы

В пакете Maple можно вычислять интегралы в полярных, цилиндрических и сферических системах координат. Например, для вычисления объема, лежащего внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ и снаружи конуса $z^2 = x^2 + y^2$ из [Примера 15](#) в сферических координатах, построим в Maple график пересечения поверхностей.

Пример 40

`>with(plots):`

```
> k:=implicitplot3d(x^2+y^2+z^2=2,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2, style=wireframe,
color=blue):m:=implicitplot3d(z^2=x^2+y^2,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2, style=patch):display ([k,m]);
```



Далее воспользуемся уже приведенным в сферическую систему координат интегралом:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi = \frac{8\pi}{3}.$$

и используем функции Maple для его вычисления:

```
>int(int(int(rho^2*sin(phi),rho=0..sqrt(2)),phi=Pi/4..3*Pi/4),theta=0..2*Pi);
```

Результат интегрирования: $V = \frac{8\pi}{3}$.

7. Примеры на вычисление двойных и тройных интегралов

Для вычисления двойных и тройных интегралов в пакете Maple не требуется много времени.

Пример 41

Например, чтобы вычислить $\int_2^4 \int_1^2 x^2 y dy dx$ мы используем следующую команду:

```
> Int(Int(x^2*y,y=1..2),x=2..4) = int(int(x^2*y,y=1..2),x=2..4);
```

$$\int_2^4 \int_1^2 x^2 y dy dx = 28.$$

Заметим, что интегрирование осуществляется следующим образом: сначала вычисляется внутренний интеграл, и только затем - внешний. Безусловно, в данном примере пределы интегрирования не вызывают никаких проблем. Сложнее дело обстоит с более трудными для восприятия областями интегрирования. Рассмотрим следующие примеры.

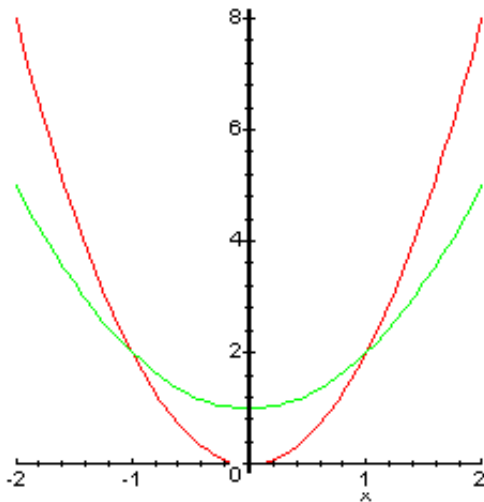
7.1. Задача 1.

Вычислить $\iint_D (x+2y) dA$, где D - область, ограниченная параболой $y = 2x^2$ и $y = 1+x^2$.

Решение

1. Решим пример без использования системы Maple.

Построим область интегрирования:



Определив пределы интегрирования по графику, получим интеграл:

$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y) dy dx.$$

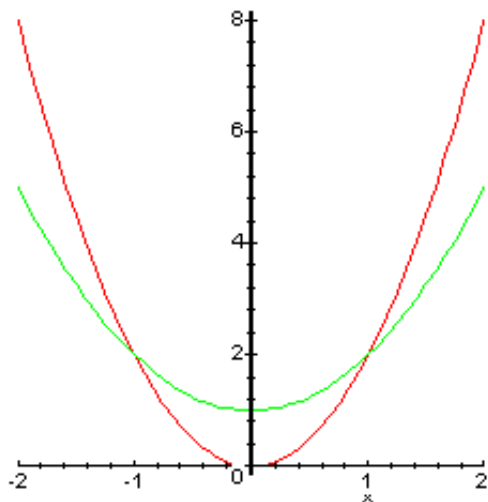
Вычислим данный интеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y) dy dx &= \int_{-1}^1 \left((xy + y^2) \Big|_{2x^2}^{1+x^2} \right) dx = \int_{-1}^1 (x(1+x^2) + (1+x^2)^2 - 2x^3 - 4x^4) dx = \\ &= \int_{-1}^1 (-3x^4 - x^3 + 2x^2 + x + 1) dx = \left(-\frac{3}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x \right) \Big|_{-1}^1 = \\ &= -\frac{3}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + 1 - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = -\frac{6}{5} + \frac{4}{3} + 2 = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

2. Решим пример в пакете Maple.

