ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ МОиАИС
1-Й СЕМЕСТР

ГРАЖДАНЦЕВА Е.Ю.

Глава 1

Числовые множества.Числовые последовательности

1.1 Множества

Понятие множества. Операции над множествами. Свойства операций над множествами.

1.2 Функции и отображения

1.3 Мощность множеств

1.4 Действительные числа

Аксиоматика. Числовая ось. Простейшие числовые множества

1.5 Точные верхняя и нижняя грани множеств

1.6 Числовая последовательность и ее предел

1.7 Арифметические операции над сходящимися последовательностями

1.8 Монотонные последовательности

1.9 Число e

1.10 Подпоследовввательности. Частичные пределы

Глава 2

Предел и непрерывность функции одной переменной

2.1 Понятие функции. Способы задания функции

2.2 Предел функции в точке

2.3 Теоремы о пределах

2.4 Предел функции в бесконечности

2.5 Бесконечно малые функции

2.6 Арифметические операции над пределами

2.7 Бесконечно большие функции. Их связь с бесконечно малыми

2.8 Односторонние пределы функции в точке

2.9 Непрерывность функции

2.10 Замечательные пределы

2.11 Операции над непрерывными функциями

2.12 Точки разрыва функции. Их классификация

2.13 Свойства непрерывных на отрезке функций

2.14 Сравнение бесконенчно малых функций

2.15 Эквивалентные бесконечно малые функции

2.16 Символы Ландау

Глава 3

Производные и дифференциалы функции одной переменной

3.1 Производная

Пусть функция $y = f(x)$ определена на (a, b), то есть $x \in (a, b)$. Придадим переменной x приращение Δx так, чтобы $x + \Delta x \in (a, b)$. Тогда приращением функции в точке x будет $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$.

Определение. Если существует предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$ (то есть $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$) , то он называется производной от функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается $f^{'}(x)$ (или $y^{'}$, $y^{'}(x)$, $y_x^{'}$)

Таким образом, по определению $f^{'}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Пример. Рассмотрим функцию $y = e^x$. Придадим x приращение Δx , тогда $\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1)$, и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x.$$

Следовательно, $(e^x)^{'} = e^x, \ \forall x$.

Определение.Говорят, что $f(x)$ имеет производную на (a, b), если существует $f^{'}(x), \ \forall x \in (a, b)$.

Геометрический смысл производной.

$f^{'}(x_0)$ - угловой коэффициент (тангенс угла наклона) касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0

Определение.Касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M(x_0; y_0)$ называют прямую, которая имеет с кривой (графиком функции) $y = f(x)$ единственную общую точку $M(x_0; y_0)$.

Уравнение касательной и нормали.

Пусть дана кривая $y = f(x)$. $M_0(x_0; y_0)$ - точка этой кривой, и существует производная $f^{'}(x_0)$. Тогда угловой коэффициет касательной, проведенной к кривой в точке M_0 есть $k = f^{'}(x_0)$. Уравнение касательной, проведенной к данной кривой в точке M_0 с угловым коэффициентом k есть

$$y - y_0 = k(x - x_0)$$

или, что тоже самое,

$$y - y_0 = f^{'}(x_0(x - x_0),$$

где $k = f^{'}(x_0)$.

Определение.Нормалью к кривой в данной точке называют прямую, проходящую через эту точку перпендикулярно касательной, проведенной через эту точку.

Из определения нормали следует, что её угловой коэффициент - это число

$$k_N = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{f^{'}(x_0)},$$

а уравнение нормали к кривой $y = f(x)$, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{f^{'}(x_0)}(x - x_0), \quad f(x_0) \neq 0.$$

Замечание.Если $f^{'}(x_0) = 0$, то нормаль - это прямая $x = x_0$.

Пример.Для кривой, заданной формулой $y = x^2$ в точке $O(0, 0)$ касательной является прямая $y = 0$, а нормалью прямая $x = 0$.

Механический смысл производной.

Пусть $s = s(t)$ - закон прямолинейного движения материальной точки (т.е. s - путь, пройденный материальной точкой за время t).

Обозначим Δs - путь, пройденный материальной точкой за время Δt от t до $t+\Delta t$, т.е. $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$.

Определение.Отношение $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ называют средней скоростью точки за время от t до $t+\Delta t$.

Определение. Если существует предел $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$, то его называют скоростью материальной точки, движущейся по закону $s = s(t)$.

Таким образом, на основании определения, скорость

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = s^{'}(t).$$

Пример. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^2$. Найти ее скорость в момент $t = 3(c)$.

Решение. Согласно определения $v = s^{'}(t) = 2t$. Следовательно, скорость в момент $t = 3(c)$, будет $v(3) = 2\cdot 3 = 6\frac{\text{м}}{c}$

Правая и левая производные.

Определение. Правой роизводной $f^{'}(x+0)$ называют $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, левой производной $f^{'}(x-0)$ называют $\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если эти пределы существуют.

Утверждение. Чтобы существовала производная $f^{'}(x)$ в точке x необходимо и достаточно, чтобы существовали правая и левая производные в этой точке, и имели одинаковые значения, т.е. $f^{'}(x+0) = f^{'}(x-0) = f^{'}(x)$.

Пример.Для функции $f(x) = |x|$. определить $f^{'}(0)$.

Решение. Отношение

$$\frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \Delta x > 0, \\ -1, & \Delta x < 0. \end{cases}$$

Следовательно

$$f^{'}(0+) = \lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1; \quad f^{'}(0-) = \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

и

$$f^{'}(0+) \neq f^{'}(0-).$$

Таким образом, производная функции $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ не существует. Геометрически: кривая $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$ касательной не имеет.

Определение. Пусть $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0. Говорят, что $y = f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную, равную $\pm\infty$, если

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \pm\infty.$$

Геометрически это означает, что касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ перпендикулярна оси абсцисс.

Пример.Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$ в точке $x = 0$. Поскольку

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=0} = \frac{f(0+\delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}} \to +\infty \text{ при } \Delta x \to 0,$$

то в точке $(0; 0)$ касательная к кривой $y = \sqrt[3]{x}$ имеет вид $x = 0$.
Определение. Функция $y = f(x)$ называется гладкой на $(a; b)$, если она непрерывна на $(a; b)$ вместе со своей производной.

3.2 Дифференцируемость функции

Пусть $y = f(x)$ определена на $(a; b)$ и $x \in (a; b)$.

Дадим переменной x приращение $\Delta x :\ x + \Delta x \in (a; b)$.

Тогда приращение функции, соответствующее Δx, будет иметь вид

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Определение. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке $x \in (a; b)$, если

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где A не зависит от Δx, и $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$

Пример. Для функции $y = x^2$ приращение $\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$. Здесь $A = 2x$ не зависит от Δx, и $\alpha(\Delta x) = \Delta x \to 0$

при $\Delta x \to 0$. Следовательно, функция $y = x^2$ дифференцируема в x.

Теорема. Чтобы $y = f(x)$ была дифференцируемой в точке x необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела конечную производную.

Доказательство.($\Rightarrow$) Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x (x - фиксированная). Тогда

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Следовательно,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

и

$$f^{'}(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (A + \alpha(\Delta x)) = A.$$

Таким образом, функция $y = f(x)$ в точке x имеет конечную производную.

($\Rightarrow$) Пусть существует конечная производная $f^{'}(x)$.

Тогда при $\Delta x \to 0$ существует $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{'}(x)$, так как $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Кроме того

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f^{'}(x) + \alpha(\Delta x)) = f^{'}(x)$$

и, таким образом,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{'}(x) + \alpha(\Delta x).$$

Следовательно, $\Delta y = f^{'}(x) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$, где $f^{'}(x)$ не зависит от Δx. Таким образом, получили, что $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Теорема доказана.

Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Тогда

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x,$$

где $A \equiv const$ при фиксированной x, и $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, согласно определения, $y = f(x)$ непрерывна в точке x. Теорема доказана.

