Первые восемь глав:

1 Введение.

2 Предел числовой последовательности.

3 Предел функции. Непрерывность функции.

4 Дифференциальное исчисление функций одной переменной.

5 Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана.

6 Интегральное исчисление функций одной переменной. Интеграл Римана-Стилтьеса.

7 Элементы общей топологии и функционального анализа.

8 Дифференциальное исчисление функций многих переменных.

включены в первую и вторую части курса.

9 Числовые ряды.

9.1 Понятие числового ряда, сходимости и расходимости числового ряда. Простейшие свойства сходящихся рядов.

Пусть дана числовая последовательность

$$a_1,\, a_2,\, a_3,\, \ldots,\, a_n, \ldots.$$

Бесконечная сумма вида

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

называется *числовым рядом* (или просто – *рядом*), а числа a_i – *членами* ряда (или – *i-ым членом*). Из членов этого числового ряда составим конечные суммы вида

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\ \ldots,$$

построенные таким образом суммы называются *частичными суммами ряда.* Числовой ряд (1) называется *сходящимся*, если сходится последовательность $\{S_n\}$ его частичных сумм, при этом предел числовой последовательности $\{S_n\}$ частичных сумм называется *суммой ряда* (1). Таким образом, по определению, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то S – сумма ряда (1), что записывается так

$$S = \sum_{i=1}^{\infty} a_i.$$

Если числовая последовательность $\{S_n\}$ частичных сумм не имеет конечного предела, то ряд (1) - называется *расходящимся*.

Пусть числовой ряд (1) сходится и S – его сумма. В соответствии с определением предела числовой последовательности (см. §2.1) это означает, что $\forall\epsilon > 0$ существует $N_\epsilon \in N$ такое, что $\forall n > N_\epsilon$ справедливо неравенство $|S_n - S| < \epsilon$. Иначе говоря, при достаточно большом n частичные суммы S_n могут быть сколь угодно близки к S, а значит могут служить приближениями для суммы ряда S причем с любой степенью точности. Разность $R_n = S - S_n$ характеризует ошибку такого приближения и называется *остаточным членом ряда* (1). Очевидно предел остаточного члена сходящегося ряда равен нулю.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}+\ldots.$$

Для общего члена этого ряда справедливо разложение

$$a_i=\frac{1}{(2i-1)\cdot(2i+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2i-1}-\frac{1}{2i+1}\right),$$

тогда

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+$$

$$+\ldots+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Отсюда получаем

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{2},$$

т.е. данный ряд сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

Пример 2 (ряд геометрической прогрессии). Исследовать на сходимость числовой ряд

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^i + \ldots,\ a \neq 0,$$

при $|q| < 1$ и при $|q| \geq 1$.

Для частичных сумм этого ряда получаем

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Если $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ и следовательно

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-q}.$$

Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$ и ряд расходится.

Если $q = 1$, то $S_n = n \cdot a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, т.е. ряд расходится.

Если $q = -1$, то $S_{2n} = 0$ и $S_{2n-1} = a$, а значит ряд расходится.

Пример 3 (гармонический ряд). Исследовать на сходимость числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{i} + \ldots,$$

называемый *гармоническим*.

Известно, что числовая последовательность $a_i = \left(1 + \frac{1}{i}\right)^i$ монотонно возрастает и ограничена, ее предел $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = e$ (см. §2.4) и поэтому

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^i < e.$$

Прологарифмируем по основанию e это неравенство

$$i \ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) < 1$$

или

$$\ln\left(1 + \frac{1}{i}\right) < \frac{1}{i} \iff \ln(i+1) - \ln i < \frac{1}{i}.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{i=1}^{n} (\ln(i+1) - \ln i) < S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

$$\ln(n+1) < S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i},$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ и ряд расходится.

Замечание (о порядке суммирования). Механически переносить свойства суммы конечного числа слагаемых на ряды, вообще говоря, нельзя. В этом легко убедиться на примере следующего ряда «мигалки»

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots,$$

который очевидно расходится поскольку $S_{2n} = 0$ и $S_{2n-1} = 1$. Перегруппируем члены этого ряда следующими двумя способами

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots = 0,$$

$$1-(1-1)-(1-1)-(1-1)+\ldots=1,$$

таким образом, *менять порядок суммирования в произвольном числовом ряде нельзя.* Другой пример. Два ряда

$$1-1+1-1+1-1+\ldots$$

и

$$-1+1-1+1-1+1-\ldots$$

расходятся. Если почленно их сложить, получим

$$0+0+0+0+0+0+\ldots$$

сходящийся числовой ряд.

Приведенные контрпримеры показывают, что свойства числовых рядов существенно отличаются от свойств сумм конечного числа слагаемых. Однако некоторые свойства обычных сумм сохраняются и для рядов. Далее будет показано, что для некоторых рядов можно менять порядок суммирования или выполнять над ними арифметические операции, при этом сохраняя правила этих операций для сумм рядов.

Теорема 1 (линейные свойства сходящихся рядов). *Если сходятся числовые ряды*

$$S=\sum_{i=1}^{\infty}a_i \ \text{ и } \ s=\sum_{i=1}^{\infty}b_i,$$

то сходятся числовые ряды

$$\sum_{i=1}^{\infty}(c\cdot a_i) \ \text{ и } \ \sum_{i=1}^{\infty}(a_i\pm b_i),$$

причем

$$c \cdot S = \sum_{i=1}^{\infty} (c \cdot a_i) \ \text{ и } \ S \pm s = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \pm b_i),$$

Доказательство. При доказательстве воспользуемся свойством линейности сходящихся числовых последовательностей (см. §2.1). Пусть $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (c \cdot a_i)$, тогда $\sigma_n = c \cdot S_n$ и

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} S_n = c \cdot S.$$

Пусть теперь $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i)$, тогда $\sigma_n = S_n \pm s_n$ и

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} s_n = S \pm s.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. *Сходимость или расходимость числового ряда не изменится, если из него изъять или к нему добавить любое конечное число членов.*

Доказательство. Пусть $\{S_n\}$ последовательность частичных сумм исходного ряда, а $\{\tilde{S}_n\}$ последовательность частичных сумм преобразованного ряда, тогда, начиная с некоторого номера N суммы $\{S_n\}$ и $\{\tilde{S}_n\}$ различаются на одно и то же число A, т.е. $\tilde{S}_n = S_n + A$. Таким образом, если существует или нет предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, то соответственно существует или нет предел $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{S}_n$. **Теорема доказана.**

Теорема 3. *Сумма сходящегося и расходящегося рядов является расходящимся рядом.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ расходится, поэтому последовательность $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ сходится, а последовательность $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ расходится, тогда методом от противного получаем расходимость последовательности $\sigma_n = S_n + s_n$. **Теорема доказана.**

Теорема 4 (о перестановке членов ряда с положительными членами). *Сумма сходящегося ряда с положительными членами не зависит от порядка суммирования членов ряда, или иначе, два сходящихся ряда с положительными членами, отличающихся лишь порядком своих членов, имеют одну и ту же сумму .*

Доказательство. Прежде всего поясним, что два числовых ряда с положительными членами $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i,\ a_i > 0\ (A)$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i,\ b_i > 0\ (B)$ называют *отличающимися лишь порядком своих членов*, если каждое число, являющееся членом ряда (A), входит так же и в ряд (B), и при этом столько же раз; и наоборот, всякое число, являющееся членом ряда (B), фигурирует и в ряде (A), и притом опять столько же раз.

Приступим теперь к непосредственному доказательству теоремы. Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, так как каждый из слагаемых a_i, входящих в S_n, является некоторым членом ряда (B), то взяв достаточно большое число m первых слагаемых ряда (B), мы достигнем того, что среди них окажутся все первые n членов ряда (A). Пусть $\sigma_m = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i$, очевидно $S_n \leq$

σ_m. Пусть ряд (B) сходится и σ его сумма, тогда $S_n \leq \sigma_m < \sigma$, т.е. числовая последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ монотонно возрастает (т.к. $a_i > 0$) и ограничена сверху числом σ, поэтому в силу теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности (см. §2.4) $\{S_n\}$ сходится, а значит сходится ряд (A) и по следствию из теоремы о монотонности предела для числовых последовательностей (см. §2.2) его сумма $S \leq \sigma$.

Повторив теперь все эти рассуждения для ряда (B), мы получим, что $\sigma \leq S$. Отсюда следует $\sigma = S$. **Теорема доказана.**

Очевидно, для расходящихся рядов сформулированные теоремы не справедливы.

9.2 Критерий Коши сходимости (расходимости) числового ряда. Необходимый признак сходимости. Признак сравнения.

Теорема (критерий Коши сходимости числового ряда). *Для того чтобы числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходился, необходимо и достаточно чтобы* $\forall \epsilon > 0$ *существовало* $N_\epsilon \in N$ *такое, что* $\forall n > N_\epsilon$ *и* $\forall p \in N$ *выполнялось неравенство*

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon.$$

Доказательство. При доказательстве воспользуемся критерием Коши сходимости числовых последовательностей (см. §2.6). Ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится или расходится вместе с числовой последовательностью $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, которая сходится тогда и только тогда, когда $\forall \epsilon > 0$ существует $N_\epsilon \in N$ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство

$$|S_{n+p} - S_n| < \epsilon$$

или

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| < \epsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема (критерий Коши расходимости числового ряда). *Для того чтобы числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *расходился, необходимо и достаточно чтобы* $\exists \epsilon_0 > 0$ *такое, что* $\forall N_{\epsilon_0} \in N$ *нашлись* $n > N_{\epsilon_0}$ *и* $p \in N$ *для которых справедливо неравенство*

$$\left| \sum_{i=n+1}^{n+p} a_i \right| \geq \epsilon_0.$$

Теорема (необходимый признак сходимости - 1). *Если числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, то* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится и S – его сумма, тогда $a_n = S_n - S_{n-1}$ и отсюда получаем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} S_n - \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$. **Теорема доказана.**

Отметим, что равенство нулю предела общего члена ряда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ является необходимым, но не достаточным условием сходимости, что иллюстрирует пример гармонического ряда.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sin \alpha i, \ \alpha \neq 0.$

Предположим, что предложенный ряд сходится, тогда в силу необходимого условия сходимости $\lim\limits_{i\to\infty} \sin \alpha i = 0$, поэтому $\lim\limits_{i\to\infty} \sin \alpha(i+1) = 0$. Но $\sin \alpha(i+1) = \sin \alpha i \cos \alpha + \cos \alpha i \sin \alpha$. Переходя в этом равенстве к пределу при $i \to \infty$ получаем $\lim\limits_{i\to\infty} \cos \alpha i = 0$. Переходя теперь к пределу при $i \to \infty$ в основном тригонометрическом тождестве $\sin^2 \alpha i + \cos^2 \alpha i = 1$, получаем равенство $0 = 1$. Полученное противоречие означает расходимость ряда.

Иногда удобно пользоваться необходимым признаком сходимости в следующей (эквивалентной) формулировке

Теорема (необходимый признак сходимости - 2). *Если числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, то последовательность его частичных сумм* $\{S_n\}$ *ограничена.*

Доказательство. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, тогда сходится и последовательность его частичных сумм $\{S_n\}$, а значит в силу необходимого признака сходимости числовых последовательностей (см. §2.3) получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

На примере числового ряда-«мигалки» $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i$ легко убедиться, что данное условие является лишь необходимым, но не достаточным. Однако для числовых рядов с *положительными членами* справедливо следующее утверждение

Теорема. *Если* $a_i \geq 0, \ \forall i \in N$, *то для сходимости* *числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм* $\{S_n\}$ *была ограничена.*

Доказательство. Необходимость этого утверждения следует из необходимого признака сходимости - 2. Покажем его достаточность. Пусть $a_i \geq 0$, $\forall i \in N$, тогда $S_1 \leq S_2 \leq S_3 \leq \ldots$, т.е. числовая последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ монотонно не убывает и по условию теоремы ограничена сверху, а значит в силу теоремы Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности (см. §2.4) существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, т.е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится. **Теорема доказана.**

Теорема (признак сравнения в форме неравенств). *Если* $0 \leq a_i \leq b_i$, $\forall i \geq N_1$, *тогда из сходимости ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *следует сходимость ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, *а из расходимости ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *следует расходимость ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$.

Доказательство. Будем считать, что неравенство $0 \leq a_i \leq b_i$ выполняется $\forall i \in N$ (если это не так, то отбросив конечное число членов рядов, получим требуемое не "испортив" сходимости или расходимости рядов), тогда

$$0 \leq S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq s_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$$

причем, в силу условий теоремы, последовательности $\{S_n\}$ и $\{s_n\}$ не убывают.

Пусть теперь ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \sigma$ причем $s_n \leq \sigma$, тогда $S_n \leq \sigma$ и по теореме Вейерштрасса о пределе монотонной и ограниченной последовательности (см. §2.4) существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, а значит ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится.

Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ расходится, тогда т.к. $S_n \geq 0$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$, но поскольку $S_n \leq s_n$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ расходится. **Теорема доказана.**

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i+i^2}$. Очевидно $\forall i \in N$ выполняется неравенство $\frac{1}{2^i+i^2} \leq \frac{1}{2^i}$ и поскольку ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ является сходящимся, то сходится и исходный ряд.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$, $\alpha \leq 1$. Из неравенства $\frac{1}{i} \leq \frac{1}{i^\alpha}$ справедливого при всех $i \in N$ и расходимости гармонического ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ получаем расходимость исходного ряда.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(1+i)}$. Из неравенства $\ln(1+i) < i$ вытекает эквивалентное ему $\frac{1}{i} < \frac{1}{\ln(1+i)}$ означающее в силу признака сравнения расходимость данного ряда.

Пример 5. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$. Поскольку справедливо неравенство

$$a_i = \frac{1}{i^2} \leq b_i = \frac{1}{i(i-1)} = \frac{1}{i-1} - \frac{1}{i} \ \ \forall i \geq 2,$$

и

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = 2 - \frac{1}{n} \to 2,$$

то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, тогда в силу признака сравнения исходный ряд сходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$, $\alpha \geq 2$. Из очевидного неравенства $\frac{1}{i^\alpha} \leq \frac{1}{i^2}$, предыдущего примера и признака сравнения получаем сходимость данного ряда.

Иногда удобно пользоваться следующим следствием из признака сравнения

Следствие (признак сравнения в предельной форме). *Если для членов числовых рядов* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$, $a_i > 0$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, $b_i > 0$ *существует (конечный) предел* $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_i}{b_i} = k \neq 0$, *то ряды* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *сходятся или расходятся одновременно.*

Доказательство. Так как по условию теоремы $a_i > 0$, $b_i > 0$, то по следствию из теоремы о монотонности предела для числовых последовательностей (см. §2.2) $k > 0$, поэтому найдутся два положительных числа k_1 и k_2 такие, что $0 < k_1 < k < k_2$. Тогда по теореме о сохранении знака неравенства для сходящихся числовых последовательностей (см. §2.2) найдется номер N_1 такой, что $\forall i > N_1$ выполняется двойное неравенство

$$k_1 < \frac{a_i}{b_i} < k_2 \iff k_1 b_i < a_i < k_2 b_i.$$

Если теперь сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, то сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_2 b_i$, а вместе с ним по признаку сравнения сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Если расходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, то расходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} k_1 b_i$, а вместе с ним по признаку сравнения расходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.
Следствие доказано.

9.3 Достаточные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки Даламбера, Коши, Раабе, интегральный признак, Куммера, Бертрана, Гаусса).

Теорема (признак Даламбера). *Пусть для числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с положительными членами* $a_i > 0$ *справедливо предельное равенство* $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = l$, *тогда если* $l < 1$ *ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, а если* $l > 1$ *ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *расходится.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_{i+1}}{a_i} = l$, тогда $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall i > N_\epsilon$ справедливо неравенство

$$\left| \frac{a_{i+1}}{a_i} - l \right| < \epsilon \text{ или } l - \epsilon < \frac{a_{i+1}}{a_i} < l + \epsilon.$$

Пусть $l < 1$, тогда можно выбрать положительное число $\Delta > 0$ таким, чтобы $r = l + \Delta < 1$. Тогда $\forall i > N_\Delta$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} < r \text{ или } a_{i+1} < r a_i.$$

Следовательно

$$a_{N_\Delta+2} < r a_{N_\Delta+1},$$

$$a_{N_\Delta+3} < r a_{N_\Delta+2} < r^2 a_{N_\Delta+1},$$

$$\dots\ \dots\ \dots$$

$$a_{N_\Delta+k+1} < r^k a_{N_\Delta+1}.$$

Таким образом, начиная с $a_{N_\Delta+1}$ все члены исходного ряда меньше членов ряда геометрической прогрессии, причем, так как $r < 1$, в силу признака сравнения заданный ряд сходится.

Пусть теперь $l > 1$, тогда можно выбрать положительное число $\Delta > 0$ таким, чтобы $r = l - \Delta > 1$. Тогда $\forall i > N_\Delta$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} > r \text{ или } a_{i+1} > r a_i.$$

Следовательно

$$a_{N_\Delta+2} > r a_{N_\Delta+1},$$

$$a_{N_\Delta+3} > r a_{N_\Delta+2} > r^2 a_{N_\Delta+1},$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots$$

$$a_{N_\Delta+k+1} > r^k a_{N_\Delta+1}.$$

Таким образом, члены исходного ряда начиная с номера $(N_\Delta + 1)$ больше членов ряда геометрической прогрессии, причем, так как $r > 1$, в силу признака сравнения заданный ряд расходится. **Теорема доказана.**

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{i!}{(i+1)!} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i+1} = 0 < 1$, т.е. ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{2^i}{i}$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \left(\frac{2^{i+1}}{i+1} \cdot \frac{i}{2^i}\right) = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{2i}{i+1} = 2 > 1$, т.е. ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a^i \cdot i!}{i^i}$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \left(\frac{a^{i+1}\cdot(i+1)!}{(i+1)^{i+1}} \cdot \frac{i^i}{a^i \cdot i!} \right) = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{a}{\left(1+\frac{1}{i}\right)^i}$ $= \frac{a}{e}$, т.е. ряд сходится при $a < e$ и расходится при $a > e$.

Замечание 1. Естественно возникает вопрос, что можно сказать о сходимости ряда, для которого $l = 1$. В этом случае ряд может как сходиться, так и расходиться. Соответствующие контрпримеры доставляют расходящийся гармонический ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ и сходящийся ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$, для каждого из которых $l = 1$.

Теорема (корневой признак Коши). *Пусть для числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с положительными членами* $a_i > 0$ *справедливо предельное равенство*
$\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{a_i} = l$, *тогда если* $l < 1$ *ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится, а если* $l > 1$ *ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *расходится.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{a_i} = l$, тогда $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall i > N_\epsilon$ справедливо неравенство

$$|\sqrt[i]{a_i} - l| < \epsilon \text{ или } l - \epsilon < \sqrt[i]{a_i} < l + \epsilon.$$

Пусть $l < 1$, тогда можно выбрать положительное число $\Delta > 0$ таким, чтобы $r = l + \Delta < 1$. Тогда $\forall i > N_\Delta$

$$\sqrt[i]{a_i} < r \text{ или } a_i < r^i.$$

Таким образом, члены исходного ряда начиная с номера $(N_\Delta + 1)$ меньше членов ряда геометрической прогрессии, причем, так как $r < 1$, в силу признака сравнения заданный ряд сходится.

Пусть теперь $l > 1$, тогда можно выбрать положительное число $\Delta > 0$ таким, чтобы $r = l - \Delta > 1$. Тогда $\forall i > N_\Delta$

$$\sqrt[i]{a_i} > r \text{ или } a_i > r^i.$$

Таким образом, члены исходного ряда начиная с номера $(N_\Delta + 1)$ больше членов ряда геометрической прогрессии, причем, так как $r > 1$, в силу признака сравнения заданный ряд расходится. **Теорема доказана.**

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{2i+1}{i}\right)^i$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{\left(\frac{2i+1}{i}\right)^i} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{2i+1}{i} = 2 > 1$, т.е. ряд расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{a^i}{i}$. Вычислим предел $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{\frac{a^i}{i}} = \lim\limits_{i\to\infty} \frac{a}{\sqrt[i]{i}} = a$, т.е. ряд сходится при $a < 1$ и расходится при $a \geq 1$. (Здесь использовано предельное равенство $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{i} = 1$ см. §2.2 пример 2.)

Замечание 2. Так же, как и для признака Даламбера, в случае $l = 1$ ряд может как сходиться, так и расходиться, в чем можно убедиться на примере все тех же расходящегося гармонического ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$ и сходящегося ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$.

Теорема (интегральный признак Коши). *Пусть функция $f(x) \geq 0$ неотрицательна при $x \geq a$, монотонно убывает при $x \geq a$, $f(x) \in C(x \geq a)$, тогда числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$ сходится или расходится вместе с несобственным интегралом $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$.*

Доказательство. Заметим, что левее точки a функция

$f(x)$ может быть разрывной, неограниченно возрастать около некоторой точки $c < a$ и т.д. Пусть k наименьшее натуральное число превосходящее или совпадающее с a, тогда при любом $i > k$ справедливо неравенство

$$f(i+1) \leq \int\limits_{i}^{i+1} f(x)dx \leq f(i).$$

Пусть несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ сходится (см. §5.12), т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_{a}^{b} f(x)dx$. Поскольку функция $f(x) \geq 0$ неотрицательна при $x \geq a$, то интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)dx$ возрастает при $b \to \infty$ и ограничен, тогда для частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f(i)$ справедливо неравенство

$$S_n = \sum_{i=k+1}^{n} f(i) \leq \sum_{i=k+1}^{n} \int\limits_{i-1}^{i} f(x)dx = \int\limits_{k}^{n} f(x)dx \leq \int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx,$$

т.е. последовательность $\{S_n\}$ ограничена. Поскольку члены ряда $f(i) \geq 0$, то последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает и в силу теоремы Вейерштрасса (см. §2.4) существует $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, а это означает сходимость числового ряда $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f(i)$, который отличается от исходного ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$ конечным числом слагаемых, т.е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$ сходится.

Пусть теперь несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{\infty} f(x)dx$ расходится (см. §5.12), т.е. $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = +\infty$, поскольку функция $f(x) \geq 0$ неотрицательна при $x \geq a$. Поэтому для частичных сумм ряда $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f(i)$ справедливо обратное неравенство

$$S_n = \sum_{i=k+1}^{n} f(i) \geq \sum_{i=k+1}^{n} \int\limits_i^{i+1} f(x)dx = \int\limits_{k+1}^{n+1} f(x)dx.$$

Но при $n \to \infty$, $\int\limits_{k+1}^{n+1} f(x)dx \to \infty$, т.е. $S_n \to \infty$, что означает расходимость числового ряда $\sum\limits_{i=k+1}^{\infty} f(i)$, а вместе с ним расходится исходный ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(i)$. **Теорема доказана.**

Пример 6. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$, при $1 < \alpha < 2$. Напомним, что в примерах 3 и 6 из §8.2 была показана сходимость заданного ряда при $\alpha \geq 2$ и расходимость при $\alpha \leq 1$. В примере 3 из §5.12 доказана сходимость интеграла $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ при $1 < \alpha$, поэтому в силу интегрального признака Коши заданный интеграл сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i\ln^\beta i}$. В примере 6 из §5.12 доказана сходимость интеграла $\int\limits_2^{\infty} \frac{1}{x\ln^\beta}dx$ при $1 < \beta$ и расходимость при $\beta \leq 1$, поэтому в силу интегрального признака Коши заданный ряд сходится при $1 < \beta$ и расходится при $\beta \leq 1$.

Пример 8. Исследовать на сходимость числовой ряд

$\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha \ln^\beta i}$.

При $\alpha = 1$ рассматриваемый ряд исследован в предыдущем примере 7, таким образом при $\alpha = 1,\ \beta > 1$ ряд сходится, а при $\alpha = 1,\ \beta \leq 1$ – расходится.

Пусть $\alpha < 1$, тогда для некоторого $\Delta > 0$ справедливо представление $\alpha = 1 - 2\Delta$, отсюда

$$\frac{1}{i^\alpha \ln^\beta i} = \frac{1}{i^{1-\Delta}} \cdot \frac{i^\Delta}{\ln^\beta i}.$$

Поскольку существует положительное число $K(\Delta, \beta) > 0$ такое, что $\frac{i^\Delta}{\ln^\beta i} \geq K(\Delta, \beta)$ при всех $i \geq 2$ (см. §2.7 ряд сравнения бесконечно больших), то получаем неравенство

$$\frac{1}{i^\alpha \ln^\beta i} \geq \frac{K(\Delta, \beta)}{i^{1-\Delta}}.$$

Таким образом в силу признака сравнения (в форме неравенств) заданный ряд расходится при $\alpha < 1$ и любом β.

Пусть $\alpha > 1$, тогда для некоторого $\Delta > 0$ справедливо представление $\alpha = 1 + 2\Delta$, отсюда

$$\frac{1}{i^\alpha \ln^\beta i} = \frac{1}{i^{1+\Delta}} \cdot \frac{1}{i^\Delta \ln^\beta i}.$$

Очевидно существует положительное число $L(\Delta, \beta) > 0$ такое, что $\frac{1}{i^\Delta \ln^\beta i} \leq L(\Delta, \beta)$ при всех $i \geq 2$ (см. §2.7 ряд сравнения бесконечно больших), тогда

$$\frac{1}{i^\alpha \ln^\beta i} \leq \frac{L(\Delta, \beta)}{i^{1+\Delta}}.$$

Таким образом в силу признака сравнения (в форме неравенств) заданный ряд сходится при $\alpha > 1$ и любом β.