Построим область интегрирования:

```
> plot([2*x^2, 1+x^2], x=-2..2);
```



По графику определяем, что пределы интегрирования по x будут от -1 до 1 , а по y от $y = 2x^2$ до $y = 1 + x^2$ соответственно.

В рабочем поле Maple вводим следующую команду:

```
> Int(Int(x+2*y, y=2*x^2..1+x^2), x=-1..1);
```

получаем интеграл:

$$\int_{-1}^1 \int_{2x^2}^{1+x^2} (x+2y) dy dx.$$

Вычисляем его

```
> int(int(x+2*y, y=2*x^2..1+x^2), x=-1..1);
```

Ответ: $\frac{32}{15}$.

7.2. Задача 2.

Вычислить $\iint_D xy \, dA$, где D - область ограниченная прямой $y = x - 1$ и параболой $y^2 = 2x + 6$.

Решение

Изобразим на плоскости область D . Для этого найдем точки пересечения прямой и параболы.

```
> f:=y=x-1; g:=y^2=2*x+6;
```

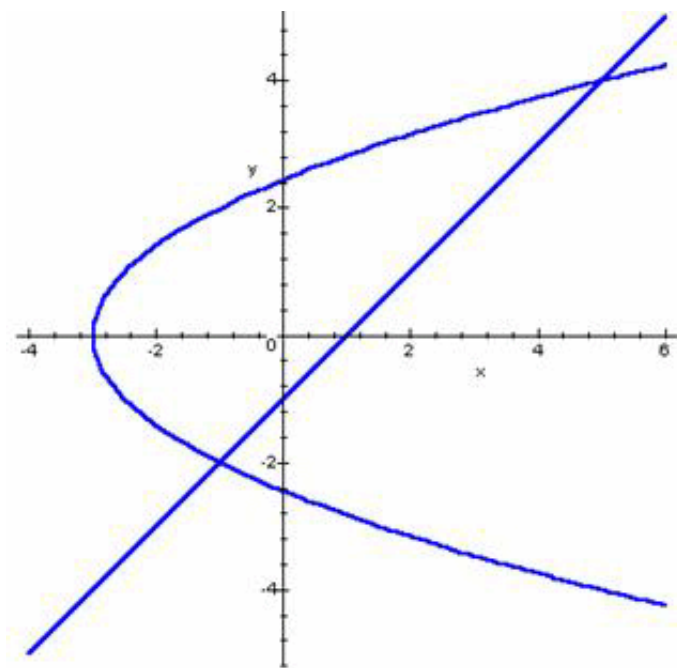
Получим:

```
f := y = x - 1;  
g := y^2 = 2x + 6
```

и изобразим данную область в Maple с использованием команды `implicitplot` для неявно заданной функции:

```
> with(plots):
```

```
> implicitplot({f,g},x=-5..6,y=-5..5,color=blue,thickness=2);
```



Решаем систему уравнений и находим точки пересечения аналитически:

```
> solve({f,g},{x,y});
```

```
{y = -2, x = -1}, {y = 4, x = 5}
```

В заключении, вычисляем интеграл по заданной области:

```
> Int(Int(x*y,x=y^2/2-3..y+1),y=-2..4);
```

$$\int_{-2}^4 \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy \, dx \, dy$$

и находим его числовое значение:

```
> value(Int(Int(x*y,x=y^2/2-3..y+1),y=-2..4));
```

36.

7.3. Задача 3.

Найти массу тела с постоянной плотностью ρ , которое ограничено параболическим цилиндром $x = y^2$ и плоскостями $x = z$, $z = 0$, $x = 1$.