Замечание. Обратное утверждение неверно.

Пример 1. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет $f^{'}(0)$, следовательно не дифференцируема.

Пример 2. Функция

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

непрерывна при любых $x \in R$, но $\nexists f^{'}(0)$ при $x = 0$, так как

$$\left.\frac{\Delta y}{\delta x}\right|_{x=0} = \frac{\Delta x \cdot sin\frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = sin\frac{1}{\Delta x},$$

а $\lim\limits_{\Delta x \to 0}(sin\frac{1}{\Delta x})$ не существует.

3.3 Правила дифференцирования

Теорема. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в точке x. Если существуют $u^{'} = u^{'}(x)$ и $v^{'} = v^{'}(x)$, то существуют производные $(u+v)^{'}$, $(u \cdot v)^{'}$, $\left(\frac{u}{v}\right)^{'}$, и

$$(u+v)^{'} = u^{'} + v^{'},$$

$$(u \cdot v)^{'} = u^{'} \cdot v + u \cdot v^{'},$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)^{'} = \frac{u^{'} \cdot v - u \cdot v^{'}}{v^2}, \;\; v \neq 0.$$

Доказательство.Пункты 1) и 2) теоремы очевидны. Докажем пункт 3).

Из дифференцируемости $v = v(x)$ в точке x следует её непрерывность в точке x. Из того, что $v(x) \neq 0$ следует, что $v(x + \Delta x) \neq 0$ при $\Delta x \to 0$ в силу устойчивости знака непрерывной функции. Следовательно,

$$\frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}.$$

Дадим точке x приращение Δx. Тогда для $y = \frac{u}{v}$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v^2 + v \cdot \Delta v}.$$

Следовательно

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v}.$$

Таким образом

$$y' = \left(\frac{u}{v}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \Delta v} =$$

$$= \frac{v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2 + v \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v} = \frac{v \cdot u' - u \cdot v'}{v^2},$$

так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$.

Пункт 3) теоремы доказан. Теорема доказана.

Пример.Для фунции $y = \frac{e^x - 1}{x^2 + 5}$ производная

$$y' = \left(\frac{e^x - 1}{x^2 + 5}\right)' = \frac{(e^x - 1)'(x^2 + 5) - (e^x - 1)(x^2 + 5)'}{(x^2 + 5)^2} =$$

$$\frac{e^x(x^2 + 5) - (e^x - 1)2x}{(x^2 + 5)^2} = \frac{e^x(x^2 - 2x + 5) + 2x}{(x^2 + 5)^2}.$$

Следствие 1. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, т.е.

$$(C \cdot u)' = C \cdot u',$$

где $u = u(x)$, C - постоянный множитель.

Следствие 2.Пункты 1), 2) распостраняются на случай конечного количества функций.

3.4 Дифференцирование сложной функции

Теорема.Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 и функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и $y^{'}(x_0) = f^{'}(u_0) \cdot \varphi(x_0)$.

Доказательство. Дадим значению $x = x_0$ приращение Δx. Тогда функция $u = \varphi(x)$ получит в точке x_0 приращение Δu. Пусть $\Delta u \neq 0$. Тогда это даст приращение функции Δy в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, т.е.

$$\Delta y = f^{'}(u_0) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u,$$

где $\alpha(\Delta u) \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функция $\alpha(\Delta u)$ не определена в $\Delta u = 0$. Доопределим её как $\alpha(0) = 0$. Тогда $\alpha(\Delta u)$ - непрерывна при $\Delta u = 0$, и

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{'}(u_0) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Поскольку $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0 а, следовательно, и непрерывна, получим, что $\Delta u \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u^{'}(x_0)$ при $\Delta x \to 0$. Таким образом, существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0,\ x = x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ и, кроме того,

$$\lim_{\Delta x \to 0,\ x = x_0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f^{'}(u_0) \cdot \lim_{\Delta x \to 0,\ x = x_0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0,\ x = x_0} \left(\alpha(\Delta u) \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} \right) =$$

$$= f^{'}(u_0) \cdot \varphi^{'}(x_0).$$

Теорема доказана.

Пример 1. Найти $y^{'}$ для функции $y = e^{sinx}$.

Решение.Данная функция является сложной.

Пусть $u(x) = sinx$. Тогда $y = e^u$, согласно теореме дифференцирования сложной функции,

$$y^{'} = ((e^u)^{'} = e^u \cdot cosx = e^{sinx} \cdot cosx,$$

поскольку $(e^u)^{'} = e^u$, $u^{'} = cosx$.

Пример 2.Найти $y^{'}$ для функции $y = ln|x|$, $x \neq 0$.

Поскольку $y = ln|x| = \begin{cases} ln, x, & x > 0 \\ ln\,(-x), & x < 0, \end{cases}$

а производная функции $u = -x$ есть $u^{'} = -1$. Следовательно,

$$y^{'} = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0, \\ -\frac{1}{x}, & x < 0. \end{cases}$$

3.5 Производная обратной функции функции

Пусть

1) $y = f(x)$ задана на $[a, b]$,

2) $[\alpha, \beta]$ оси Oy- множество значений функции $y = f(x)$,

3) отображение $[a, b] \to [\alpha, \beta]$ является взаимно однозначным и таким, что $y = f(x)$.

Тогда на $[\alpha, \beta]$ можно определить функцию $x = \varphi(y)$ с областью определения $[\alpha, \beta]$ и множеством значений $[a, b]$.

Определение.Функция $x = \varphi(y)$, определенная выше, называется обратной к функции $y = f(x)$.

Для двух взаимно обратных функций справедливы равенства

$$f(\varphi(y)) = y; \;\; \varphi(f(x)) = x.$$

Пример 1. Для функции $y = 3x$ определенной на $[0, 1]$ обратной является функция $x = \frac{y}{3}$ определенная на $[0, 3]$

Пример 2. Для функции $y = x^3$, где $x \in R$, обратной является функция $x = \sqrt[3]{y}$, где $y \in R$.

Пример 3. Функция $y = \begin{cases} x, & x - \text{рац.}, \\ 1 - x, & x - \text{иррац.} \end{cases}$

имеет обратную $x = \begin{cases} y, & y - \text{рац.}, \\ 1 - y, & y - \text{иррац.} \end{cases}$

Таким образом, если уравнение $y = f(x)$ можно разрешить однозначно относительно x (т.е. выразить x из уравнения $y = f(x)$), то получим $x=\varphi(y)$ - обратную к $y=f(x)$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется возрастающей на $[a,b]$,если $\forall x_1,\ \ x_2\in[a,b]: x_1<x_2$ верно $f(x_1)<f(x_2)$.

Пример. Функция $y=x^3$ является возрастающей на любом $[a,b]\in R$.

Определение. Функция $y=f(x)$ называется убывающей на $[a,b]$,если $\forall x_1,\ \ x_2\in[a,b]: x_1<x_2$ верно $f(x_1)>f(x_2)$.

Теорема о существовании обратной функции. Если $y=f(x)$ непрерывна и возрастает на $[a,b]$; причем $f(a)=\alpha$, $f(b)=\beta$, то она имеет обратную $x=\varphi(y)$, которая определена, непрерывна и возрастает на $[\alpha,\beta]$.

Аналогично для непрерывной убывающей $y=f(x)$ на $[a,b]$.

Теорема дифференцируемости обратной функции. Пусть $y=f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) в некоторой окрестности точки x_0 $(U(x_0))$ и пусть существует $f^{'}(x_0)\neq 0$. Тогда функция $x=\varphi(y)$ дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$ и

$$\varphi^{'}(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $x=\varphi(y)$. Дадим значению $y=y_0$ приращение Δy. Тогда

$$\Delta x=\varphi(y_0+\Delta y)-\varphi(y_0).$$

В силу возрастания (убывания) обратной функции, при $\Delta y\neq 0$ обязательно $\Delta x\neq 0$, и $\Delta x\to 0$ при $\Delta y\to 0$.