Теорема (признак Раабе). *Пусть для числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с положительными членами* a_i *существует предел* $\lim\limits_{i\to\infty} i\left(1-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) = l$, *тогда при* $1 < l$ *ряд сходится, а при* $1 > l$ *– расходится.*

Доказательство. Пусть $1 < l$ и $1 < q < l$, тогда по теореме о сохранении знака неравенства для сходящихся числовых последовательностей (см. §2.2) существует номер N_1 такой, что для всех $i > N_1$ выполняется неравенство

$$i\left(1-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right) > q \text{ или } \frac{a_{i+1}}{a_i} < 1-\frac{q}{i}.$$

Справедлива следующая цепочка равенств (см. §3.5 пример 2)

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{i}\right)^s-1}{-\frac{1}{i}} = \lim_{i\to\infty}\frac{1-\frac{s}{i}+\circ\left(\frac{1}{i}\right)-1}{-\frac{1}{i}} =$$
$$= \lim_{i\to\infty}(s-\circ(1)) = s,$$

поэтому для $1 < s < q < l$ вновь по теореме о сохранении знака неравенства для сходящихся числовых последовательностей (см. §2.2) существует номер N_2 такой, что для всех $i > N_2$ выполняется неравенство

$$\frac{\left(1-\frac{1}{i}\right)^s-1}{-\frac{1}{i}} < q \text{ или } 1-\frac{q}{i} < \left(1-\frac{1}{i}\right)^s = \frac{(i-1)^s}{i^s}.$$

Таким образом для любого $i > \max(N_1, N_2)$

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} < 1-\frac{q}{i} < \frac{(i-1)^s}{i^s} \text{ или } a_{i+1} < \frac{(i-1)^s}{i^s}\cdot a_i$$

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} a_i$, отличающийся от исходного конечным количеством слагаемых, для его общего члена справедливы следующие неравенства при любом $i > N+1$

$$a_i < \frac{(i-2)^s}{(i-1)^s} \cdot a_{i-1} < \frac{(i-2)^s}{(i-1)^s} \cdot \frac{(i-3)^s}{(i-2)^s} \cdot a_{i-2} <$$

$$< \frac{(i-3)^s}{(i-1)^s} \cdot \frac{(i-4)^s}{(i-3)^s} \cdot a_{i-3} < \ldots < \frac{N^s}{(i-1)^s} \cdot a_{N+1}.$$

Поскольку $s > 1$ числовой ряд $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} \frac{N^s}{(i-1)^s} \cdot a_{N+1}$ сходится, а значит в силу признака сравнения сходится ряд $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} a_i$, вместе с которым сходится и исходный ряд.

Пусть $l < 1$ тогда по теореме о сохранении знака неравенства для сходящихся числовых последовательностей (см. §2.2) существует номер N_1 такой, что для всех $i > N_1$ выполняется неравенство

$$i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) < 1 \text{ или } \frac{a_{i+1}}{a_i} > 1 - \frac{1}{i} \text{ или } a_{i+1} > \frac{i-1}{i} \cdot a_i.$$

Рассмотрим числовой ряд $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} a_i$, для членов которого справедливы следующие неравенства при любом $i > N+1$

$$a_i > \frac{i-2}{i-1} \cdot a_{i-1} > \frac{i-2}{i-1} \cdot \frac{i-3}{i-2} \cdot a_{i-2} >$$

$$> \frac{i-3}{i-1} \cdot \frac{i-4}{i-3} \cdot a_{i-3} > \ldots > \frac{N_1}{i-1} \cdot a_{N_1+1}.$$

Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{i=N_1+1}^{\infty} \frac{N_1}{i-1} \cdot a_{N_1+1}$ расходится, то расходится ряд $\sum\limits_{i=N_1+1}^{\infty} a_i$, а вместе с ним расходится исходный ряд. **Теорема доказана.**

Пример 9. Исследовать на сходимость числовой ряд $1+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{(2i-1)!!}{(2i)!!}\cdot\frac{1}{2i+1}\right)$. Если попытаться исследовать этот ряд с помощью признака Даламбера, то получим в пределе $l=1$, т.е. признак неприменим. По признаку Раабе, получаем

$$\lim_{i\to\infty} i\left(1-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)=\lim_{i\to\infty}\frac{6i-1}{2(2i+1)}=\frac{3}{2}>1,$$

т.е. ряд сходится.

Замечание (к признаку Раабе). Признак Раабе можно встретить в следующей альтернативной формулировке.

Теорема (признак Раабе). *Если для числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$ *с положительными членами* a_i *существует предел* $\lim\limits_{i\to\infty} i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}-1\right)=q$, *то при* $1<q$ *ряд сходится, а при* $1>q$ *– расходится.*

Покажем эквивалентность этих утверждений, причем $l=q$.

Пусть $l>0$, тогда для любого $\epsilon>0$ такого, что $l-\epsilon>0$, существует номер N_1, для которого при всех $i>N_1$ справедливо неравенство

$$\left|i\left(1-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)-l\right|<\epsilon$$

или

$$0<l-\epsilon<i\left(1-\frac{a_{i+1}}{a_i}\right)<l+\epsilon$$

$$0<\frac{l-\epsilon}{i}<1-\frac{a_{i+1}}{a_i}<\frac{l+\epsilon}{i}$$

$$\frac{(l-\epsilon)-i}{i}<-\frac{a_{i+1}}{a_i}<\frac{(l+\epsilon)-i}{i}<0 \text{ при } \forall i>N_2$$

$$0 < \frac{i-(l+\epsilon)}{i} < \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{i-(l-\epsilon)}{i}$$

$$\frac{i}{i-(l+\epsilon)} > \frac{a_i}{a_{i+1}} > \frac{i}{i-(l-\epsilon)}$$

$$\frac{l+\epsilon}{i-(l+\epsilon)} > \frac{a_i}{a_{i+1}} - 1 > \frac{l-\epsilon}{i-(l-\epsilon)}$$

$$\frac{(l+\epsilon)i}{i-(l+\epsilon)} > i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) > \frac{(l-\epsilon)i}{i-(l-\epsilon)}$$

$$(l+\epsilon) + \frac{(l+\epsilon)^2}{i-(l+\epsilon)} > i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) > (l-\epsilon) + \frac{(l-\epsilon)^2}{i-(l-\epsilon)}$$

$$-2\epsilon < -\epsilon + \frac{(l-\epsilon)^2}{i-(l-\epsilon)} < i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) - l <$$

$$< \epsilon + \frac{(l+\epsilon)^2}{i-(l+\epsilon)} < 2\epsilon \text{ при } \forall i > N_3,$$

поэтому при любом $i > \max(N_1, N_2, N_3)$

$$\left| i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) - l \right| < 2\epsilon$$

что и означает предельное равенство

$$\lim_{i\to\infty} i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) = l = q.$$

Пусть $l < 0$, тогда для любого $\epsilon > 0$ такого, что $l + \epsilon < 0$, существует номер N_1, для которого при всех $i > N_1$ справедливо неравенство

$$\left| i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) - l \right| < \epsilon$$

или

$$l - \epsilon < i\left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i}\right) < l + \epsilon < 0$$

$$\frac{l-\epsilon}{i} < 1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{l+\epsilon}{i} < 0$$

$$\frac{(l-\epsilon)-i}{i} < -\frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{(l+\epsilon)-i}{i} < 0 \text{ при } \forall i > N_2$$

дальнейшие рассуждения полностью дублируют проведенные выше для случая $l > 0$.

Если $l = 0$, то аналогичными рассуждениями получим для любого $\epsilon > 0$ существует номер N_1, такой, что при всех $i > N_1$ справедливо неравенство

$$\left| i \left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) \right| < \epsilon$$

или

$$-\epsilon < i \left(1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) < \epsilon$$

$$-\frac{\epsilon}{i} < 1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{\epsilon}{i}$$

$$-1 - \frac{\epsilon}{i} < -\frac{a_{i+1}}{a_i} < -1 + \frac{\epsilon}{i} < 0 \text{ при } \forall i > N_2$$

$$0 < 1 - \frac{\epsilon}{i} < \frac{a_{i+1}}{a_i} < 1 + \frac{\epsilon}{i}$$

$$\frac{i-\epsilon}{i} < \frac{a_{i+1}}{a_i} < \frac{i+\epsilon}{i}$$

$$\frac{i}{i+\epsilon} < \frac{a_i}{a_{i+1}} < \frac{i}{i-\epsilon}$$

$$-\frac{\epsilon}{i+\epsilon} < \frac{a_i}{a_{i+1}} - 1 < \frac{\epsilon}{i-\epsilon}$$

$$-2\epsilon < -\epsilon + \frac{\epsilon^2}{i+\epsilon} = -\frac{\epsilon i}{i+\epsilon} < i \left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1 \right) <$$

$$< \frac{\epsilon i}{i-\epsilon} = \epsilon + \frac{\epsilon^2}{i-\epsilon} < 2\epsilon,$$

т.е.
$$\lim_{i\to\infty} i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}}-1\right)=0.$$

Теорема (признак Куммера). *Пусть* $\{a_i\}$ *и* $\{c_i\}$ *две последовательности положительных чисел.*

1. Если существует $\alpha > 0$ *и номер* N *такой, что* $\forall i > N$ *выполняется неравенство* $c_i - c_{i+1}\cdot\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \alpha$, *то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится.*

2. Если существует номер N *такой, что* $\forall i > N$ *выполняется неравенство* $c_i - c_{i+1}\cdot\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 0$ *и ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{1}{c_i}$ *расходится, то ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *тоже расходится.*

Доказательство. Очевидно можно принять $N = 1$, т.к. если бы это было не так, то удалив N первых членов ряда, мы не меняя характера сходимости добились бы этого эффекта. В первом случае получаем неравенства $\forall i \in N$
$$c_i\cdot a_i - c_{i+1}\cdot a_{i+1} \geq \alpha\cdot a_i,$$
просуммировав которые по i от 1 до n, получим для n-частичной суммы ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ оценку сверху
$$\alpha\cdot S_n \leq c_1\cdot a_1 - c_{n+1}\cdot a_{n+1}$$
или
$$S_n \leq \frac{c_1\cdot a_1 - c_{n+1}\cdot a_{n+1}}{\alpha} < \frac{c_1\cdot a_1}{\alpha}.$$
Поскольку последовательность $\{S_n\}$ монотонно возрастает, то по теореме Вейерштрасса (см. §2.4) $\{S_n\}$ сходится, а значит сходится и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$.

Если же выполнена вторая группа условий теоремы, то переписав неравенство в виде

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \frac{c_i}{c_{i+1}} \text{ или } a_{i+1} \geq \frac{c_i}{c_{i+1}} \cdot a_i,$$

получим для общего члена ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ следующую цепочку неравенств

$$a_i \geq \frac{c_{i-1}}{c_i} \cdot a_{i-1} \geq \frac{c_{i-1}}{c_i} \cdot \frac{c_{i-2}}{c_{i-1}} \cdot a_{i-2} \geq \frac{c_{i-2}}{c_i} \cdot \frac{c_{i-3}}{c_{i-2}} \cdot a_{i-3} \geq$$

$$\geq \ldots \geq \frac{c_1}{c_i} \cdot a_1,$$

из которой в силу признака сравнения (в форме неравенств) получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Если в условиях доказанной теоремы положить $c_i = 1$, то условие сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ перепишется в виде

$$1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \alpha \text{ или } 0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1 - \alpha = r < 1,$$

а условие расходимости

$$1 - \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 0 \text{ или } a_{i+1} \geq a_i > 0.$$

Заметим теперь, что такое же условие сходимости мы получали при доказательстве признака Даламбера, а условие расходимости означает нарушение необходимого условия сходимости (см. §8.2 этой главы).

Замечание 2. Если в условиях доказанной теоремы положить $c_i = i - 1$, то условие сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$

перепишется в виде

$$i - 1 - i \cdot \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \alpha \text{ или } \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1 - \frac{\alpha + 1}{i} = 1 - \frac{q}{i},$$

а условие расходимости

$$i - 1 - i \cdot \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 0 \text{ или } \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 1 - \frac{1}{i}$$

и именно такие неравенства и фигурировали при доказательстве признака Раабе.

Теорема (признак Бертрана). *1. Числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с положительными членами сходится, если существует* $\alpha > 0$ *и номер* N *такой, что* $\forall i > N$ *выполняется неравенство* $\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1 - \frac{1}{i} - \frac{1+\alpha}{i \ln i}$.

2. Числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *с положительными членами расходится, если существует номер* N *такой, что* $\forall i > N$ *выполняется неравенство* $\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq 1 - \frac{1}{i} - \frac{1}{i \ln i}$.

Доказательство. 1. Положим в условиях теоремы Куммера $c_i = (i-1)\ln(i-1)$, тогда условие сходимости перепишется в виде

$$(i-1)\ln(i-1) - i \cdot \ln i \cdot \frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \alpha$$

или

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq \frac{-\alpha + (i-1)\ln(i-1)}{i \cdot \ln i} =$$

$$= \frac{-\frac{\alpha}{i} + \left(1 - \frac{1}{i}\right)\left((\ln(i-1) - \ln i) + \ln i\right)}{\ln i} =$$

$$= \frac{-\frac{\alpha}{i} + \left(1 - \frac{1}{i}\right)\left(\ln\left(1 - \frac{1}{i}\right) + \ln i\right)}{\ln i} =$$

$$= 1 - \frac{1}{i} - \frac{\alpha}{i \ln i} + \frac{(i-1)\ln\left(1 - \frac{1}{i}\right)}{i \ln i},$$

но

$$(i-1)\ln\left(1 - \frac{1}{i}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{i}\right)^{i-1} \leq \ln e^{-1} = -1.$$

(см. пример 1 §2.4). Таким образом

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 1 - \frac{1}{i} - \frac{\alpha}{i \ln i} - \frac{1}{i \ln i} = 1 - \frac{1}{i} - \frac{\alpha + 1}{i \ln i}.$$

2. Положим в условиях теоремы Куммера $c_i = (i - 2)\ln(i-1)$, тогда условие расходимости перепишется в виде

$$(i-2)\ln(i-1) - (i-1) \cdot \ln i \cdot \frac{a_{i+1}}{a_i} \leq 0$$

или

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} \geq \frac{(i-2)\ln(i-1)}{(i-1) \cdot \ln i}.$$

Если теперь доказать, что

$$1 - \frac{1}{i} - \frac{1}{i \ln i} \geq \frac{(i-2)\ln(i-1)}{(i-1) \cdot \ln i},$$

то при выполнении условий теоремы по признаку Куммера получим расходимость ряда. Действительно

$$\frac{(i-2)\ln(i-1)}{(i-1) \cdot \ln i} = \frac{i-2}{i-1} \cdot \frac{\ln(i-1)}{\ln i} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) \frac{\ln i + \ln\left(1 - \frac{1}{i}\right)}{\ln i} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{i-1}\right) \left(1 + \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{i}\right)}{\ln i}\right) \leq$$

$$\leq \left(1 - \frac{1}{i-1}\right)\left(1 + \left(-\frac{1}{i}\right)\frac{1}{\ln i}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{i-1}\right)\left(1 - \frac{1}{i\ln i}\right) = 1 - \frac{1}{i\ln i} - \frac{1}{i-1}\cdot\left(1 - \frac{1}{i\ln i}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{i\ln i} - \frac{1}{i}\cdot\frac{i\ln i - 1}{(i-1)\ln i} = 1 - \frac{1}{i\ln i} - \frac{1}{i}\cdot\frac{1-\frac{1}{i\ln i}}{1-\frac{1}{i}} \leq$$

$$\leq 1 - \frac{1}{i\ln i} - \frac{1}{i} \text{ (т.к. } \frac{1-\frac{1}{i\ln i}}{1-\frac{1}{i}} > 1).$$

Теорема доказана.

Теорема (признак Гаусса). *Если* $a_i > 0$, $\epsilon > 0$ *и* $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \lambda + \frac{\mu}{i} + \bigcirc\left(\frac{1}{i^{1+\epsilon}}\right)$, *то*

1. числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходится при* $\lambda > 1$ *и расходится при* $\lambda < 1$;

2. если $\lambda = 1$ *ряд сходится при* $\mu > 1$ *и расходится при* $\mu \leq 1$.

Доказательство. 1. Если выполнены условия теоремы, то $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{a_i}{a_{i+1}} = \lambda$ и по признаку Даламбера получаем требуемое утверждение.

2. Если $\lambda = 1$ и $\mu \neq 1$, то

$$\frac{a_i}{a_{i+1}} = 1 + \frac{\mu}{i} + \bigcirc\left(\frac{1}{i^{1+\epsilon}}\right) \text{ или } i\left(\frac{a_i}{a_{i+1}} - 1\right) = \mu + \bigcirc\left(\frac{1}{i^{\epsilon}}\right),$$

откуда в силу признака Раабе получаем утверждение теоремы.

Если $\lambda = \mu = 1$, то при $i \to \infty$ справедливо представление

$$\frac{a_{i+1}}{a_i} = \frac{1}{1 + \frac{1}{i} + \bigcirc\left(\frac{1}{i^{1+\epsilon}}\right)} = 1 - \frac{1}{i} + \bigcirc\left(\frac{1}{i^{1+\epsilon}}\right) >$$

$$> 1 - \frac{1}{i} - \frac{1}{i\ln i} \text{ (т.к. } \frac{1}{i^{\epsilon}} < \frac{1}{\ln i}),$$

из которого по признаку Бертрана получаем утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

9.4 Знакочередующиеся ряды.

Числовой ряд называется знакочередующимся, если его члены поочередно меняют свой знак, т.е. все соседние члены ряда разных знаков. Такие ряды в общем случае принято записывать следующим образом

$$\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}u_i, \;\; u_i > 0, \; \forall i \in N.$$

Теорема (Лейбница). *Если члены знакочередующегося ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}u_i$ *удовлетворяют условия* $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots \geq u_i \geq \ldots$ *и* $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 0$, *то числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}u_i$ *сходится.*

Доказательство. Пусть выполнены все условия теоремы, тогда рассмотрим $2n$-частичную сумму ряда, записав ее следующими двумя способами

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n})$$

или

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n}.$$

Поскольку $u_i \geq u_{i+1} > 0$, то все слагаемые в первом и втором представлениях неотрицательны, т.е. $S_{2n} > 0$ и $S_{2n} \leq u_1$, при этом $S_{2n} = S_{2n-2} + (u_{2n-1} - u_{2n}) \geq S_{2n-2}$.

Значит числовая последовательность $\{S_{2n}\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху, поэтому в соответствии с теоремой Вейерштрасса $\{S_{2n}\}$ сходится, т.е. существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \le u_1$.

Рассмотрим теперь числовую последовательность $(2n+1)$-частичных сумм ряда, для которой справедливо представление $S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$. Но по условию теоремы $\lim\limits_{n\to\infty} u_{2n+1} = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S \le u_1$. Таким образом числовая последовательность $\{S_n\}$ сходится и имеет своим пределом число S и это же число является суммой ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}u_i$. **Теорема доказана.**

Замечание. Для числа S справедливо представление

$$S = S_n + (-1)^n u_{n+1} + (-1)^{n+1}u_{n+2} + (-1)^{n+2}u_{n+3} + \ldots =$$

$$= S_n + (-1)^n r_n.$$

Число $r_n = u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - \ldots$, называемое *остатком ряда*, также является знакочередующимся рядом, поэтому $0 < r_n \le u_{n+1}$ и $|S - S_n| = |r_n| \le u_{n+1}$, т.е. S_n приближает S с точностью до u_{n+1} - первого отброшенного члена.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i}$. Так как $\frac{1}{i} > \frac{1}{i+1}$ и $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{1}{i} = 0$, то в соответствии с признаком Лейбница ряд сходится (условно), причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2$..

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sin\left(\pi\sqrt{i^2+k^2}\right)$. Преобразуем общий член ряда следующим образом

$$a_i = \sin\left(\pi\sqrt{i^2+k^2}\right) = (-1)^i \sin\left(\pi\left(\sqrt{i^2+k^2}-i\right)\right) =$$

$$= (-1)^i \sin\left(\frac{\pi k^2}{\sqrt{i^2+k^2}+i}\right),$$

т.е.

$$u_i = \sin\left(\frac{\pi k^2}{\sqrt{i^2+k^2}+i}\right) \to 0+, \quad u_i \geq u_{i+1},$$

таким образом по признаку Лейбница ряд сходится (условно, т.к. $|a_i| \sim \frac{1}{i}$).

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}+(-1)^i}$.

Преобразуем общий член ряда

$$a_i = \frac{(-1)^i}{\sqrt{i}+(-1)^i} = (-1)^i \frac{\sqrt{i}-(-1)^i}{i-1} = (-1)^i \frac{\sqrt{i}}{i-1} - \frac{1}{i-1},$$

т.е. исходный ряд является разность сходящегося (по признаку Лейбница) ряда и расходящегося, поэтому исходный ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\sqrt[i^2]{i}}$. Поскольку

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt[i^2]{i}} \geq \frac{1}{\sqrt[i^2]{i^2}} \to 1, \text{ (см. пример 2 из §2.2)}$$

то по теореме о двух ограничивающих последовательностях (см. §2.2)
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[i^2]{i}} = 1 \neq 0$, т.е. нарушается необходимый признак сходимости ряда и значит ряд расходится.

9.5 Абсолютная и условная сходимость числовых рядов. Достаточные признаки абсолютной сходимости.

Определение. Числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ называется *абсолютно* сходящимся, если сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$. Если же ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$ расходится, то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ называется *условно* сходящимся.

Применяя критерий Коши сходимости числового ряда, получаем критерий Коши абсолютной сходимости числового ряда.

Теорема (критерий Коши). *Для того, чтобы числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *сходился абсолютно, необходимо и достаточно, чтобы для любого* $\epsilon > 0$ *существовал номер* N_ϵ *такой, что* $\forall n > N_\epsilon$ *и* $\forall p \in N$ *выполнялось неравенство* $\sum\limits_{i=n}^{n+p} |u_i| < \epsilon$.

Теорема. *Если числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *сходился абсолютно, то он просто сходится*

Доказательство. Рассмотрим два числовых ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$. По условию теоремы второй ряд сходится. Составим из этих рядов новый третий ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(|u_i| + u_i)$. Члены этого ряда удовлетворяют неравенству $0 \leq |u_i| + u_i \leq 2|u_i|$, но ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} 2|u_i|$ сходится, поэтому по признаку сравнения сходится и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(|u_i| + u_i)$. Следовательно ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i =$

$\sum\limits_{i=1}^{\infty}((|u_i| + u_i) - |u_i|)$ так же сходится, как разность двух сходящихся рядов. **Теорема доказана.**

Сформулируем некоторые теоремы, позволяющие судить об абсолютной сходимости числового ряда и являющиеся простыми следствиями из доказанных в §8.3 теорем о рядах с положительными членами.

Теорема (аналог признака сравнения). *Пусть для членов числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *справедливо неравенство* $|u_i| \leq a_i$, *причем числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ *сходился, тогда исходный ряд сходится абсолютно, причем если* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i = S$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sigma$, *то* $|S| \leq \sigma$.

Доказательство. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то в силу признака сравнения числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$ сходится, т.е. данный числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится абсолютно. Рассмотрим n-частичные суммы $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$ и $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, тогда $|S_n| \leq \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i| \leq \sigma_n \leq \sigma$ поэтому по свойству монотонности предела числовой последовательности (см. §2.2) $|S| \leq \lim\limits_{n\to\infty} |S_n| \leq \sigma$. **Теорема доказана.**

Теорема (аналог признака Даламбера). *Если для членов числового ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *существует предел* $l = \lim\limits_{i\to\infty} \left|\frac{u_{i+1}}{u_i}\right|$, *то при* $l < 1$ *ряд сходится абсолютно, а при* $l > 1$ *расходятся как ряд составленный из модулей,* *так и сам ряд.*

Доказательство. Действительно при $l < 1$ по признаку Даламбера получаем сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$, что означает абсолютную сходимость исходного ряд.

Пусть $l > 1$, тогда существует номер N такой, что $\forall i > N$ выполняется неравенство $\left|\frac{u_{i+1}}{u_i}\right| > 1$ или $|u_{i+1}| > |u_i|$, т.е. начиная с номера N члены исходного ряда по абсолютной величине возрастают, а это означает что $\lim\limits_{i\to\infty} u_i \neq 0$, таким образом в силу необходимого признака сходимости исходный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ является расходящимся. **Теорема доказана.**

Теорема (аналог корневого признака Коши). *Если для членов числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ существует предел $l = \lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|u_i|}$, то при $l < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $l > 1$ расходятся как ряд составленный из модулей, так и сам ряд.*

Доказательство. На основании корневого признака Коши получаем абсолютную сходимость исходного ряд.