Решение

Сначала изобразим область интегрирования.

```
> restart:with(plottools):with(plots):
```

```
with(student):
```

```
f:=x=y^2; g:=x=z; h:=z=0; i:=x=1;
```

```
f:=x=y^2;
```

```
g:=x=z;
```

```
h:=z=0;
```

```
i:=x=1.
```

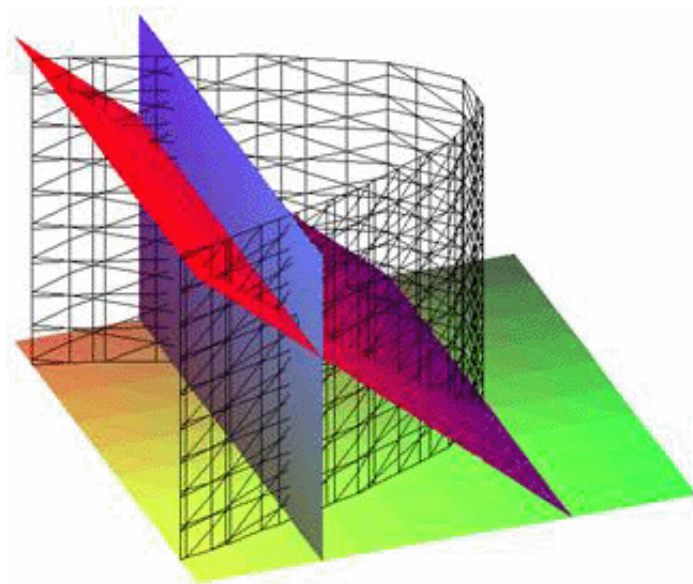
```
>P1:=implicitplot3d({f},x=-.5..1.5,y=-1.5..1.5,z=0..1.5,style=wireframe,color=black,thickness=1):
```

```
P2:=implicitplot3d({g},x=-.5..1.5,y=-1.5..1.5,z=0..1.5,style=patchnogrid,shading=z):
```

```
P3:=implicitplot3d({h},x=-.5..1.5,y=-1.5..1.5,z=0..1.5,style=patchnogrid):
```

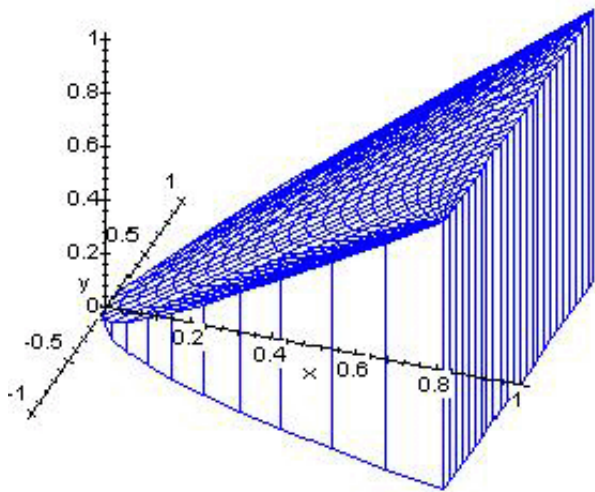
```
P4:=implicitplot3d({i},x=-.5..1.5,y=-1.5..1.5,z=0..1.5,style=patchnogrid,lightmodel=light2):
```

```
display([P1,P2,P3,P4],orientation=[70,50]);
```



Изобразим область интегрирования в более крупном масштабе:

```
>plot3d({x},x=y^2...1,y=-1..1,style=wireframe,filled=true,style=HIDDEN,scaling=unconstrained,axes=normal,orientation=[-70,50],color=blue);
```