Поскольку $\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$, то

$$\varphi^{'}(y_0)=\lim_{\Delta y\to 0; y=y_0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0; y=y_0}\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}=$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta x\to 0; x=x_0}\frac{\Delta y}{\Delta x}}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следовательно, $x^{'}_y=\frac{1}{y'_x}$. Теорема доказана.

Геометрическая интерпретация.Если $\exists f^{'}(x_0)$, то существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Поскольку графики $y = f(x)$ и $x = \varphi(y)$ одинаковы как графики взаимно обратных функций, то касательная к графику $x = \varphi(y)$ такая же, что и к графику $y = f(x)$.

Таким образом, $f^{'}(x_0) = tg\alpha$, $\varphi^{'}(y_0) = tg\beta$. Здесь α - угол наклона касательной к оси абсцисс, β - угол наклона касательной к оси ординат.

Получаем, что $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $tg\beta = tg(\frac{\pi}{2} - \alpha) = ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$, т.е. $\varphi^{'}(y_0) = \frac{1}{f^{'}(x_0)}$.

3.6 Логарифмическое дифференцирование

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x) > 0$, и пусть $\varphi(x) = ln(f(x))$ дифференцируется значительно проще.

тогда поступают так.

1) Логарифмируют по основанию числа e уравнение $y = f(x)$:

$$lny = ln(f(x)).$$

2)Дифференцируют полученное после логарифмирования уравнение, учитывая, что функция $y = f(x)$ является сложной. Получается

$$\frac{y\prime}{y} = (ln(f(x)))^{'}.$$

3) из последнего уравнения выражают $y^{'}$:

$$y^{'} = y \cdot (ln(f(x)))^{'}.$$

Важно. Такое дифференцирование обычно применяется для показательно-степенных функций, т.е. функций вида $y = u^v$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Найдем $y^{'}$.

1) Логарифмируем: $lny = lnu^v = v \cdot lnu$.

2) Дифференцируем: $\frac{y^{'}}{y} = v^{'} \cdot lnu + v \cdot (lnu)^{'} = v^{'} \cdot lnu + v \cdot \frac{u^{'}}{u}$.

3)Выражаем $y^{'} = y\left(v^{'} \cdot lnu + v \cdot \frac{u^{'}}{u}\right)$.

Пример. Найти прозводну функции $y = x^{2x}, \ \ x > 0$.

Решение.1) Логарифмируем: $lny = lnx^{2x} = 2x \cdot lnx$.

2) Дифференцируем: $\frac{y^{'}}{y} = 2 \cdot lnx + 2x \cdot \frac{1}{x} = 2lnx + 2$.

3) Выражаем $y^{'}$, окончательно получаем: $y^{'} = y \cdot (2lnx + 2) = 2 \cdot x^{2x}(lnx + 1)$.

Замечание. логарифмическое дифференцирование удобно применять для функций вида $y = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n} f_k(x)}{\prod\limits_{l=0}^{m} g_k(x)}$, где $m, \ \ n$ любые натуральные числа(т.е. для сложных произведений и дробей).

3.7 Дифференцирровование функции, заданной параметрически

Введем на плоскости декартовую прямоугольную систему координат xOy. Пусть функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны на $[\alpha, \beta]$.

Определение. Говорят, что функция $y = y(x)$ задана параметрически, если обе переменные x и y Заданы как функции одного параметра t :

$$x = \varphi(t), \ \ y = \psi(t), \ \ t \in (\alpha, \beta).$$

Теорема о дифференцировании функции, заданной параметрически. Пусть

1) функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ определены, непрерывны, дифференцируемы $\forall t \in (\alpha, \beta)$,

2) существует функция $t = g(x)$ - обратная к $x = \varphi(t)$.

Тогда функция $y = y(x) : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases}$ дифференцируема и $y_x^{'} = \frac{\psi^{'}(t)}{\varphi^{'}(t)}$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда существует сложная функция $y = \psi(g(t))$ и $y^{'} = \psi^{'}(t) \cdot g^{'}(x)$. Но $g^{'}(x) = \frac{1}{\varphi^{'}(t)}$, как производная обратной функции. Следовательно $y^{'}_x = \psi^{'}(t) \cdot \frac{1}{\varphi^{'}(t)} = \frac{\psi^{'}(t)}{\varphi^{'}(t)}$. Теорема доказана.

3.8 Дифференциал функции

Определение. Дифференциалом d функции $y = f(x)$ (обозначается dy) называется главная линейная относительно Δx часть приращения Δy функции, т.е. $dy = A \cdot \Delta x$.

Определение. Дифференциалом d независимой пенременной x называется её приращение, т.е. $dx = \Delta x$.

Поскольку $A = f^{'}(x)$ и $\Delta x = dx$, то

$$dy = f^{'}(x)\, dx.$$

Геометрически dy (дифференциал функции) – это приращение ординаты касательной, проведенной к $y = f(x)$ в точке $(x, f(x))$ при переходе от x к $x + \Delta x$.

Свойства дифференциала. Пусть определены функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, и $C \equiv const$. Тогда

1) $d(C) = 0$,

2) $d(u + v) = du + dv$,

3) $d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv$,

4) $d(\frac{u}{v}) = \frac{du \cdot v - u \cdot dv}{v^2}$, $v \neq 0$,

5) $d(Cu) = C \cdot du$.

Теорема об инвариантности формы дифференциала. Если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то $dy = f^{'}(u) \cdot du$.

Доказательство. Пусть $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$. Тогда функция $y = f(\varphi(x))$ – сложная и $y^{'} = f^{'}(u) \cdot \varphi^{'}(u)$. Следовательно,

$$dy = y^{'} \cdot dx = f^{'}(u) \cdot \varphi^{'}(x)\, dx = f^{'}(u) \cdot du,$$

так как $\varphi(x)\,dx = du$. Теорема доказана.

Замечание. Если u независимая переменная, то $du = \Delta u$; если $u = \varphi(x)$, то $du = \varphi^{'}(x)\,dx \neq \Delta u$.

Применение дифференциала в приближенном вычислении. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $\Delta y = f^{'}(x_0)\cdot\Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, где $f^{'}(x_0)\cdot\Delta x = dy(x_0)$, $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x \to 0$. Если $dy(x_0)\neq 0$, то $f^{'}(x_0)\neq 0$, следовательно,

$$\frac{\Delta y}{dy}\bigg\|_{x=x_0} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{dy(x_0)} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{f'(x_0)\cdot\Delta x} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0)\cdot} \to 1,$$

т.е. величины Δy и dy эквивалентны и разность $\Delta y - dy$ – бесконечно малая более высокого порядка чем они сами, поэтому можно говорить о том ,что $\Delta y \approx dy$.

Таким образом, если $dy(x_0)\neq 0$, то $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy(x_0)$, причем абслютная и относительная погрешности будут малы при достаточно малом $|\Delta x|$.

Пример. Вычислить $\sqrt{3,996}$.

Решение.Рассмотрим $y=\sqrt{x}$, где $x_0 = 4$, $\Delta x = -0,004$.

Тогда $\sqrt{3,996} = f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy(x_0)$,

а $f(x_0)=\sqrt{4}=2$,

$dy(x_0) = f^{'}(x_0)\cdot\Delta x = \left\{\sqrt{x}^{'} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right\} = \frac{1}{2\sqrt{4}}\cdot(-0,004) = -0,001.$

Следовательно $\sqrt{3,996}\approx 2+(-0,001) = 1,999$.

3.9 Производные высших порядков

Пусть

1) $f(x)$ определена на (a,b),

2) $\exists f^{'}(x)\ \ \forall x\in(a,b)$.

Определение. Производная $f^{'}(x)$ называется производной первого порядка.