Пусть $l > 1$, тогда существует номер N такой, что $\forall i > N$ выполняется неравенство $\sqrt[i]{|u_i|} > 1$ или $|u_i| > 1$, т.е. $\lim\limits_{i\to\infty} u_i \neq 0$, а значит исходный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ является расходящимся. **Теорема доказана.**

Замечание. Аналогичными рассуждениями можно доказать расходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ в случаях если $\lim\limits_{i\to\infty} \left|\frac{u_{i+1}}{u_i}\right| = \infty$ или $\lim\limits_{i\to\infty} \sqrt[i]{|u_i|} = \infty$.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sin(i\alpha)}{i^2}$. Так как $\left|\frac{\sin(i\alpha)}{i^2}\right| \leq \frac{1}{i^2}$, то исходный ряд сходится абсолютно.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\cos(2i-1)\frac{\pi}{4}}{3^i}$. Поскольку $\left|\frac{u_{i+1}}{u_i}\right| = \frac{\sqrt{2}\cdot 3^i}{\sqrt{2}\cdot 3^{i+1}} = \frac{1}{3}$ т.е. $\lim\limits_{i\to\infty}\left|\frac{u_{i+1}}{u_i}\right| = \frac{1}{3} < 1$, то ряд сходится абсолютно.

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\left(\frac{2i+1}{i}\right)^i$. Поскольку $\sqrt[i]{|u_i|} = \frac{2i+1}{i}$, то $\lim\limits_{i\to\infty}\sqrt[i]{|u_i|} = 2 > 1$ таким образом ряд расходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{i-1}\cdot i^i$. Поскольку $\sqrt[i]{|u_i|} = i$ то $\lim\limits_{i\to\infty}\sqrt[i]{|u_i|} = +\infty$ таким образом ряд расходится.

9.6 Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

Пусть в числовом ряде $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ имеется бесконечно много положительных и отрицательных членов. Составим их положительных чисел ряд (P) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$, а из отрицательных членов составим ряд из их абсолютных величин (Q) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i$. Справедлива следующая теорема

Теорема. *Если числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится абсолютно, то ряды (P) и (Q) также сходятся, при этом сумма ряда $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ равна разности $S = p - q$, где $p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ и $q = \sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i$. Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходятся условно, то оба ряда (P) и (Q) расходятся.*

Доказательство. Пусть $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, тогда найдутся два натуральных числа m и k такие, что $n = m + k$ и $S_n = \sum\limits_{i=1}^{m} p_i - \sum\limits_{i=1}^{k} q_i = P_m - Q_k$, где P_m и Q_k частичные суммы рядов (P) и (Q). Составим частичную сумму $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i| = P_m + Q_k$.

Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$ сходится (т.е исходный ряд сходится абсолютно), то существует конечный предел $\sigma = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n$, при этом $P_m < \sigma$ и $Q_k < \sigma$, $m, k \in N$. Таким образом числовые последовательности $\{P_m\}$ и $\{Q_k\}$ будут монотонно возрастающими и ограниченными сверху, а значит по теореме Вейерштрасса обе они сходятся и следовательно сходятся числовые ряды (P) и (Q), при этом переходя к пределу при $n \to \infty$ в равенстве $S_n = P_m - Q_k$ получим $S = p - q$.

Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится условно, т.е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |u_i|$ расходится, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i| = +\infty$. Поскольку $\sigma_n = P_m + Q_k$ и $S_n = P_m - Q_k$, то $P_m = \frac{\sigma_n + S_n}{2}$, $Q_k = \frac{\sigma_n - S_n}{2}$ и переходя к пределу при $n \to \infty$ получим $\sigma_n \to +\infty$, $S_n \to S$, т.е. $P_m \to +\infty$, $Q_k \to +\infty$, таким образом ряды (P) и (Q) расходятся. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Итак, абсолютно сходящийся ряд можно рассматривать как разность двух сходящихся рядов с положительными членами, но для условно сходящегося ряда это уже неверно, что можно проиллюстрировать на примере такого (условно сходящегося) ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2$. Здесь (P) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i-1}$ и

$(Q)\ \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i} = \frac{1}{2} \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i}$. Ряд (Q) расходится как гармонический, а (P) расходится в силу оценки $\frac{1}{2i} < \frac{1}{2i-1}$ и признака сравнения.

Следствие. *Если числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится абсолютно, то его сумма не зависит от порядка суммирования его членов, или другими словами, два абсолютно сходящихся ряда, отличающиеся друг от друга лишь порядком своих членов, имеют одинаковую сумму.*

Доказательство. Поскольку абсолютно сходящийся ряд представим как разность двух рядов (P) и (Q) с положительными членами, то перестановка членов в исходном ряде приводит к соответствующим перестановкам внутри рядов (P) и (Q), сумма которых при этом не меняется (см. §9.2). **Следствие доказано.**

Замечание 2. Доказанной теоремой и следствием из нее удобно пользоваться для вычисления суммы абсолютно сходящихся рядов. Проиллюстрируем сказанное на следующем примере абсолютно сходящегося ряда $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i q^i = -\frac{q}{1+q},\ 0 < q < 1$. Здесь ряд (P) имеет вид $p = \sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{2i} = \frac{q^2}{1-q^2}$, а ряд (Q) – $\tilde{q} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} q^{2i-1} = \frac{q}{1-q^2}$, при этом $S = p - \tilde{q}$. К условно сходящимся рядам данная теорема неприменима. Например в условно сходящемся ряде $S = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \ln 2$ осуществим перестановку его членов следующим образом

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots\right) = \frac{1}{2} S,$$

поскольку $S > 0$, то полученное противоречие показывает незаконность осуществленной перестановки.

Справедлива следующая теорема, принадлежащая Риману

Теорема (Римана). *Если числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *сходится условно, то можно так переставить его члены, чтобы вновь полученный ряд имел любую наперед заданную сумму, можно также добиться того, чтобы новый ряд оказался расходящимся.*

Доказательство. Пусть числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится условно, (P) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_i$ – ряд из его положительных членов, (Q) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i$ – ряд из абсолютных величин отрицательных членов, $M > 0$ – некоторое положительное число.

Возьмем в ряде (P) столько первых k членов, чтобы их сумма превзошла M, однако сумма первых $(k-1)$ - членов не превосходила бы M (это всегда можно сделать, т.к. для условно сходящихся рядов оба ряда (P) и (Q) расходятся)

$$p_1 + \ldots + p_{k-1} \le M < p_1 + \ldots + p_{k-1} + p_k.$$

Теперь в ряде (Q) выберем столько первых m слагаемых, чтобы $p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m < M$, однако $p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_{m-1} \ge M$, т.е.

$$p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m < M \le p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_{m-1}.$$

Теперь вновь в ряде (P) выберем столько l следующих (после k) слагаемых, чтобы

$$p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l-1} \le M <$$

$$< p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l}.$$

Далее вновь возьмем столько r следующих (после m) слагаемых из ряда(Q), чтобы выполнялось неравенство

$$p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l} - q_{m+1} - \ldots - q_{m+r} <$$

$$< M \le p_1 + \ldots + p_k - q_1 - \ldots - q_m + p_{k+1} + \ldots + p_{k+l} -$$

$$- q_{m+1} - \ldots - q_{m+r-1}$$

и т.д. Будем брать из рядов (P) и (Q) члены, заботясь лишь о том, чтобы: а) не употреблять члены рядов дважды; б) брать на каждом шаге столько новых членов, чтобы получить требуемые неравенства, но не более.

Построенный таким образом ряд сходится и именно к числу M. Действительно, обозначим через σ_n частичную сумму построенного ряда, тогда разность $(\sigma_n - M)$ бесконечное число раз меняет свой знак, при этом если $\sigma_n - M > 0$, т.е. $\sigma_n > M$, тогда для σ_n имеем представление

$$\sigma_n = \sum^{(1)} p_i - \sum^{(2)} q_i + \sum^{(3)} p_i - \sum^{(4)} q_i + \ldots + \sum^{(k)} p_i - \sum q_i =$$

$$= \sum^{(1)} p_i - \sum^{(2)} q_i + \sum^{(3)} p_i - \sum^{(4)} q_i + \ldots + \tilde{\sum}^{(k)} p_i + \tilde{p}_i -$$

$$- \sum q_i \le M + \tilde{p}_i - \sum q_i,$$

здесь $\tilde{p}_i$ последнее слагаемое в k-ом блоке, таким образом $0 < \sigma_n - M \leq \tilde{p}_i$.

Если же $\sigma_n - M < 0$, т.е. $\sigma_n < M$, тогда для σ_n имеем иное представление

$$\sigma_n = \sum^{(1)} p_i - \sum^{(2)} q_i + \sum^{(3)} p_i - \sum^{(4)} q_i + \ldots - \sum^{(k)} q_i + \sum p_i =$$

$$= \sum^{(1)} p_i - \sum^{(2)} q_i + \sum^{(3)} p_i - \sum^{(4)} q_i + \ldots - \tilde{\sum}^{(k)} q_i - \tilde{q}_i + \sum p_i \geq$$

$$\geq M - \tilde{q}_i + \sum p_i,$$

здесь $\tilde{q}_i$ последнее слагаемое в k-ом блоке, таким образом $0 > \sigma_n - M \geq -\tilde{q}_i + \sum p_i > \tilde{q}_i$.

Поскольку исходный числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ сходится (условно), то в силу необходимого условия сходимости $\lim\limits_{i\to\infty} u_i = 0$ и поскольку $\{\tilde{p}_i\}$ и $\{\tilde{q}_i\}$ являются подпоследовательностями для $\{\tilde{u}_i\}$, то $\lim\limits_{i\to\infty} \tilde{p}_i = \lim\limits_{i\to\infty} \tilde{q}_i = 0$. Отсюда и из полученных выше двойных неравенств следует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = M$.

Если же $M = +\infty$, то достаточно осуществить такую перестановку $\sum^{(1)} p_i > 1$, затем $\sum^{(1)} p_i - q_1$, далее $\sum^{(1)} p_i - q_1 + \sum^{(2)} p_i > 2$, после этого $\sum^{(1)} p_i - q_1 + \sum^{(2)} p_i - q_2$, теперь $\sum^{(1)} p_i - q_1 + \sum^{(2)} p_i - q_2 + \sum^{(3)} p_i > 3$ и т.д. Очевидно, что при подобной перегруппировке можно указать такую последовательность n_i, чтобы соответствующие частичные суммы удовлетворяли неравенствам $\sigma_{n_i} > n_i$, т.е. последовательность $\{\sigma_{n_i}\}$ неограниченно возрастает, а поэтому и не стремится ни к какому конечному пределу. **Теорема доказана.**

Теорема (арифметические операции над рядами). *Если два числовых ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} v_i$ *сходится абсолютно, то числовые ряды* $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i)$ *и* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} w_i$, *где* $w_i = u_1 v_i + u_2 v_{i-1} + u_3 v_{i-2} + \ldots + u_i v_1$, *также являются абсолютно сходящимися.*

9.7 Преобразование Абеля. Признаки сходимости Дирихле и Абеля.

Лемма (неравенство Абеля). *Пусть для числовых последовательностей* $\{a_i\}$ *и* $\{b_i\}$ *выполнены следующие условия:*

а) последовательность $\{a_i\}$ *монотонна;*

б) последовательность частичных сумм $B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ *ограничена (т.е.* $|B_n| \leq B$*), тогда*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq B(|a_1| + 2|a_n|)$$

Доказательство. Предварительно рассмотрим следующее *преобразование Абеля*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n =$$

$$= a_1 B_1 + a_2(B_2 - B_1) + a_3(B_3 - B_2) + \ldots + a_n(B_n - B_{n-1}) =$$

$$= (a_1 - a_2)B_1 + (a_2 - a_3)B_2 + (a_3 - a_4)B_3 + \ldots +$$

$$+(a_{n-1}-a_n)B_{n-1}+a_nB_n=\sum_{i=1}^{n-1}(a_i-a_{i+1})B_i+a_nB_n$$

Теперь приступим к непосредственному доказательству неравенства Абеля

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\le\sum_{i=1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}||B_i|+|a_n||B_n|\le$$

$$\le B\left(\sum_{i=1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+|a_n|\right).$$

Если последовательность $\{a_i\}$ не возрастающая, т.е. $a_i\ge a_{i+1},\ i\in N$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+|a_n|=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+(a_3-a_4)+\ldots+$$

$$+(a_{n-1}-a_n)+|a_n|=(a_1-a_n)+|a_n|=|a_1-a_n|+|a_n|$$

Если последовательность $\{a_i\}$ не убывающая, т.е. $a_i\le a_{i+1},\ i\in N$, тогда

$$\sum_{i=1}^{n-1}|a_i-a_{i+1}|+|a_n|=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\ldots+$$

$$+(a_n-a_{n-1})+|a_n|=(a_n-a_1)+|a_n|=|a_1-a_n|+|a_n|$$

Таким образом

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|\le B(|a_1-a_n|+|a_n|)\le B(|a_1|+2|a_n|).$$

Лемма доказана.