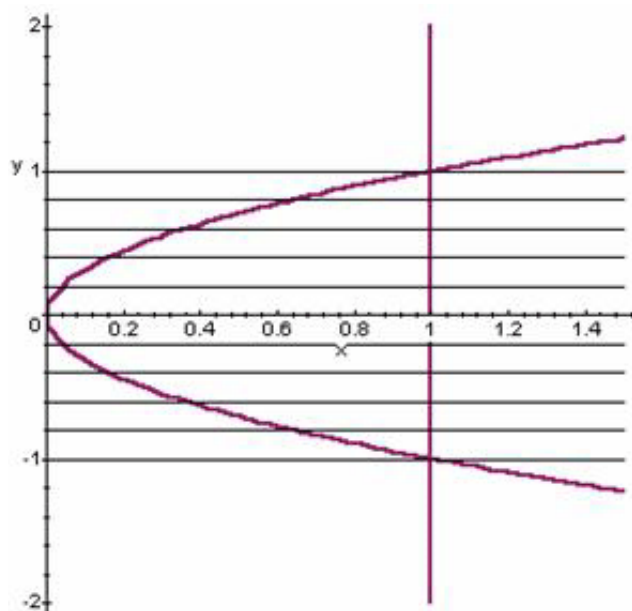


Отдельно изобразим проекцию на плоскость Oxy :

```
> k:=implicitplot({f,i},x=0..1.5,y=-2..2, thickness=2, color=maroon):
```

```
m:=implicitplot({y=0.2,y=0.4, y=-0.2,y=-0.4, y=-0.6,y=0.6, y=-0.8,y=0.8, y=-1,y=1},
x=0..1.5,y=-2..2, thickness=1, color=black):
```

```
plots[display]([k,m]);
```



Определим порядок интегрирования следующим: $dzdx dy$. Т.о. разбиение области происходит прямыми, параллельными оси Ox .

Найдем точки пересечения прямой и параболы:

```
> solve({f,i},{x,y});
```

```
{x = 1, y = 1}, {x = 1, y = -1}
```

Проинтегрируем плотность (ρ):

```
> Int(Int(Int(rho,z=0..x),x=y^2..1),y=-1..1);
```

$$\int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \int_0^x \rho dz dx dy$$

и найдем значение данного интеграла:

```
> value(Int(Int(Int(rho,z=0..x),x=y^2..1),y=-1..1));
```

$$\frac{4\rho}{5}.$$

7.4. Задача 4.

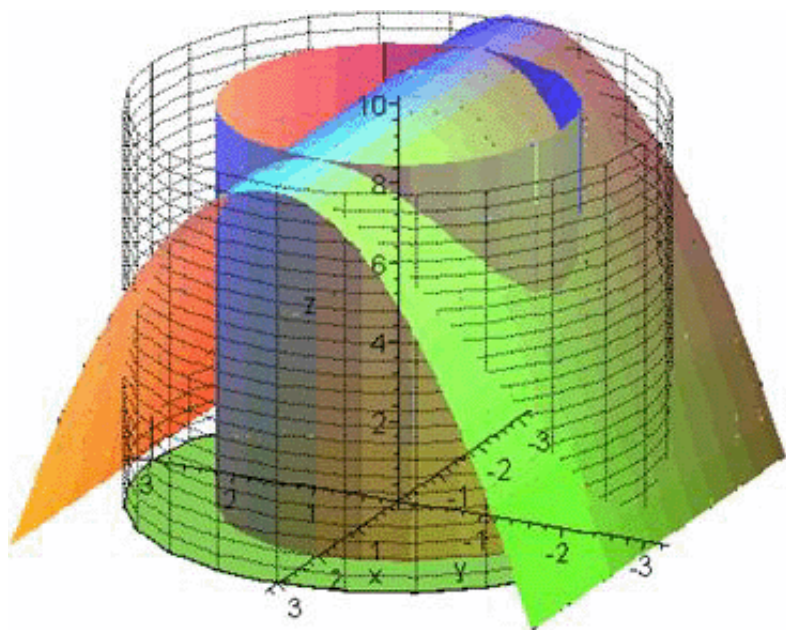
Вычислить объём тела, ограниченного данными поверхностями, с помощью тройного интеграла

$$z = 10 - x^2, \quad z = 0, \quad x^2 + y^2 = 9, \quad x^2 + y^2 = 4$$

Решение

Изобразим заданные поверхности:

```
>restart:with(plottools):with(plots):with(student):  
>Q1:=cylinder([0,0,0],3,.01):  
>Q2:=cylinderplot(3,theta=0..2*Pi,z=0..10,style=wireframe,linestyle=3,color=BLACK):  
>Q3:=cylinderplot(2,theta=0..2*Pi,z=0..10,style=patchnogrid,lightmodel=light2):  
>Q4:=plot3d(10-x^2,x=sqrt(10)..sqrt(10),y=-sqrt(10)..sqrt(10),style=patchnogrid):  
>plots[display]([Q1,Q2,Q3,Q4],axes=normal,orientation=[116,63]);
```