Очевидно, что $f^{'}(x)$ – функция переменной x. Пусть функция $\varphi(x) = f^{'}(x)$ определена на (a, b).

Определение. Если $\exists \varphi^{'}(x)\ \forall x \in (a, b)$, то говорят, что $f(x)$ на (a, b) имеет производную второго порядка и обозначают $f^{''}(x) = \varphi^{'}(x)$. (Другими словами: производной второго порядка от функции $f(x)$ называется производная от производной первого порядка, т.е. $f^{''}(x) = \varphi^{'}(x) = (f(^{'}(x))^{'}$.) И так далее.

Определение. Производной n -го порядка от функции $f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$ -го порядка , если производные $f^{(n-2)}$, $n = 1, 2, ...$, существуют.

Пример 1. Найти все производные для функции $y = x^3 + 3x^2 + 8$.

Решение.

Производная первого порядка: $y^{'} = 3x^2 + 6x$.

Производная второго порядка: $y^{''} = (y^{'})^{'} = (3x^2 + 6x)^{'} = 6x + 6$.

Производная третьего порядка: $y^{'''} = (y^{''})^{'} = (6x + x)^{'} = 6$.

Прроизводная четвертого порядка: $y^{(4)} = (y^{'''})^{'} = 6^{'} = 0$.

Производные n -го порядка ($n \geq 4$): $y^{(n)} = (y^{(n-1)})^{'} = 0$.

Пусть функция $y = y(x)$ задана параметрически, т.е. $y = y(x)$:
$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [a, b].$$
Согласно определений, производная n -го порядка функции, заданной параметрически – это функция

$$y_x^{(n)} = \frac{(y_x^{(n-1)})^{'}}{\varphi^{'}},$$

при условии существования соответствующих производных $y_x^{(n-1)}$, $n = 1, 2, ...$, данной функции.

Пример 2. Для функции $y = y(x) : \begin{cases} x = a(t - sint), \\ y = a(1 - cost) \end{cases}$ найти $y^{''}$.

Решение. Здесь $\varphi = a(t - sint),\ \ \psi = a(1 - cost)$,

$\varphi^{'} = a(1 - cost)$, $\psi^{'} = asint.$

Следовательно $y^{'}_x = \frac{\psi^{'}}{\varphi^{'}} = \frac{sint}{1-cost} = ctg\frac{t}{2}$. А поскольку $(y^{'})^{'} = \frac{1}{2sin^2\frac{t}{2}}$, то

$$y^{''}_x = \frac{(y^{'}_x)^{'}}{\varphi^{'}} = \frac{-\frac{1}{2sin^2\frac{t}{2}}}{a(1-cost)} = -\frac{1}{4a\,sin^4\frac{t}{2}}.$$

Механический смысл второй производной. Пусть $s = s(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки. Тогда $a(t) = s^{''}(t) = v^{'}(t)$ – ускорение материальной точки в момент времени t.

Теорема. Если существуют $u^{(n)} = u^{(n)}(x)$ и $v^{(n)} = v^{(n)}(x)$ $\forall n \in N$ в точке x, то существуют $(u + x)^{(n)}$, $(u \cdot v)^{(n)}$ в x, причем

$$(u + x)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)},$$

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C^1 n \cdot u^{(n-1)} \cdot v^{'} + C^2 n \cdot u^{(n-2)} \cdot v^{''} +$$

$$+ \cdots + C^k n \cdot u^{(n-k)} \cdot v^k + \cdots + C^{n-1} n \cdot u^{')} \cdot v^{n-1} + u \cdot v^{(n)}.$$

Доказательство.Теорема доказывается при помощи метода математической индукции.

Пример. Найти $y^{(1001)}$ для функции $y = x^2 e^x$.

Решение. Обозначим $u = x^2$, $v = e^x$. Тогда

$$u^{'} = 2x, \;\; u^{''} = 2, \;\; u^{(3)} = \cdots = u^{(n)} = 0, \;\; n \geq 3,$$

$$v^{(n)} = e^x, \;\; \forall n \in N.$$

Следовательно, согласно теореме,

$$y^{(1001)} = e^x \cdot x^2 + C^1_{1001} \cdot e^x \cdot 2x + C^2_{1001} \cdot e^x \cdot 2 + 0 =$$

$$e^x \cdot (x^2 + 2002x + 1001 \cdot 1000).$$

3.10 Дифференциалы высших порядков

Пусть $y = f(x)$ дифферецируема в x и $dy = f^{'}(x)dx-$ дифференцируемая функция.

Определение. Дифференциал dy называется дифференциалом первого порядка.

Определение. Дифференциалом $(d^n y)$ $n-$ го порядка функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)-$ го порядка, т.е. $d^n y = d(d^{n-1}y)$ (при условии существования всех дифференциалов $(n-1)-$ го порядка).

Пусть $dx = \Delta x$ – приращение переменной x, которое не зависит от x. Тогда

$$d^2y = d(dy) = d(f^{'}(x)dx) = d(f^{'}(x)) \cdot dx + f^{'}(x) \cdot d(dx) =$$

$$= f^{''}x \cdot dx \cdot dx + f^{'} \cdot 0 = f^{''}(x)\, dx^2,$$

и так далее, получим

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Теорема. Дифференциал второго и более порядков инвариантностью формы не обладает.

Доказательство. Найдем d^2y для сложной функции $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$. Так как $dy = f^{'}(u)du$ где $du = \varphi^{'}(x)dx$ в общем случае не является постоянной величиной получим

$$d^2y = d(f^{'}(u)du) = d(f^{'}(u)) \cdot du + f^{'}(u) \cdot d(du) =$$

$$f^{''}(u) \cdot du^2 + f^{'}(u) \cdot d^2u.$$

Таким образом, дифференциал второго порядка не обладает инвариантностью формы. Аналогично можно показать, что любой дифференциал n -го порядка $(n \geq 2)$ не обладает инвариантностью формы. Теорема доказана.

Глава 4

Дифференциальные теоремы. Формула Тейлора

4.1 Теоремы о среднем

Теорема Ролля. Если

1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,

2) $\exists f^{'}(x)\ \ \forall x \in (a, b)$,

3) $f(a) = f(b)$,

то существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $f^{'}(\xi) = 0$.

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то, по 2-й теореме Вейерштрасса, она на $[a, b]$ принимает свои наибольшее M и наименьшее m значения.

1) Если $M = m$, то $M \leq f \leq M$, т.е. $f(x) \equiv const$ на $[a, b]$, следовательно $f^{'} = 0\ \ \forall x \in (a, b)$.

2) Если $M \neq m$, то $\exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = M$ или $f(\xi) = m$.

Пусть, для определенности, $f(\xi) = M$. Тогда из существования $f^{'}(x)\ \ \forall x \in (a, b)$ следует существование $f^{'}(\xi)$ и

$$f^{'}(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta x > 0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0,\, \Delta x < 0} \frac{f(\xi - \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x},$$

но $f(\xi) = M$ – наибольшее значение на $[a, b]$.

Следовательно $f(\xi + \Delta x) - f(\xi) \leq 0$ и $f(\xi - \Delta x) - f(\xi) \leq 0$.

Таким образом, получаем, что

$$\frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0, \ \ \frac{f(\xi - \Delta x) - f(\xi)}{-\Delta x} \geq 0\ \ \Delta x > 0.$$

Переходя к пределу $f^{'}(\xi) \leq 0$ и $f^{'}(\xi) \geq 0$ одновременно.

Следовательно $f^{'}(\xi) = 0$. Теорема доказана.

Геометрически: для графика $y = f(x)$ при $x \in [a, b]$ такого, что

1) кривая $y = f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,

2) в любой точке кривой между $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ можно провести касательную,

3) $f(a) = f(b)$,

найдется, по крайней мере, одна точка $C(\xi, f(\xi))$, в которой касательная к $y = f(x)$ буде параллельна оси абсцисс.