Теорема (признак Дирихле). *Пусть для числового ряда вида* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *выполнены следующие условия:*

а) последовательность $\{a_i\}$ *монотонно стремится к нулю;*

б) последовательность частичных сумм $B_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i$ *ограничена (т.е.* $|B_n| \leq B$*), тогда ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *сходится.*

Доказательство. Для доказательства воспользуемся критерием Коши сходимости числовых рядов. Для этого воспользуемся неравенством Абеля в следующей оценке

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| \leq B(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|)$$

В силу условия а) теоремы $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполняется неравенство $|a_n| < \frac{\epsilon}{3B}$, поэтому $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| < B\left(\frac{\epsilon}{3B} + 2\frac{\epsilon}{3B}\right) = \epsilon,$$

которая и означает (согласно критерию Коши) сходимость числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$. **Теорема доказана.**

Теорема (признак Абеля). *Пусть для числового ряда вида* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *выполнены следующие условия:*

а) последовательность $\{a_i\}$ *монотонна и ограничена (т.е.* $|a_n| \leq M$*);*

б) ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ *сходится, тогда ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$ *сходится.*

Доказательство. Для доказательства вновь воспользуемся критерием Коши сходимости числовых рядов. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$ сходится, то $\forall \epsilon > 0$ существует номер N_ϵ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ и $\forall p \in N$ выполняется неравенство $\left|\sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i\right| < \frac{\epsilon}{3M}$, т.е. числовая последовательность $B_p = \sum\limits_{i=n+1}^{n+p} b_i$ ограничена. Отсюда с помощью неравенства Абеля получаем оценку

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} a_i b_i\right| < \frac{\epsilon}{3M}(|a_{n+1}| + 2|a_{n+p}|) \leq \frac{\epsilon}{3M}(M + 2M) = \epsilon,$$

которая и означает (согласно критерию Коши) сходимость числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i b_i$. **Теорема доказана.**

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \sin 2i$. Представим общий член этого ряда в виде произведения множителей $a_i = \sum\limits_{k=1}^{i} \frac{1}{k!}$ и $b_i = \frac{\sin 2i}{\sqrt[5]{i}}$. Последовательность $\{a_i\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху $a_i < e$. Числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\sin 2i}{\sqrt[5]{i}}$ сходится по признаку Дирихле, поскольку его общий член представим в виде произведения множителей $\tilde{a}_i = \frac{1}{\sqrt[5]{i}}$ и $\tilde{b}_i = \sin 2i$, первый из которых монотонно стремится к нулю, а числовой ряд с общим членом $\tilde{b}_i = \sin 2i$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм $|B_n| = |\sum\limits_{i=1}^{n} \sin 2i| \leq \frac{1}{sin 1}$, что следует из следующей формулы

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \sin \alpha i = \frac{\sin\left(\alpha \frac{n+1}{2}\right)\sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}, \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0.$$

Таким образом в силу признака Абеля заданный ряд сходится, но не абсолютно. Действительно справедлива следующая оценка снизу

$$\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}}\sin 2i\right| = \frac{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}}|\sin 2i| \geq \frac{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}}\sin^2 2i =$$

$$= \frac{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \cdot \frac{1-\cos 4i}{2} = \frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} - \frac{1}{2}\frac{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}}\cos 4i$$

Поскольку ряд с общим членом $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\frac{\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}}\sin 4i$ сходится по признаку Дирихле, а ряд с общим членом $\frac{\sum_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}}$ расходится, что следует из оценки

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{i}\frac{1}{k!}}{\sqrt[5]{i}} \geq \frac{1}{\sqrt[5]{i}},$$

то исходный ряд сходится условно.

Пример 2. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{i+1}}\left(1+\frac{2}{i}\right)^i$. Представим общий член этого ряда в виде произведения множителей $a_i = \left(1+\frac{2}{i}\right)^i$ и $b_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{i+1}}$. Последовательность $\{a_i\}$ монотонно возрастает и ограничена сверху $a_i < e^2$. Числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{i+1}}$ сходится по признаку Дирихле, поскольку его общий член представим в виде произведения множителей $\tilde{a}_i = \frac{1}{\sqrt{i+1}}$ и $\tilde{b}_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}$, первый из которых монотонно стремится к нулю, а числовой ряд с общим членом $\tilde{b}_i = (-1)^{\frac{i(i-1)}{2}} = (-1)^{1+2+\ldots+(i-1)}$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм, что проверяется непосредственно. Таким образом в силу признака Абеля заданный ряд сходится. Условная сходимость ряда следует из очевидной оценки

$$\left|(-1)^{\frac{i(i-1)}{2}}\frac{1}{\sqrt{i+1}}\left(1+\frac{2}{i}\right)^i\right| = \frac{1}{\sqrt{i+1}}\left(1+\frac{2}{i}\right)^i \geq \frac{3}{\sqrt{i+1}}$$

Пример 3. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(-1)^i\frac{\sin^2 i}{i}$. Представим общий член ряда в следующем виде

$$u_i = (-1)^i\frac{\sin^2 i}{i} = (-1)^i\frac{1-\cos 2i}{2i} = \frac{(-1)^i}{2i} - \frac{(-1)^i\cos 2i}{2i}$$

Числовой ряд с общим членом $\frac{(-1)^i}{2i}$ сходится по признаку Лейбница, а общий член другого ряда представим в виде произведения множителей $a_i = \frac{1}{2i}$, монотонно стремящегося к нулю, и $b_i = (-1)^i\cos 2i$, имеющего ограниченную последовательность частичных сумм, что следует из оценки

$$|B_n| = \left|\sum_{i=1}^{n}(-1)^i\cos 2i\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{2\cos 1}((-1)^n\cos(2n+1) - \cos 1)\right| \leq \frac{1+\cos 1}{2\cos 1}$$

Таким образом числовой ряд с общим членом $\frac{(-1)^i \cos 2i}{2i}$ сходится по признаку Дирихле, а вместе с ним сходится и заданный ряд. Условная сходимость ряда вытекает из очевидного представления

$$|u_i| = \frac{\sin^2 i}{i} = \frac{1}{2i} - \frac{\cos 2i}{2i}$$

в котором первый ряд расходится, а второй сходится по признаку Дирихле.

Пример 4. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{\ln^2 i} \cos \frac{\pi i^2}{i+1}$. Преобразуем общий член ряда следующим образом

$$u_i = \frac{1}{\ln^2 i} \cdot \cos \frac{\pi i^2}{i+1} = \frac{1}{\ln^2 i} \cdot \cos \frac{\pi(i^2-1)+\pi}{i+1} =$$

$$= \frac{1}{\ln^2 i} \cdot \cos\left(\pi(i-1) + \frac{\pi}{i+1}\right) = \frac{(-1)^{i-1}}{\ln^2 i} \cdot \cos \frac{\pi}{i+1}$$

Но числовой ряд с общим членом $\frac{(-1)^{i-1}}{\ln^2 i}$ сходится по признаку Лейбница, а числовая последовательность $\cos \frac{\pi}{i+1}$ монотонна и ограничена, следовательно заданный ряд сходится по признаку Абеля. Но поскольку $|u_i| \sim \frac{1}{\ln^2 i}$, данный ряд сходится условно.

10 Функциональные последовательности и ряды.

10.1 Понятие функциональной последовательности. Поточечная и равномерная сходимость функциональной последовательности. Критерий Коши равномерной сходимости функциональной последовательности.

Пусть $\forall n \in N$ определена некоторая функция $f_n(x)$, где $x \in E \subset R$. Зафиксируем некоторое значение $x_0 \in E$, тогда индуцируется соответствующая числовая последовательность $y_n = f_n(x_0)$. Для каждой такой числовой последовательности можно говорить о ее сходимости или расходимости при $n \to \infty$.

Определение. Если числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ называют *сходящейся в точке* x_0, иначе *расходящейся.* Если для любой точки $x_0 \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ сходится, то функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ называют *сходящейся на множестве* E. Такая сходимость называется *поточечной.*

Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится поточечно на множестве E, то для любого $x \in E$ определено (единственное!!!) число $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, т.е. на E задана некоторая новая функция $f : x \to \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, эту функцию $f(x)$ называют *поточечным пределом функциональной последовательности* $\{f_n(x)\}$, обозначают этот тип сходимости следующим образом

$f_n(x) \to f(x)$, при $x \in E$. Заметим, что при работе с поточечно сходящимися функциональными последовательностями наречие «поточечно» как правило не употребляется.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0; \frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right), \\ n\left(\frac{1}{2} - x\right), & x \in \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \frac{1}{2}\right), \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Непосредственно по определению находим

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \left[0; \frac{1}{2}\right), \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Заметим, что в этом примере все функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$, а предельная функция $f(x)$ терпит разрыв первого рода во внутренней точке этого отрезка $x = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = x^n$. Непосредственно по определению находим

$$f_n(x) \to f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Заметим, что, как и в предыдущем примере, здесь все функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$, а предельная функция $f(x)$ терпит разрыв первого рода на правом конце отрезка $x = 1$.

Пример 3 (бегущий горб). Исследовать на сходимость на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} 2nx, & x \in \left[0; \frac{1}{2n}\right), \\ 2(1-nx), & x \in \left[\frac{1}{2n}, \frac{1}{n}\right), \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере как все функции $f_n(x)$, так и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$.

Пример 4. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$. Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$.

Пример 5. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$. Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$.

Пример 6. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = 2n^2xe^{-n^2x^2}$. Непосредственно по определению находим $f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$.

Пример 7. Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = x^n - x^{2n}$. Непосредственно по определению находим

$f_n(x) \to f(x) = 0$. В этом примере все функции $f_n(x)$ и предельная функция $f(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$.

Пример 8 (функция Дирихле). Исследовать на сходимость (поточечную) на отрезке $[0;1]$ функциональную последовательность $f_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m}$. Если x – иррациональное число, то $n!x$ – не целое число, поэтому $|\cos(n!\pi x)| < 1$, тогда $f_n(x) = 0$. Если же $x = \frac{p}{q}$, $p, q \in Z$ – рациональное число, то $n!x$ – целое число при $n \geq q$, поэтому $(\cos(n!\pi x))^{2m} = 1$, тогда $f_n(x) = 1$. Таким образом

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty}(\cos(n!\pi x))^{2m} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} 0, & x - \text{иррац.}, \\ 1, & x - \text{рац.} \end{array} \right\} = D(x).$$

Итак, доказано, что функция Дирихле является двойным поточечным пределом функциональной последовательности $g_{n,m}(x) = (\cos(n!\pi x))^{2m}$. В этом примере все функции $f_n(x)$ непрерывны на отрезке $[0;1]$, а предельная функция $f(x) = D(x)$ разрывна в каждой точке отрезка $[0;1]$ (все разрывы второго рода).

Из рассмотренных здесь примеров видно, что при поточечном предельном переходе можно получить в пределе функцию $f(x)$ из другого класса по отношению к членам последовательности $f_n(x)$ (см. примеры 1, 2, 8), или из того же класса (см. примеры 3–7), т.е некоторые свойства членов последовательности $f_n(x)$ утрачиваются, а это является существенным недостатком поточечной сходимости. Поэтому возникает необходимость в ином типе сходимости, к изложению которого далее и переходим.

Пусть $f_n(x) \to f(x)$, при $x \in E$, в соответствии с определением поточечной сходимости функциональных последовательностей это означает, что для любого $x \in E$ и для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon, x)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon, x)$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Если ввести в рассмотрение величину $r_n(x) = f_n(x) - f(x)$, то определение поточечной сходимости можно переформулировать следующим образом

$$(f_n(x) \to f(x),\ \text{при } x \in E) \overset{def}{\Leftrightarrow} (\forall x \in E,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon, x)$$

$$\text{такой, что } \ \forall n > N(\epsilon, x)\ |r_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \epsilon)\,.$$

В определении поточечной сходимости «малость» величины $r_n(x)$ вообще говоря *разная для разных* $x \in E$. Скорректируем теперь это определение следующим образом: потребуем «малости» величины $r_n(x)$ *одинаковой для всех* $x \in E$, т.е.

$$(\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon) \text{ такой, что } \ \forall n > N(\epsilon),\ \forall x \in E,\ |r_n(x)| < \epsilon)\,.$$

Поскольку здесь требуется «малость» величины $|r_n(x)| < \epsilon\ \forall x \in E$, то для ее выполнения достаточно потребовать от величины $R_n = \sup\limits_E |r_n(x)|$ удовлетворения такому же неравенству. Очевидно R_n есть наибольшее отклонение значений функции $f_n(x)$ от значений функции $f(x)$ на множестве E. Таким образом мы получили новое понятие *равномерной сходимости.*

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся* к функции $f(x)$ *на множестве* E, если $R_n \to 0$ при $n \to \infty$, иначе говоря, $\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon),\ \forall x \in E,\ |r_n(x)| < \epsilon$.