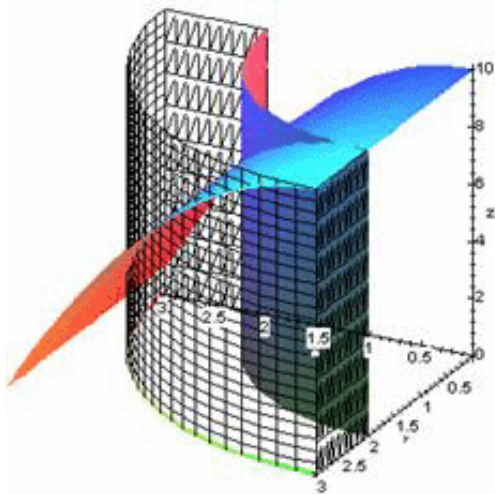


Так как фигура симметрична относительно осей Ox и Oy , то изобразим четверть тела, объём которого требуется найти:

```
> restart:with(plottools):with(plots):with(student):  
>Q1:=cylinderplot(3,theta=0..Pi/2,z=0..0.1):  
>Q2:=cylinderplot(3,theta=0..Pi/2,z=0..10,style=wireframe,linestyle=3,color=BLACK):  
>Q3:=cylinderplot(2,theta=0..Pi/2,z=0..10,style=patchnogrid,lightmodel=light2):  
>Q4:=plot3d(10-x^2,x=0..3,y=0..3,style=patchnogrid):  
>Q5:=implicitplot3d(x=0,x=0..3,y=2..3,z=0..10,style=wireframe,linestyle=3,color=BLACK):
```

```
>Q6:=implicitplot3d(y=0,x=2..3,y=0..3,z=0..10,style=wireframe,linestyle=3,color=BLACK):
```

```
>plots[display]([Q1,Q2,Q3,Q4,Q5,Q6],axes=normal,orientation=[116,63]);
```



Перейдем в цилиндрическую систему координат:

```
>restart:with(plottools):with(plots):
```

```
>with(student): print(`Переходим в цилиндрическую систему координат:`);
```

```
>assign(x = rho*cos(phi), y = rho*sin(phi), z = z1);
```

```
>print(`Наше уравнение примет вид:`);
```

```
>z:=10-x^2;
```

```
>print(`Якобиан:`);
```

```
>I=rho;
```

```
>V=4*Tripleint(rho,z1=0..(10-(rho*cos(phi))^2), rho=2..3, phi=0..Pi/2);
```

```
>V=value(4*Tripleint(rho,z1=0..(10-(rho*cos(phi))^2), rho=2..3, phi=0..Pi/2));
```

$$V = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_2^3 \int_0^{10-\rho^2 \cos^2(\phi)} \rho \, dz \, d\rho \, d\phi, \quad V = \frac{135\pi}{4}$$

Здесь мы вычисляем интеграл как 1/4 тела, т.к. оно симметрично относительно оси Ох и Оу. Поэтому предел по ϕ будет 1/4 от полного оборота, т.е. $1/4 \times 2\pi = \pi/2$. Пределы по переменной ρ : от 2 до 3. Пределы по $z1$ расставляем учитывая то, что $z:=10-x^2$ и $x = \rho \cos(\phi)$.

7.4. Пример 4.

Найти $\iiint_R z dV$, где R - область внутри сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ и над параболоидом $z = (x-1)^2 + y^2$.

Решение

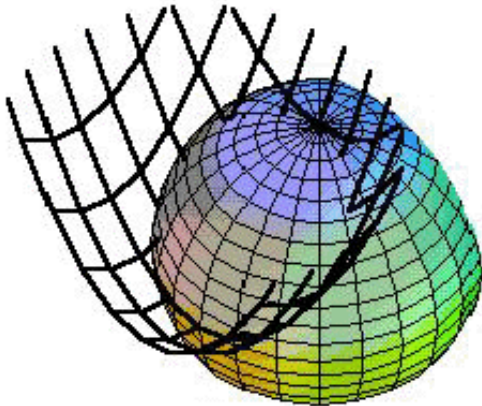
Проведем построение области интегрирования.

```
>with(plots):
```

```
> sphere:=plot3d([sin(phi)*cos(theta),sin(phi)*sin(theta),cos(phi)],phi=0..Pi,theta=0..2*Pi,
scaling=constrained, style=PATCH):
```

```
> paraboloid := plot3d((x-1)^2+y^2,x=-3..3,y=-3..3,shading=zhue, style=wireframe, shading=none,
thickness=2):
```

```
> display3d({sphere,paraboloid},scaling=constrained, view=[-5..1.5,-1.5..1.5,-.5..1.5]);
```