Теорема Лагранжа (о конечных приращениях). Если

1) $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,

2) $\exists f^{'}(x) \ \forall x \in (a, b)$,

то в (a, b) существует, по крайней мере, одна точка ξ такая, что

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f^{'}(\xi).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x - a)$. Эта функция непрерывна на $[a, b]$ и $\exists F^{'}(x) \ \forall x \in (a, b)$, и $F(a) = F(b)$ – т.е. $F(x)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

Следовательно, $\exists \xi \in (a, b) : F^{'}(\xi) = 0$.

Но $F^{'}(x) = f^{'}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Получим, что $F^{'}(\xi) = f^{'}(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Таким образом, $f^{'}(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$, или $f^{'}(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Теорема доказана.

Замечание. Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа.

Геометрически: на дуге непрерывной кривой $y = f(x)$ при $x \in [a, b]$ найдется точка $C(\xi, f(\xi))$, касательная в которой будет параллельна хорде AB , где $A(a, f(a))$, $B(b, f(b))$.

Определение. Формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f^{'}(\xi),\ \ \xi\in(a,b)$$

(можно записить как $f(b)-f(a)=f^{'}9\xi)\cdot(b-a),\ \ \xi\in(a,b)$) называется Формулой Лагранжа или формулой конечных приращений.

Поскольку $\xi\in(a,b)$, то можно записать ξ как $\xi=a+\theta(b-a)$, где $0<\theta<1$.

Тогда формула Лагранжа примет вид

$$f(b)-f(a)=f^{'}(a+\theta(b-a))\cdot(b-a),\ \ 0<\theta<1.$$

А полагая $a=x$, $b=x+\Delta x$, получим

$$\Delta f=f^{'}(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x,\ \ 0<\theta<1.$$

Пример. Доказать, что $|arctgx_2-arctgx_1|\leq|x_2-x_1|,\ \ \forall x_1,x_2$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=arctgx$. Эта функция 1) непрерывна $\forall[a,b]\subset R$; 2) $\exists f^{'}(x)\ \ \forall x\in(a,b)\subset R$.

Следовательно, $\forall x_1$, x_2

$$arctgx_2-arctgx_1=(arctgx)^{'}\Big|_{x=\xi}\cdot(x_2-x_1),$$

где $\xi\in(x_1,x_2)$, т.е.

$$|arctgx_2-arctgx_1|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}\cdot(x_2-x_1)\right|=\frac{|x_2-x_1|}{1+\xi^2}\leq|x_2-x_1|,$$

так как $\frac{1}{1+\xi^2}\leq1\ \ \forall\xi$.

Теорема Коши. Если

1) $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$,

2) $\exists f^{'}(x),\ \ g^{'}(x)$ на $\forall x\in(a,b)$,

3) $g^{'}(x)\neq0\ \ \forall x\in(a,b)$,

то существует $\xi\in(a,b)$ (по крайней мере, одна) такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}.$$

Доказательство. Из условия теоремы следует, что $g(b)-g(a)\neq0$.

Рассмотрим функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$.
Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.е.
1)непрерывна на $[a, b]$; 2) $\exists F^{'}(x)\ \ x \in (a, b)$; 3) $F(a) = F(b) = 0$.
Следовательно, существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $F^{'}(\xi) = 0$.
Поскольку $F^{'}(x) = f^{'}(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g^{'}(x)$,
то получим

$$0 = f^{'}(\xi) = f^{'}(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g^{'}(\xi).$$

Следовательно, $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f^{'}(\xi)}{g^{'}(\xi)}$. Теорема доказана.

4.2 Правило Лопиталя

Теорема 1. Пусть

1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, за исключением, быть может, самой точки a;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = 0$, и $\varphi^{'}(x) \neq 0\ \forall x \in U(a) \backslash \{a\}$,

3) $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}$ конечный или бесконечный.

Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}.$$

Докозательство. Пусть $f(a) = \varphi(a) = 0$. Так как $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a) = 0$ и $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = \varphi(a) = 0$, то функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке a. Следовательно, на отрезке $[a, x]$ (или $[x, a]$) $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$ функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Следовательно, $\exists \xi \in (a, x)$ токая, что

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f^{'}(\xi)}{\varphi^{'}(\xi)}.$$

и $\xi \to a$ при $x \to a$.

Так как по условию $\exists \lim\limits_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}$ и не зависит от способа стремления $x \to a$, то при $x \to a$ а значит и при $\xi \to a$

$$\exists \lim_{\xi\to a} \frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть

1) $f(x)$ и $\varphi(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности $U(a)$ точки a, за исключением, быть может, самой точки a;

2) $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, и $\varphi^{'}(x)\neq 0\ \forall x\in U(a)\backslash\{a\}$,

3) $\exists\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}$ конечный или бесконечный.

Тогда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}.$$

Замечание 1. Правило Лопиталя можно применять повторно, если функции $f^{'}(x)$ и $\varphi^{'}(x)$ удовлетворяют всем тем же условиям , что и функции $f(x)$ и $\varphi(x)$.

Замечание 2. Из существования $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ не следует существование $\lim\limits_{x\to a}\frac{f^{'}(x)}{\varphi^{'}(x)}$.

Пример 1.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-sinx}{x^3}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(x-sinx)^{'}}{(x^3)^{'}}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cosx}{3x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-cosx)^{'}}{(3x^2)^{'}}=\lim_{x\to 0}\frac{sinx}{6x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(sinx)^{'}}{(6x)^{'}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{6}=\frac{1}{6}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2sin\frac{1}{x}}{x}\neq\lim_{x\to 0}\frac{(x^2sin\frac{1}{x})^{'}}{x^{'}}$$

так как не существует предела

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2sin\frac{1}{x})^{'}}{x^{'}}=\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot sin\frac{1}{x}-cos\frac{1}{x}\right).$$

Следовательно правило Лопиталя применить нельзя, посколькунарушено третье условие теоремы 1.

Правило лопиталя можно использовать при раскрытии неопределенностей вида $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, $1^\infty, \infty^0$ первоначально приведя их к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$, например, следующим образом:

1) $0 \cdot \infty = \frac{0}{\frac{1}{\infty}} = \frac{0}{0}$ или $0 \cdot \infty = \frac{\infty}{\frac{1}{0}} = \frac{\infty}{\infty}$;

2) $\infty - \infty = \frac{1}{\frac{1}{\infty}} - \frac{1}{\frac{1}{\infty}} = \frac{\frac{1}{\infty} - \frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty} \cdot \frac{1}{\infty}}$;

3) 0^0, 1^∞, ∞^0 логарифмируя.

Пример 1.

$$\lim_{x\to+0} x \cdot lnx = (0 \cdot \infty) = \lim_{x\to+0} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+0} \frac{(lnx)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to+0} \frac{x^2}{x} = -\lim_{x\to+0} x = 0.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{lnx}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to1} \frac{x \cdot lnx - x + 1}{(x-1) \cdot lnx} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(x \cdot lnx - x + 1)'}{((x-1) \cdot lnx)'} = \lim_{x\to1} \frac{lnx}{lnx + 1 - \frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to1} \frac{(lnx)'}{(lnx + 1 - \frac{1}{x})'} = \lim_{x\to1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Пример 3. $\lim\limits_{x\to0} x^x = (0^0)$.

Введем обозначение $y = x^x$.

Логарифмируя, получим $lny = lnx^x = x \cdot lnx$, т.е. $y = e^{x \cdot lnx}$. Тогда

$$\lim_{x\to0} x^x = \lim_{x\to0} y = \lim_{x\to0} e^{x\cdot lnx} = e^{\lim\limits_{x\to0} x\cdot lnx}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to0} x \cdot lnx = 0$ (см. пример 1), то

$$\lim_{x\to0} x^x = e^0 = 1.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{1+x^2})'}{x'} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x'}{(\sqrt{1+x^2})'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$$

и т.д.