В этом определении весьма существенно то, что номер $N(\epsilon)$ *зависит только* от ϵ и *не зависит* от $x \in E$, т.е. требуется, чтобы $\forall \epsilon > 0$ нашелся бы «универсальный» номер $N(\epsilon)$, начиная с которого неравенство $|r_n(x)| < \epsilon$ было бы справедливо сразу *для всех* точек $x \in E$.

Равномерную сходимость принято обозначать $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Очевидно из равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве E, следует равномерная сходимость этой же последовательности на любом другом множестве $E_1 \subset E$.

Исследуем теперь на равномерную сходимость функциональные последовательности, рассмотренные в примерах 1–8.

Пример 1, 2, 3. В первых трех примерах $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = 1 \not\to 0$, т.е. сходимость в этих случаях неравномерная.

Пример 4. В этом случае $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{[0;1]} \left(\frac{x}{1+n^2x^2}\right) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n} \to 0$, т.е. здесь сходимость равномерная, или $\frac{x}{1+n^2x^2} \rightrightarrows 0$ на $[0;1]$.

Пример 5. В этом примере $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{[0;1]} \left(\frac{nx}{1+n^2x^2}\right) = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} \not\to 0$, т.е. здесь сходимость неравномерная.

Пример 6. В этом примере $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{[0;1]} \left(2n^2 x e^{-n^2x^2}\right) = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2}n}\right) = \sqrt{\frac{2}{e}}n \to \infty$, т.е. здесь сходимость неравномерная.

Пример 7. В этом примере $R_n = \sup\limits_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = \max\limits_{[0;1]} (x^n - x^{2n}) = f_n\left(\sqrt[n]{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \not\to 0$, т.е. здесь сходимость неравномерная.

Пример 8. В этом примере $r_n \equiv 0$, т.е. $R_n = 0$, а значит сходимость равномерная, или $\lim\limits_{m\to\infty} (\cos(n!\pi x))^{2m} \rightrightarrows D(x)$ на $[0;1]$ (на самом деле на R.)

Приведем строгое определение неравномерной сходимости

Определение. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ *неравномерно сходится* к функции $f(x)$ *на множестве* E, если $R_n \not\to 0$ при $n \to \infty$, иначе говоря, $\exists \epsilon_0 > 0$ такое, что $\forall N(\epsilon)$ найдется $n > N(\epsilon)$ и найдется $x_n \in E$ такие, что $|r_n(x_n)| \geq \epsilon_0$.

Применительно к рассмотренным выше неравномерно сходящимся последовательностям такой выбор можно осуществить, например, как предложено в следующей таблице:

Пример 1.	$\epsilon_0 = \frac{1}{2}$	$x_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = \frac{1}{2}$
Пример 2.	$\epsilon_0 = \frac{1}{4}$	$x_n = 1 - \frac{1}{n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) =$ $= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \to e^{-1}$
Пример 3.	$\epsilon_0 = \frac{1}{2}$	$x_n = \frac{1}{2n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = 1$
Пример 5.	$\epsilon_0 = \frac{1}{4}$	$x_n = \frac{1}{n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = \frac{1}{2}$
Пример 6.	$\epsilon_0 = 3$	$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}n}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) =$ $= \sqrt{\frac{2}{e}}n$
Пример 7.	$\epsilon_0 = \frac{1}{4}$	$x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$	$r_n(x_n) = f_n(x_n) = \frac{1}{4}$

Замечание 1. Отметим, что если в примерах 1, 2, 3, 5, 6, 7 «вырезать» из множества $[0;1]$ вместе с некоторой окрестностью точки, в которых нарушается равномерная сходимость, то на оставшемся множестве сходимость будет уже равномерной.

Замечание 2. Очевидно из равномерной сходимости следует поточечная, но не наоборот в чем мы уже убедились на примерах 1, 2, 3, 5, 6, 7.

Теорема (критерий Коши). *Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно к функции $f(x)$ на множестве E, тогда и только тогда, когда для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого номера $n > N(\epsilon)$, любого натурального $p \in N$ и для любого $x \in E$ выполняется неравенство $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon$.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве E, тогда в соответствии с определением равномерной сходимости функциональных последовательностей $\forall \epsilon >$

0, $\exists N(\epsilon)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon)$ и $\forall x \in E$ выполняется неравенство $|r_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$, которое очевидно будет выполняться для любой функции с номером $n + p$, $\forall p \in N$, т.е. $|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2}$. Отсюда $\forall n > N(\epsilon)$ получаем при любом $p \in N$ и любом $x \in E$ неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Достаточность. Пусть для любого $\epsilon > 0$ существует натуральное $N(\epsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\epsilon)$, любого натурального $p \in N$ и для любого $x \in E$ выполняется неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \epsilon. \qquad (*)$$

Это означает, что при любом фиксированном $x_0 \in E$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ удовлетворяет условиям критерия Коши сходимости числовых последовательностей (см. §2.6), т.е. $\{f_n(x_0)\}$ сходящаяся числовая последовательность при любом $x_0 \in E$. Тем самым задана новая функция $f(x)$ по следующему правилу (которое мы выше уже видели) $f : x_0 \to \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Если теперь зафиксировать произвольное $n > N(\epsilon)$ и произвольную точку $x \in E$, а затем перейти к пределу при $p \to \infty$ в неравенстве (*), то по теореме о монотонности предела для сходящихся числовых последовательностей (см. §2.2) получим

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon.$$

Итак, для любого $\epsilon > 0$ существует натуральное $N(\epsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\epsilon)$ и для любого $x \in E$

выполняется неравенство $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$, означающее равномерную сходимость $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве E. **Теорема доказана.**

10.2 Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Теорема (о перестановке пределов). *Если* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *и* $f_n(x) \in C[a;b]$, $\forall n \in N$, *тогда* $f(x) \in C[a;b]$, *т.е.*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0) \overset{!!!}{=} \lim_{x\to x_0} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Доказательство. Для доказательства непрерывности предельной функции $f(x)$ в произвольной точке $x_0 \in [a;b]$ воспользуемся определением непрерывности функции на языке приращений (см. §3.6), т.е. покажем, что бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$ или в развернутом виде $\forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall 0 < |\Delta x| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x_0+\Delta x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Из условия теоремы $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$ следует $\forall \epsilon > 0$ существует натуральное $N(\epsilon)$ такое, что для любого номера $n > N(\epsilon)$ и для любого $x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Поскольку $f_n(x) \in C[a;b],\ \forall n \in N$, то по теореме Кантора (см. §3.8) $f_n(x)$ равномерно непрерывна на $[a;b]$, т.е. $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta_n > 0$ такое, что $\forall 0 < |\Delta x| < \delta_n$ выполняется неравенство $|f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Оценим разность $(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))$ по модулю следующим образом

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| \leq |f(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0 + \Delta x)| +$$

$$+|f_n(x_0 + \Delta x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

тогда для любого номера $n > N(\epsilon)$ и $\forall 0 < |\Delta x| < \delta_n$ выполняется неравенство

$$|f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

означающее непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0. **Теорема доказана.**

Замечание 1. Теорема о перестановке пределов дает достаточные условия непрерывности предельной функции. Примеры 3, 5, 6 и 7 предыдущего параграфа показывают, что это условие (непрерывность предельной функции) не является необходимым, т.е. из непрерывности предельной (в смысле поточечной сходимости) функции для функциональной последовательности непрерывных функций не следует равномерная сходимость самой последовательности. Однако если ввести некоторые дополнительные условия, то возможно обращение доказанной теоремы. А именно, справедлива следующая теорема Дини.

Теорема (Дини). *Пусть для функциональной последовательности* $\{f_n(x)\},\ x \in [a;b]$ *выполнены следующие условия:*

а) $f_n(x) \in C[a;b],\ \forall n \in N;$

б) $\forall x_0 \in [a;b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *является монотонно убывающей;*

в) $f_n(x) \to f(x)$ *на отрезке* $[a;b]$ *(поточечно);*

г) $f(x) \in C[a;b]$,

тогда $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a;b]$.

Доказательство. Пусть $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$, тогда $g_n(x) \in C[a;b],\ g_n(x) \to 0$ – поточечно и $g_n(x) \geq g_{n+1}(x) \geq 0$, (т.к. $\{f_n(x)\}$ является монотонно убывающей $\forall x \in [a;b]$).

Пусть $\epsilon > 0$ произвольное, тогда $\forall x \in [a;b]\ \exists N(\epsilon, x)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon, x)$ выполняется неравенство $0 \leq g_n(x) \leq \frac{\epsilon}{2}$. В силу $g_n(x) \in C[a;b]$ и монотонности функциональной последовательности $\{g_n(x_0)\}$ по свойству сохранения знака для непрерывных функций (см. §3.6) существует окрестность точки $x \in J(x) \subset [a;b]$ такая, что $\forall n > N(\epsilon, x)$ справедливо неравенство $0 \leq g_n(x) \leq \epsilon$ (для a и b $J(x)$ – односторонние интервалы). Но отрезок $[a;b]$ – компактное множество, а семейство интервалов $\{J(x)\},\ x \in [a;b]$ образует его открытое покрытие. В силу леммы Бореля (см. §3.9) из этого открытого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т.е.существует конечное множество точек $x_1,\ x_2, \ldots, x_m$ таких, что $[a;b] \subset J(x_1) \cup J(x_2) \cup \ldots \cup J(x_m)$. Пусть $N = \max(N(\epsilon, x_1), N(\epsilon, x_2), \ldots, N(\epsilon, x_m))$, тогда $\forall n > N$ и $\forall x \in [a;b]$ справедливо неравенство $0 \leq g_n(x) \leq \epsilon$ означающее, что $g_n(x) \rightrightarrows 0$ на $[a;b]$ или $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. **Теорема доказана.**

Замечание 2. Свойство компактности области определения функций является весьма существенным, что показывают следующие контрпримеры. Рассмотрим пару функциональных последовательностей с «прилипанием» $\{f_n(x) = \frac{x^k}{n}\}$, $k \in N$, $x \in [0; +\infty)$ и $\{f_n(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{n}\}$, $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$, для каждой из которых выполнены все условия теоремы Дини (кроме компактности области определения), $f(x) \equiv 0$, однако равномерной сходимости нет, поскольку $r_n(x) = f_n(x)$ и $R_n = \sup r_n(x) = +\infty$, т.е. $R_n \not\to 0$.

Теорема (интегрирование равномерно сходящихся функциональных последовательностей). *Пусть для функциональной последовательности* $\{f_n(x)\}$, $x \in [a; b]$ *выполнены следующие условия:*

а) $f_n(x) \in C[a; b]$, $\forall n \in N$;

б) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a; b]$,

тогда

$$\int\limits_a^b f_n(x)dx \to \int\limits_a^b f(x)dx$$

или

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

Примечание. Здесь в левой части равенства стоит предел числовой последовательности, а в правой – равномерный предел функциональной последовательности.

Доказательство. Так как $f_n(x) \in C[a; b]$, $\forall n \in N$

и $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, то по теореме о перестановке пределов $f(x) \in C[a;b]$, поэтому существуют римановские интегралы (см. §5.5) $\int\limits_a^b f_n(x)dx,\ \forall n \in N$ и $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Поскольку $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, то в соответствии с определением $\forall \epsilon > 0,\ \exists N(\epsilon)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon)$ и $\forall x \in [a;b]$ выполняется неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{b-a}$. Отсюда $\forall n > N(\epsilon)$ можно оценить разность интегралов следующим образом

$$\left|\int\limits_a^b f_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx\right| \leq \int\limits_a^b |f_n(x) - f(x)|dx <$$

$$< \frac{\epsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \epsilon.$$

Полученное неравенство означает

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_a^b f_n(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx$$

Теорема доказана.

Замечание 3. Таким образом доказано, что равномерно сходящиеся на компакте функциональные последовательности можно почленно интегрировать (или, по-другому, операции интегрирования и предельного перехода коммутируют между собой). Поточечно сходящиеся функциональные последовательности в одних случаях допускают почленное интегрирование, в других нет, что иллюстрируют следующие два контрпримера.