Когда мы производим сечение данной области, то видим, что область ограничена снизу параболоидом, а сверху - сферой, т.о. $z \geq (x-1)^2 + y^2$ и $z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$. Далее нужно найти область пересечения двух поверхностей, приравняв уравнения двух поверхностей:

```
> S:= solve(x^2+y^2+((x-1)^2+y^2)^2=1,y);
```

$$S := \frac{1}{2}\sqrt{-6+2\sqrt{9-8x}-4x^2+8x}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{-6+2\sqrt{9-8x}-4x^2+8x},$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{-6-2\sqrt{9-8x}-4x^2+8x}, \quad -\frac{1}{2}\sqrt{-6-2\sqrt{9-8x}-4x^2+8x}$$

Проигнорируем существование двух последних решений, т.к. они могут быть комплексными. Пусть $y_0 > 0$.

```
> y0 := S[1];
```

$$y_0 := \frac{1}{2}\sqrt{-6+2\sqrt{9-8x}-4x^2+8x}.$$

Пределы внутреннего интеграла определены от 0 до 1, поэтому интеграл будет выглядеть

следующим образом:

$$\int_0^1 \int_{-y_0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \int_{(x-1)^2+y^2}^0 z dz dy dx$$

> Int(Int(int(z,z = (x-1)^2+y^2 .. sqrt(1-x^2-y^2)),y = -y0' .. 'y0'),x = 0 .. 1)=int(int(int(z,z = (x-1)^2+y^2 .. sqrt(1-x^2-y^2)),y = -y0 .. y0),x = 0 .. 1);

$$\int_0^1 \int_{-y_0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}((x-1)^2 + y^2) \right) dy dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-\frac{1}{160}k^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2} - (x-1)^2 \right) k^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{k} - \frac{1}{2}x^2\sqrt{k} - \frac{1}{2}(x-1)^4\sqrt{k} \right] dx,$$

где $k := -6 + 2\sqrt{9-8x} - 4x^2 + 8x$

> evalf(int(int(int(z,z = (x-1)^2+y^2 .. sqrt(1-x^2-y^2)),y = -y0 .. y0),x = 0 .. 1));

0,1722182285

7.5. Задача 5.

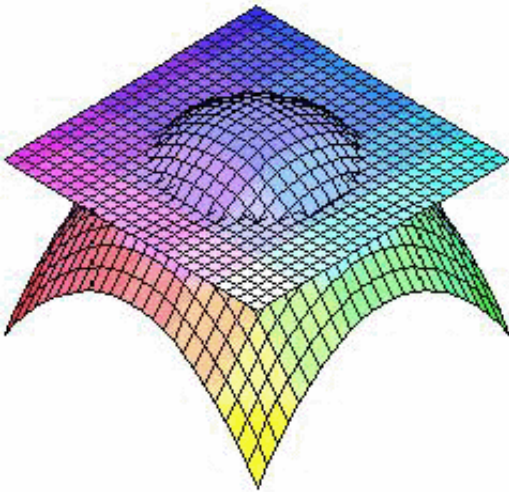
Вычислить интеграл от функции $f(x, y, z) = x^2 + y^2 z^2 + 2$ по области D, ограниченной параболоидом $z = 100 - 4x^2 - 4y^2$ и $z = 64$.