Однако $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\frac{1}{x^2}+1} = 1.$

4.3 Формула Тейлора

Формула Тейлора для многочлена степени n.

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n, \;\; b_n \equiv const \neq 0.$$

Теорема 1. Для любого числа a многочлен $P(x)$ можно представить в виде суммы степеней $x-a$, взятых с накоторыми коэффициентами.

Доказательство. Положим $x = a + t$.

Тогда $P(x) = P(a+t) = b_0 + b_1(a+t) + b_2(a+t)^2 + \cdots + b_n(a+t)^n$.

Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые, получим

$$P(x) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots + A_n t^n =$$

$$= A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n,$$

где $A_0, A_1, \ldots \equiv const$. Теорема доказана.

Теорема 2. Многочлен $P(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n$ можно представить в виде

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{P^{(n)}}{n!}(x-a)^n.$$

Доказательство. Составим систему из производных многочлена $P(x)$:

$$P^{(0)}(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \cdots + A_n(x-a)^n,$$

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + 3A_3(x-a)^2 + \cdots + nA_n(x-a)^{n-1},$$

$$P''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x-a) + \dots + n \cdot (n-1)A_n(x-a)^{n-2},$$

$$\vdots$$

$$P''(x) = n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot A_n.$$

Из полученной системы при $x = a$ получим

$$P(a) = A_0,$$

$$P'(a) = A_1,$$

$$P''(a) = 2! \cdot A_2,$$

$$\vdots$$

$$P^{(n)}(a) = n! \cdot A_n.$$

Следовательно,

$$A_0 = P(a),$$

$$A_1 = \frac{P'(a)}{1!},$$

$$A_2 = \frac{P''(a)}{2!},$$

$$\vdots$$

$$A_n = \frac{P^{(n)}(x)}{n!}.$$

Таким образом,

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Теорема доказана.

Определение. Формула

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

называется формулой Тейлора по степеням $x - a$ для многочлена $P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$.

Определение. При $a = 0$ формула Тейлора по степеням $x - a$ для многочлена $P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n$ принимает вид

$$P(x) = P(0) + \frac{P^{'}(0)}{1!}x + \frac{P^{''}(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

и называется формулой Маклорена для этого многочлена.

Пример. Разложить многочлен $P(x) = x^2 - 3x + 2$ постепеням а) x, б) $x - 1$.

Решение. Найдем все производные данного многочлена:

$$P^{'} = 2x - 3, \;\; P^{''} = 2, \;\; P^{(n)} = 0 \;\; \forall x \geq 3.$$

а)Поскольку $P(0) = 2$, $P^{'}(0) = -3$, $P^{''}(0) = 2$, $P^{(n)}(0) = 0 \;\; \forall x \geq 3$, то

$$P(x) = 2 - 3x + x^2.$$

б)Так как $P(1) = 0$, $P^{'}(1) = -1$, $P^{''}(1) = 2$, $P^{(n)}(1) = 0 \;\; \forall x \geq 3$, то

$$P(x) = 0 + (-1)(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 = -(x-1) + (x-1)^2.$$

Формула Тейлора для функции $f(x)$.

Пусть существуют $f^{(n)}(x) \;\; \forall n \in N$ в $U(a)$.

Построим функцию

$$Q_{n-1}(x) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

Очевидно, если $f(x)$ – многочлен степени $n-1$, то $f(x) = Q_{n-1}(x)$. Пусть $f(x)$ не является многочленом степени $n-1$. Представим функцию $f(x)$ в виде

$$f(x) = Q_{n-1}(x) + R_n(x) =$$

$$= f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(x-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} + R_n(x).$$

Тогда на отрезке $[a, b]$

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + R_n(b),$$

где $R_n(b)$ будем искать в виде $R_n(b) = M(b-a)^n$.

Для этого введем на отрезке $[a, b]$ функцию

$$\varphi(x) = f(b) -$$

$$-\left(f(x) + \frac{f^{'}(x)}{1!}(b-x) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + M(b-x)^n\right).$$

Эта функция удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля, т.е.

1) она непрерывна на $[a, b]$, так как $f(x)$ непрерывна вместе со своими производными;

2) существует $\varphi^{'}(x)$, так как существуют $f^{(n)}(x)$ на (a, b);

3) $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$.

Следовательно существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $\varphi^{'}(\xi) = 0$.

Поскольку

$$\varphi^{'}(x) = -\left(f^{'}(x) - \frac{f^{'}(x)}{1!} + \frac{f^{''}(x)}{1!}(b-x) - \dots -\right.$$

$$\left.-\frac{f^{(n-1)}(x)}{(n-1)!}(n-1)(b-x)^{n-2} + \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} - Mn(b-x)^{n-1}\right),$$

то

$$\varphi^{'}(x) = -\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1} + Mn(b-x)^{n-1}.$$

Следовательно,

$$\varphi^{'}(\xi) = -(b-\xi)^{n-1}\left(\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} - Mn\right) = 0, \;\; \xi \neq b.$$

Таким образом $\frac{f^{(n)}(\xi)}{(n-1)!} - Mn = 0$, т.е. $M = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$. Получим, что $R_n(b) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n$, $a < \xi < b$. А, следовательно,

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a) + \dots +$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n, \;\; \xi \in (a, b).$$

Переобозначая $a = x_0 \in [a, b]$, $b = x \in [a, b]$ получим

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots +$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\ \ \xi\in(x_0,x).$$

Замечание. При $n=1$ из формулы

$$f(b)=f(a)+\frac{f^{'}(a)}{1!}(b-a)+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(b-a)^{n-1}+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(b-a)^n,\ \ \xi\in(a,b)$$

получаем формулу Лагранжа конечных приращений:

$$f(b)-f(a)=\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(b-a).$$

Определение. Функция

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\ \ \xi\in(x_0,x).$$

называется остаточным членом в форме Лагранжа.

Определение. Формула

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+R_n(x),$$

где

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n,\ \ \xi\in(x_0,x)$$

называется формулой Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Лагранжа.

Определение. Функция

$$R_n(x)=\frac{f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)}{n!}(x-x_0)^n,$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$ называется остаточным членом формулы Тейлора в форме Пеано.

Формула Тейлора для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Пеано показывает, что, заменив $f(x)$ в $U(x_0)$ многочленом Тейлора n-ой степени, мы совершим ошибку, которая при $x \to x_0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x - x_0)^n$.

4.4 Разложение по формуле Маклорена некоторых элементарных функций

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{e^{\theta x}}{n!}, \ \ 0 < \theta < 1;$$

$$sin\, x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} +$$

$$+\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} sin\left(\theta x + (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), \ \ 0 < \theta < 1;$$

$$cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} +$$

$$+\frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} cos\left(\theta x + (2k+2)\frac{\pi}{2}\right), \ \ 0 < \theta < 1;$$

$$ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{n-1}}{n-1} + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n(1+\theta x)^n}, \ \ 0 < \theta < 1;$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdot + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)}{(n-1)!}x^{n-1} +$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{\alpha-n}x^n, \ \ 0 < \theta < 1.$$

Таким образом,

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{(n)!} + o(x^n);$$

$$sin\, x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2});$$

$$cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1});$$

$$ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdot + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} + o(x^n).$$

Глава 5

Исследование функции одной переменной

5.1 Признаки возрастания и убывания.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется неубывающей на нем, если для любых точек $x_1,\ \ x_2$ из отрезка $[a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется невозрастающей на нем, если для любых точек $x_1,\ \ x_2$ из отрезка $[a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется возрастающей на нем, если для любых точек $x_1,\ \ x_2$, из отрезка $[a, b]$, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется убывающей на нем, если для любых точек $x_1,\ \ x_2$, из отрезка $[a, b]$, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется монотонной на нем, если она на этом отрезке только неубывающая, или только невозрастающая.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется строго монотонной на нем, если она на этом отрезке только возрастающая, или только убывающая.