Пример 1. Функциональная последовательность $f_n(x) = n^2(1-x)x^n$ на отрезке $[0;1]$ поточечно сходится к

$f(x) \equiv 0$. Поскольку

$$R_n = \max_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) =$$

$$= n \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \to +\infty$$

равномерной сходимости нет. Но

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} n^2 \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} = 1,$$

т.е.

$$0 = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{\text{поточечный предел}} dx \neq$$

$$\neq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = 1.$$

Пример 2. Функциональная последовательность $f_n(x) = \sqrt{n}x(1-x^2)^n$ на отрезке $[0;1]$ поточечно сходится к $f(x) \equiv 0$. Поскольку

$$R_n = \max_{[0;1]} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\right) =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n = \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n =$$

$$= \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n} \to \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0$$

равномерной сходимости нет. Однако

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 \sqrt{n}x(1-x^2)^n dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\left(-\frac{(1-x^2)^{n+1}}{2(n+1)}\right)\Bigg|_0^1\right) =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n}\frac{1}{2(n+1)}\right) = 0$$

т.е.

$$0 = \int\limits_0^1 f(x)dx = \int\limits_0^1 \underbrace{\lim_{n\to+\infty} f_n(x)}_{\text{поточечный предел}} dx =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)dx = 0.$$

Теорема (дифференцирование равномерно сходящихся функциональных последовательностей).
Пусть для функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, $x \in [a;b]$ *выполнены следующие условия:*

а) $f_n(x) \in C^1[a;b]$, $\forall n \in N$;

б) при некотором $x_0 \in [a;b]$ *числовая последовательность* $\{f_n(x_0)\}$ *сходится;*

в) $f_n'(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ *на* $[a;b]$,

тогда

а) $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на* $[a;b]$;

б)$f(x) \in C^1[a;b]$;

в)$f'(x) = \varphi(x)$ *или* $\left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\right)' = \lim\limits_{n\to+\infty} f'_n(x)$

Примечание. Здесь в обоих частях равенства стоят равномерные пределы функциональных последовательностей.

Доказательство. Пусть $x \in [a;b]$ – произвольная точка, тогда функциональную последовательность $\{f'_n(x)\}$ можно почленно интегрировать по отрезку $[x_0;x]$ (или $[x;x_0]$), тогда $\int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)dt \to \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt$, причем $\varphi(x) \in C[a;b]$.

Так как $\forall n \in N$ для функции $f_n(x)$ справедливо представление

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)dt,$$

то найдем отсюда предел (поточечный)

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt,$$

$$\text{где } f(x_0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x_0).$$

Полученное равенство означает $f(x) \in C^1[a;b]$ и $f'(x) = \varphi(x)$ (см. §5.8).

Докажем, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$, для этого оценим по модулю остаток

$$|r_n(x)| = |f_n(x) - f(x)| =$$

$$= \left| f_n(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} f'_n(t)dt - f(x_0) - \int\limits_{x_0}^{x} \varphi(t)dt \right| \leq$$

$$\leq |f_n(x_0) - f(x_0)| + \int\limits_{x_0}^{x} |f_n'(t) - \varphi(t)| dt.$$

Поскольку $f(x_0) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x_0)$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется номер N_ϵ такой, что $\forall n > N_\epsilon$ выполнено неравенство $|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Поскольку $f_n'(t) \rightrightarrows \varphi(t)$ на $[a;b]$, то для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $\tilde{N}_\epsilon$ такой, что $\forall n > \tilde{N}_\epsilon$ и $\forall t \in [a;b]$ выполнено неравенство $|f_n'(t) - \varphi(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$, отсюда при любом $n > \max(N_\epsilon, \tilde{N}_\epsilon)$ и $\forall x \in [a;b]$

$$|r_n(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2(b-a)} \cdot |x - x_0| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

т.е. $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a;b]$. **Теорема доказана.**

Замечание 4. Одной равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ недостаточно для почленного дифференцирования, что иллюстрирует следующий контрпример. Функциональная последователь-
ность $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$ на отрезке $[0;1]$ равномерно сходится к $f(x) \equiv 0$. Очевидно $f'(x) \equiv 0$, но формально продифференцировав рассматриваемую функциональную последовательность, получим $f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$ расходящуюся $\forall x \in [0;1]$ последовательность.

10.3 Понятие функционального ряда. Поточечная и равномерная сходимость функционального ряда. Критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

Пусть $\forall i \in N$ определена некоторая функция $u_i(x)$, где $x \in E \subset R$. Составим ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, который принято называть *функциональным рядом.* Функцию $u_i(x)$ называют i-ым членом ряда, а функцию

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

n-частичной суммой функционального ряда. Зафиксируем некоторое значение $x_0 \in E$, тогда индуцируется числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$. Для каждого такого ряда можно говорить о его сходимости или расходимости. Напомним, что сходимость или расходимость числового ряда определяется как сходимость или расходимость числовой последовательности его частичных сумм, т.е. последовательности $\{S_n(x_0)\}$.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ называется *сходящимся в точке* x_0, если в этой точке сходится числовая последовательность его частичных сумм $\{S_n(x_0)\}$, иначе – *расходящейся.* Если функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится в каждой точке $x \in E$, то ряд называется *сходящимся на множестве* E.

Сформулированное определение сходимости функционального ряда означает поточечную сходимость функциональной последовательности

$\{S_n(x)\}$ на множестве E, поэтому такой тип сходимости функционального ряда называют *поточечной сходимостью*. Само же определение теперь можно переформулировать следующим образом: функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ называется поточечно сходящимся на множестве E, если на этом множестве E сходится поточечно функциональная последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм.

Если функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится поточечно на множестве E, то $\forall x_0 \in E$ определено (единственное!) число равное сумме сходящегося числового ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$, тем самым на E задана некоторая новая функция $S(x)$: $x_0 \to \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x_0)$, которую называют *поточечной суммой функционального ряда*, пишут $S(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$, $x \in E$. Такое равенство называют также *разложением функции* $S(x)$ *в ряд по функциям* $u_1(x), u_2(x), \ldots$.

Пусть функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится поточечно на множестве E и $S(x)$ его поточечная сумма, тогда в соответствии с определением поточечной сходимости функционального ряда это означает, что для любого $x \in E$ и для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N(\epsilon, x)$ такой, что $\forall n > N(\epsilon, x)$ выполняется неравенство

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon \text{ или } \left|\sum_{i=1}^{n} u_i(x) - S(x)\right| < \epsilon.$$

Если ввести в рассмотрение функцию $R_n(x) = S_n(x) -$

$S(x)$, то определение поточечной сходимости можно теперь сформулировать так:

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} u_i(x) \text{ сходится поточечно к функции } S(x)\right.$$

$$\left.\text{на множестве } E\right) \overset{def}{\Leftrightarrow} \left(\forall x \in E\ \forall \epsilon > 0\ \exists N(\epsilon, x)\right.$$

$$\left.\text{такой, что} \forall n > N(\epsilon, x)\ |R_n(x)| < \epsilon\right).$$

Как и в случае поточечной сходимости функциональных последовательностей для поточечной сходимости функционального ряда номер $N(\epsilon, x)$ зависит как от x, так и от ϵ. В случае, если номер $N(\epsilon, x)$ будет зависеть только от ϵ, т.е. номер $N(\epsilon)$ один для всех $x \in E$, то мы получаем понятие равномерной сходимости функционального ряда.

Определение. Функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ называется *равномерно сходящимся на множестве* E, если для любого $\epsilon > 0$ найдется номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ и для любого $x \in E$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \epsilon$ (или $R_n(x) \rightrightarrows 0,\ x \in E$, или $S_n(x) \rightrightarrows S(x),\ x \in E$).

Еще раз отметим, что в этом определении номер $N(\epsilon)$ универсален, он не зависит от $x \in E$, а зависит лишь от ϵ, начиная с этого номера неравенство $|R_n(x)| < \epsilon$ справедливо сразу для всех $x \in E$.

Непосредственно из определения следует, что из равномерной сходимости функционального ряда следует его поточечная сходимость, но не наоборот.

Поскольку равномерная сходимость функционального ряда эквивалентна равномерной сходимости функциональной последовательности его частичных сумм, то, используя критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей, можно получить соответствующее утверждение для функциональных рядов.

Теорема (критерий Коши). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится равномерно к функции* $S(x)$ *на множестве* E *тогда и только тогда, когда для любого* $\epsilon > 0$ *существует номер* $N(\epsilon)$ *такой, что для любого* $n > N(\epsilon)$, *для любого натурального* $p \in N$ *и при всех* $x \in E$ *выполняется неравенство*

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \ldots + u_{n+p}(x)| < \epsilon.$$

Доказательство. В соответствии с определением функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$ на множестве E, если функциональная последовательность частичных сумм $S_n(x)$ сходится равномерно к функции $S(x)$ на множестве E. Последнее согласно критерию Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей означает, что для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$, для любого натурального $p \in N$ и при всех $x \in E$ выполняется неравенство $|S_{n+p}(x) - S_n(x)| < \epsilon$. Подставляя в последнее неравенство выражения для частичных сумм $S_{n+p}(x)$ и $S_n(x)$, получим доказываемое утверждение. **Теорема доказана.**

Критерий Коши будучи универсальным признаком не удобен в приложениях, поэтому в тех случаях, где его можно избежать используются другие, достаточные признаки равномерной сходимости, с одним из которых сейчас и познакомимся

Теорема (признак Вейерштрасса). *Если* $\forall i \in N$ $|u_i(x)| \le M_i$, $\forall x \in E$ *и числовой ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ *сходится, то функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится равномерно на множестве* E.

Доказательство. Поскольку числовой ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ сходится, то в соответствии с критерием Коши сходимости числового ряда для любого $\epsilon > 0$ существует номер $N(\epsilon)$ такой, что для любого $n > N(\epsilon)$ и для любого натурального $p \in N$ выполняется неравенство

$$|M_{n+1} + M_{n+2} + \ldots + M_{n+p}| < \epsilon.$$

Поскольку $M_i \ge 0$ $\forall i \in N$, то знак модуля в последнем неравенстве можно опустить, поэтому для любого $n > N(\epsilon)$, для любого натурального $p \in N$ и при всех $x \in E$ выполняется неравенство

$$\left|\sum_{i=n+1}^{n+p} u_i(x)\right| \le \sum_{i=n+1}^{n+p} |u_i(x)| \le \sum_{i=n+1}^{n+p} M_i < \epsilon.$$

Отсюда в соответствии с критерием Коши равномерной сходимости функциональных рядов получаем требуемое утверждение. **Теорема доказана.**

Примечание. Признак Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым, т.е. из расходимости числового ряда

$\sum\limits_{i=1}^{\infty} M_i$ не следует ни сходимость, ни расходимость функционального ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$. Например, если $E = \{a\}$ точечное множество и $u_i(x) = \frac{(-1)^i}{i}$, тогда функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ сходится равномерно на $E = \{a\}$, в то же время $M_i = |u_i(x)| = \frac{1}{i}$ – расходящийся ряд.

Пример 1. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{x^2}{i\ln^2 i}\right),\ |x| \leq a$. Поскольку $|u_i(x)| \leq \frac{x^2}{i\ln^2 i} \leq \frac{a^2}{i\ln^2 i}$ и числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{a^2}{i\ln^2 i}$ сходится (см. примеры 7 и 8 из §9.3), то по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно.

Пример 2. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+i^3},\ |x| < +\infty$. В силу неравенства Коши $x^2 + i^3 \geq 2|x|i^{3/2}$, но поскольку $|u_i(x)| \leq \frac{2|x|}{x^2+i^3} \leq \frac{2|x|}{2|x|i^{3/2}} = \frac{1}{i^{3/2}}$ и числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i^{3/2}}$ сходится (см. пример 6 из §9.2), то по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно.

Пример 3. Рассмотрим функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x}{1+x^2 i^4},\ x \in [0; +\infty)$. В силу неравенства Коши $1+x^2 i^4 \geq 2|x|i^2$, но поскольку $|u_i(x)| \leq \frac{|x|}{1+x^2 i^4} \leq \frac{|x|}{2|x|i^2} = \frac{1}{2i^2}$ и числовой ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2i^2}$ сходится (см. пример 6 из §9.2), то по признаку Вейерштрасса данный ряд сходится равномерно.

В заключении параграфа приведем формулировку критерия Коши неравномерной сходимости

Теорема (критерий Коши неравномерной сходимости). *Функциональный ряд* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} u_i(x)$ *сходится не равномерно к функции* $S(x)$ *на множестве* E *тогда и только тогда, когда найдется* $\epsilon_0 > 0$ *такое, что для любого натурального* N *найдутся номер* $n > N(\epsilon)$, *натуральное* $p \in N$ *и элемент* $x_0 \in E$ *такие, что выполняется неравенство*

$$|u_{n+1}(x_0) + u_{n+2}(x_0) + \ldots + u_{n+p}(x_0)| \geq \epsilon_0.$$

Пример 4. Функциональный ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$ сходится поточечно к функции e^x. По признаку Вейерштрасса этот ряд сходится равномерно на любом отрезке $[a; b] \subset R$, однако на R этот ряд сходится неравномерно. Действительно для $\epsilon_0 = 1$ положим $x_n = \sqrt[n]{n!} \to +\infty$ (см. пример 6 §2.1), тогда $u_n(x_n) = \frac{(\sqrt[n]{n!})^n}{n!} = 1 \geq \epsilon_0$.