Решение

Определим, как выглядит область интегрирования D. Для этого используем функцию plot3d:

`>with(plots):`

`> plot3d({100-4*x^2-4*y^2, 64}, x= -5..5, y=-5..5, axes=none, style=patch);`



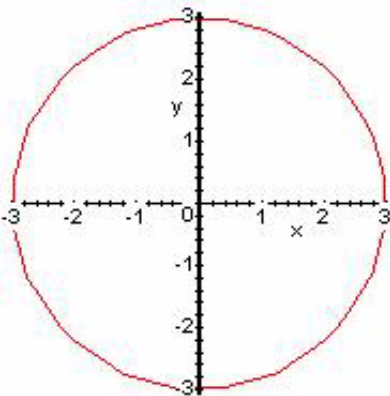
Т.о. мы получили изображение параболоида и плоскости, его пересекающей. Нетрудно заметить, что пересечением этих двух поверхностей будет окружность. Найдем ее радиус. Для этого составим уравнение, приравняем уравнение параболоида и плоскости:

$$64 = 100 - 4x^2 - 4y^2$$

После приведения подобных слагаемых, уравнение выглядит следующим образом: $x^2 + y^2 = 9$.

Это уравнение окружности с радиусом 3. Используем возможность пакета Maple для нахождения пересечения двух поверхностей. Построим двухмерный график с использованием функции implicitplot (заметим, что значения x и y заданы произвольным образом):

`>implicitplot(64 = 100 - 4x^2 - 4y^2, x = -10..10, y=-10..10);`



Получили график окружности с центром в начале координат и радиусом 3.

Теперь мы знаем, что область интегрирования - это параболоид, ограниченный плоскостью $z = 64$; проекция пересечения двух поверхностей на плоскость Oxy - круг с центром в начале координат и радиусом 3.

Расставим пределы интегрирования:

$$\int_D (x^2 + y^2 z^2 + 2) dx dy dz = \int_{-3}^3 \left(\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \left(\int_{z=64}^{100-4x^2-4y^2} (x^2 + y^2 z^2 + 2) dz \right) dy \right) dx$$

Эта часть решения была самой трудоемкой. Далее для вычисления интеграла используем функции Maple.

Проинтегрируем получившийся тройной интеграл шаг за шагом: сначала по dz , потом по dy , наконец по dx . Это позволит нам упростить промежуточные результаты, и в случае ошибки, ее будет легче найти и исправить, чем при вычислении тройного интеграла. Используем следующие имена переменных: `res1`, `res2` and `res3`. `Res` = "результат промежуточного вычисления":

```
>res1:=int(x^2+y^2*z^2+2,z=64..100-4*x^2-4*y^2);
```

```
>res2:=int(res1,y=-sqrt(9-x^2)..sqrt(9-x^2));
```

```
>res3:=int(res2,x=-3..3);
```

$$\begin{aligned} res1 := & 28x^2 - 4x^4 - 40004x^2y^2 + 245944y^2 - 40000y^4 + 1600x^4y^2 + 3200x^2y^4 \\ & + 1600y^6 - \frac{64}{3}y^2x^6 - 64y^4x^4 - 64y^6x^2 - \frac{64}{3}y^8 + 72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} res2 := & 144\sqrt{9-x^2} + 56x^2\sqrt{9-x^2} - 8x^4\sqrt{9-x^2} - \frac{80008}{3}x^2(9-x^2)^{3/2} \\ & - \frac{128}{27}(9-x^2)^{9/2} + \frac{3200}{7}(9-x^2)^{7/2} + \frac{3200}{3}x^4(9-x^2)^{3/2} \\ & + 1280x^2(9-x^2)^{5/2} - \frac{128}{9}(9-x^2)^{3/2}x^6 - \frac{128}{5}(9-x^2)^{5/2}x^4 \\ & - \frac{128}{7}(9-x^2)^{7/2}x^2 - 16000(9-x^2)^{5/2} + \frac{491888}{3}(9-x^2)^{3/2} \end{aligned}$$

$$res3 := \frac{6536619}{5} \pi$$

или в десятичном формате:

```
>evalf(res3);
```

$$4.107 \times 10^6$$

Можем заметить, что вся запись вычислений заняла только 3 строки, а их результат и время вычисления не заняли много времени. Безусловно, такой же результат можно получить

просчитав интеграл вручную на листке бумаги, но вероятность ошибки в вычислении и время, потраченное на него, были бы намного выше.