Теорема 1. Пусть

1) функция $f(x)$, непрерывна на отрезке $[a,b]$,

2) существует $f^{'}(x)$, по крайней мере, на (a,b).

Чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ была неубывающей, необходимо и достаточно, чтобы $f^{'}(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ неубывающая. Возьмем $x \in (a,b)$. Так как $f(x)$ неубывающая, то $\forall \Delta x$ знак Δx и Δf одинаков. Следовательно, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Поскольку $\exists f^{'}(x) \ \forall x \in (a,b)$, то $f^{'}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

($\Leftarrow$) Пусть $f^{'}(x) \geq 0$ на (a,b) и пусть $x_1 < x_2 \ \forall x \in [a,b]$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f^{'}(\xi)(x_2 - x_1), \ \ \xi \in (x_1, x_2).$$

Так как $f^{'}(x) \geq 0 \ \forall x \in (a,b)$, то $f^{'}(\xi) \geq 0$. Поскльку $x_1 < x_2$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Т.е. $f(x_2) \geq f(x_1)$, следовательно $f(x)$ – неубывающая. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть

1) функция $f(x)$, непрерывна на отрезке $[a,b]$,

2) существует $f^{'}(x)$, по крайней мере, на (a,b).

Чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ была невозрастающей, необходимо и достаточно, чтобы $f^{'}(x) \leq 0 \ \forall x \in (a,b)$.

Доказательство. доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Таким образом, интервалы знакопостоянства $f^{'}(x)$ являются интервалами монотонности $f(x)$.

Утверждение (достаточные условия возрастания и убывания функции. Если $f^{'}(x) > 0 \ \forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ возрастает на отрезке $[a,b]$; если $f^{'}(x) < 0 \ \forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ убывает на отрезке $[a,b]$.

Замечание. Утверждение работает в одну сторону.

Пример. $f(x) = x^3$ возрастает на $[-1, 1]$, но $f^{'}(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется возростающей в точке $x = x_0$, если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$, удовлетворющих неравентсву $x < x_0$, справедливо $f(x) < f(x_0)$, и $\forall x \in U_\delta(x_0)$, удовлетворяющих неравенству $x > x_0$, справедливо $f(x) > f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется убывающей в точке $x = x_0$, если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$, удовлетворющих неравентсву $x < x_0$, справедливо $f(x) > f(x_0)$, и $\forall x \in U_\delta(x_0)$, удовлетворяющих неравенству $x > x_0$, справедливо $f(x) < f(x_0)$.

Теорема (Достаточные условия возрастания и убывания в точке. Пусть существует $f^{'}(x_0)$. Если $f^{'}(x_0) > 0$, то $f(x)$ возрастает в точке $x = x_0$; если $f^{'}(x_0) < 0$, то $f(x)$ убывает в точке $x = x_0$.

Доказательство. Пусть существует $f^{'}(x_0) > 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Следовательно, $\exists \delta > 0$ такая, что $\forall \Delta x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |\Delta x| < \delta$, верно неравенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Т.е. величины Δx и $\Delta f(x_0)$ имеют одинаковый знак. Следовательно, если $\Delta x < 0$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ т.е. $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$; а если $\Delta x > 0$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$ т.е. $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$,

Таким образом функция $f(x_0)$ возрастает, т.е. $f(x)$ возрастает в точке $x = x_0$.

Аналогично доказывается и убывание функциии $f(x)$ в точке $x = x_0$. Теорема доказана.

5.2 Экстремум функции.

Пусть $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 включая x_0.

Определение. Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума, если $\exists \delta > 0$ такая, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$ справедливо $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0$, т.е. $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение. Точка $x = x_0$ называется точкой локального минимума, если $\exists \delta > 0$ такая, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$ справедливо $\Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0$, т.е. $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение. Значение $f(x_0)$ называется локальным максимумом функции $f(x)$ если точка x_0 является точкой локального максимума.

Определение.Значение $f(x_0)$ называется локальным минимумом функции $f(x)$ если точка x_0 является точкой локального минимума.

Определение. Локальные максимум и минимум функции называются локальными экстремумами функции.

Определение. Точка $x = x_0$ называется точкой строгого максимума (минимума) функции $f(x)$ если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется $f(x) - f(x_0) < 0$ ($f(x) - f(x_0)$, соответственно). При этом значение $f(x_0)$ называется строгим максимумом (минимумом) соответственно.

Замечание.Здесь не предполагается непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Пример.Функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$ имеет разрыв и локальный максимум, так как $f(x) - f(0) = f(x) - 1 < 0$, $\forall x \in (-1, 1)$.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то $f'(x_0) = 0$ либо $\nexists f'(x_0)$.

Доказательство. Пусть существует $\exists f^{'}(x_0) \neq 0$. Для определенности, пусть $f^{'}(x_0) > 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает в точке x_0 и, следовательно, существует $\delta > 0$ такая, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$, а $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x) > f(x_0)$. Следовательно, не существует окрестности $U(x_0)$ такой, что $\forall x \in U(x_0)$ $f(x_0) > f(x)$, или $f(x_0) < f(x)$. Получаем, что точка $x = x_0$ не является точкое экстремума.

Аналогично, при $f^{'}(x_0) < 0$ точка $x = x_0$ не является точкой экстремума. Таким образом, получили противоречие предположению. Теорема доказана.

Определение. Точки экстремума называются критическими точками функции.

Определение. Корни уравнения $f^{'}(x) = 0$ нвзываются стационарными точками функции $f(x)$.

Замечание. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Пример. Для функции $f(x) = x^3$ имеем $f^{'}(0) = 0$, т.е. точка $x = 0$ – критическая точка, однако, она не является точкой экстемума.

Теорема (достаточные условия экстемума). Пусть

1) точка $x = x_0$ – критическая точка функции $f(x)$ т.е. $f^{'}(x_0) = 0$ либо $\nexists f^{'}(x_0)$,

2) функция $f(x)$ непрерывнав точке x_0.

Тогда

1) если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f^{'}(x) > 0$ и $\forall \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f^{'}(x) < 0$, то точка x_0 – точка локального максимума функции $f(x)$;

2) если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f^{'}(x) < 0$ и $\forall \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f^{'}(x) > 0$, то точка x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$.

Доказательство. По условию $f^{'}(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, следовательно функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$.

Так как $f^{'}(x) < 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то функция $f(x)$ убывает на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$.

Таким образом, значение $f(x_0)$ – наибольшее значение функции $f(x)$ $\forall x \in U_\delta(X_0)$. Следовательно, x_0 – точка локального максимума функции $f(x)$, $f(x_0)$ – локальный максимум этой функции.

Случай 2) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Условие непрерывности функции существенно.

Определение. Множество $X \in R$ такое, что $\forall x \in X$ $f^{'}(x) > 0$ называется множеством (интервалом) возрастания функции $f(x)$. **Определение.** Множество $X \in R$ такое, что $\forall x \in X$ $f^{'}(x) < 0$ называется множеством (интервалом) убывания функции $f(x)$.

Правило отыскания экстремума.

1)Найти критические точки, т.е.

а) найти стационарные точки (решить уравнение $f^{'}(x) = 0$)

б)Найти точки, в которых $\nexists f^{'}(x)$;

2) Определить знак $f^{'}(x)$ с обеих сторон от каждой критической точки;

3) Сделать вывод, используя теорему о достаточных условиях экстремума.

Пример 1. Исследовть на экстремум функцию $y = x^2 e^{-x}$.

Решение. 1) Найдем критические точки:

$y^{'} = 0 \quad \Leftrightarrow xe^{-x}(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0, \ \ x_2 = 2$. Таким образом, точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ – критические.