Этот же пример можно решить в цилиндрической координатной системе. Используем замену переменных: $x = \rho \cos \phi$, $y = \rho \sin \phi$, $z = z$. Получим интеграл вида:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^3 \left(\int_{z=64}^{100-4\rho^2} (\rho^2 \cos^2 \phi + \rho^2 \sin^2 \phi * z^2 + 2) dz \right) \rho d\rho d\phi$$

Проинтегрируем по шагам:

```
>res4:=int(rho^2*cos(phi)^2+rho^2*sin(phi)^2*z^2+2,z=64..100-4*rho^2);
```

```
>res5:= int(res4*rho,rho=0..3);
```

```
>res6:= int(res5,phi=0..2*Pi);
```

$$\begin{aligned} res4 := & 36 \rho^2 \cos(\phi)^2 - 4 \rho^4 \cos(\phi)^2 - 8 \rho^2 + 245952 \rho^2 \sin(\phi)^2 \\ & - 40000 \rho^4 \sin(\phi)^2 + 1600 \rho^6 \sin(\phi)^2 - \frac{64}{3} \rho^8 \sin(\phi)^2 + 72 \end{aligned}$$

$$res5 := \frac{6533784}{5} \sin(\phi)^2 + 243 \cos(\phi)^2 + 162$$

$$res6 := \frac{6536619}{5} \pi$$

Результаты, полученные 1 и 2 способом, совпадают и равны $\frac{6536619}{5} \pi$.

8. Литература

Были использованы:

фундаментальные математические издания, учебные пособия:



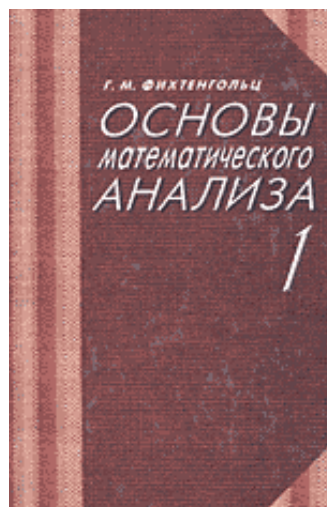
Ильин В.А., Садовничий В.А.,
Сендов Бл.Х.
«Математический анализ.
Часть вторая». – М.:Изд-во
МГУ, 1987.



Ляшко И.И.,
Боярчук А.К.,
Гай Я.Г.,
Головач Г.П.
«Справочное
пособие по
высшей
математике». М.:
УРСС, 2001.



Кудрявцев Л. Д. Краткий курс
математического анализа. Том
1. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002.



Фихтенгольц
Г.М. Основы
математического
анализа. Часть 1
– М.: Лань, 2002.

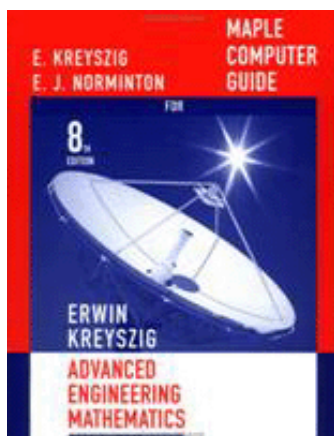
так и специализированные методические разработки по компьютерной математике и
символьным вычислениям:



Прохоров Г.В., Колбеев В.В.,
Желнов К.И., Леденев М.А.
«Математический пакет
Maple V Release 4». 1998.



MAPLE 6:
Решение
математических,
статистических,
инженерно-
физических задач
+ CD-ROM.
Аладьев В.З.,
Шишаков М.Л.
2002.



Maple Computer Guide for Advanced Engineering Mathematics (8th Ed.) by Erwin Kreyszig



Heal K.M., Hansen M.L., Rickard K.M. «Maple 6 Learning Guide». Waterloo Maple Inc., 2000.

наряду с интернет-разработками российской и зарубежной высшей школы:

1. [Математический образовательный портал](#)
2. [Ростовский Государственный Университет](#)
3. [University of Illinois at Chicago](#)
4. [The 'Hungarian Electronic Journal of Sciences'](#)
5. [Worcester polytechnic institute](#)
6. [Brock University, St. Catharines, Ontario, Canada](#)