2) Определим знак $y = x^2 e^{-x}$ с обеих сторон от каждой критической точки:

$$y^{'}(x) > 0 \ \ \forall x \in (0, 2),$$

$$y^{'}(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$

Следовательно, функция возрастает при $x \in (0, 2)$, и убывает при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

3) Согласно теореме о достаточных условиях экстремума $x_1 = 0$

– точка локального минимума функции, а $f(x_1) = 0$ – локальный минимум; $x_2 = 2$ – точка локального максимума функции, а $f(x_2) = 4e^{-2}$ – локальный максимум.

Пример 2. Исследовть на экстремум функцию $y = x^{\frac{2}{3}}$.

Решение. 1) Найдем критические точки:

$y^{'} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = 0$ – это уравнение решения не имеет и $y^{'}$ не определено при $x = 0$. Таким образом, точка $x = 0$ – критическая.

2) Определим знак функции с обеих сторон от этой критической точки:

$$y^{'}(x) < 0 \;\; \forall x \in (-\infty, 0).$$

$$y^{'}(x) > 0 \;\; \forall x \in (0, +\infty),$$

Следовательно,функция убывает при $x \in (-\infty, 0)$, и возрастает при $x \in (0, +\infty)$.

3) Согласно теореме о достаточных условиях экстремума $x = 0$ – точка локального минимума функции, а $f(x = 0) = 0$ – локальный минимум.

Исследование на экстремум при помощи второй производной.

Теорема. Пусть существуют $f^{'}(x_0)$ и $f^{''}(x_0)$, и $f^{'}(x_0) = 0$, $f^{''}(x_0) \neq 0$. Тогда

1) если $f^{''}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума;

2) если $f^{''}(x_0) > 0$ то x_0 – точка локального минимума.

Доказательство. Пусть $f^{'}(x_0) = 0$ и $f^{''}(x_0) < 0$. Тогда $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $f^{'}(x) > f^{'}(x_0) = 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает, а $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f^{'}(x) < f^{'}(x_0) = 0$, т.е. функция $f(x)$ убывает. Следовательно точка x_0 – точка локального максимума.

Аналогично, если $f^{''} > 0$. Тогда $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $f^{'}(x) < f^{'}(x_0) = 0$, т.е. функция

$f(x)$ убывает, а $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f^{'}(x) > f^{'}(x_0) = 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает. Следовательно точка x_0 – точка лькального минимума. Теорема доказана.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = e^{-x^2}$.

Решение.

$$y^{'} = 0 \leftrightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0,$$

т.е. $x = 0$ – критическая точка функции.

$$y^{''} = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1),$$

и $y^{''}(x = 0) = -2 < 0$. Следовательно, $x = 0$ – точка локального максимаму, а $y(x = 0) = 1$ – локальный максимум.

Теорема (достаточные условия экстремума). Пусть $f(x)$ k раз дифференцируема в точке $x = x_0$, и $f^{'}(x_0) = f^{''}(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)} \neq 0$.

Тогда

1) если k – четное, то при $f^{(k)}(x_0) > 0$ точка $x = x_0$ является точкой локального минимума, а при $f^{(k)}(x_0) < 0$ – точкой локального максимума;

2) если k – нечетное, то в точке $x = x_0$ экстремума нет.

Пример. Для функции $y = x^3$ точка $x = 0$ является критической. Но в этой точке функция не имеет экстремума, так как $f^{'}(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$, $f^{''}(0) = 6x|_{x=0} = 0$, $f^{'''}(0) = 6 \neq 0$.

5.3 Наибольшее и наименьшее значения функции.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, согласно 2-й теореме Вейерштрасса, на этом отрезке она принимает наибольшее и наименьшее значения.

Если свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает в точке $x_0 \in (a, b)$, то $M = f(x_0)$ – локальный максимум.

Аналогично с наименьшим значением: если $x_0 \in (a, b)$ и $m = f(x_0)$, то m – локальный минимум.

Однако, свои наибольшее M и наименьшее m значения функция $f(x)$ может принимать и на концах отрезка $[a, b]$. Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, надо найти все экстремумы на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка. Тогда m – наименьшее из всех полученных значений, а M – наибольшее.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x(a - 2x)^2$ на отрезке $[0, \frac{a}{2}]$.

Решение. $f^{'} = (a - 2x)(a - 6x)$. Следовательно, из $y^{'} = 0$ получаем $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{6}$.

Считаем значения функции в найденных точках и на концах отрезка:

$$f(x_1) = f\left(\frac{a}{2}\right) = 0, \;\; f(x_2) = f\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}, \;\; f(0) = 0.$$

Поскольку, наибольшее из всех полученных значений – это число $\frac{2a^3}{27}$, а наименьшее – это число 0, то $M = \frac{2a^3}{27} = f\left(\frac{a}{6}\right)$, $m = 0 = f\left(\frac{a}{2}\right) = f(0)$.

5.4 Направления выпуклости функции. точки перегиба.

Пусть функция $y = f(x)$ такова, что существует конечная производная $f^{'}(x_0)$, т.е. в точке $M(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику функции $y = f(x)$, которая не параллельна оси Oy.

Определение. Если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что любые точки $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$, где $x \in U_\delta(x_0)$, расположены над касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, то говорят, что выпоуклость данной кривой направлена вниз.

Определение. Если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что любые точки $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$, где $x \in U_\delta(x_0)$, расположены под касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, то говорят, что выпоуклость данной кривой направлена вверх.

Определение. Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется тоской перегиба графика функции $y = f(x)$ если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x < x_0$, $x \in U_\delta(x_0)$, выпуклость графика направлена в одну сторону, а $\forall x > x_0$, $x \in U_\delta(x_0)$, – в противоположную сторону, т.е. если при переходе через точку $M(x_0, f(x_0))$ график функции $y = f(x)$ меняет направление выпуклости.

Теорема (необходимое условие перегиба). Если $M(x_0, f(x_0))$ точка перегиба графика $y = f(x)$, то $f''(x_0) = 0$ либо не существует.

Доказательство. Пусть точка $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика $y = f(x)$ и пусть, для определенности,

$$\forall x \in U_\delta(x_0): \ \ x < x_0 \Rightarrow f(x) > Y(x) \ \ (\ f(x) - Y(x) > 0),$$

$$\forall x \in U_\delta(x_0): \ \ x > x_0 \Rightarrow f(x) < Y(x) \ \ (\ f(x) - Y(x) < 0),$$

где $Y(x)$ – ординаты касательной $Y = Y(x)$ к графику $y = f(x)$ в точке M.

Уравненеие касательной имеет вид

$$Y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

или

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Разложим функцию $y = f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $U_\delta(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2, \ \ 0 < \theta < 1.$$

Тогда получим

$$f(x) - Y(x) =$$

учитывая уравнение касательной

$$= f(x) - \Big(f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)\Big) =$$

согласно разложения в ряд Тейлора

$$= \frac{f^{''}(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2.$$

Так как,

если $f(x)-Y(x) > 0, \forall x \in U_\delta(x_0) : x < x_0$, то $f^{''}(x_0+\theta(x-x_0)) > 0$,

если $f(x)-Y(x) < 0, \forall x \in U_\delta(x_0) : x > x_0$, то $f^{''}(x_0+\theta(x-x_0)) < 0$.

Предположим, что $f^{''}(x_0) \neq 0$. Тогда, в силу устойчивости знака непрерывной функции, в окрестности $U_\delta(x_0)$ знак $f^{''}(x_0 + \theta(x - x_0))$ совпадает со знаком $f^{''}(x_0)$. Следовательно получаем противоречие предположению, т.е. $f^{''}(x_0) = 0$ или не существует. Теорема доказана.

Теорема (достаточные условия перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ такая, что

1) $\exists f^{''}(x) \ \ \forall x \in U_\delta(x_0)$,

2) $f^{''}(x_0) = 0$, или не существует,

3) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ производная $f^{''}(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.

Тогда точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0) : x < x_0$ производная $f^{''}(x)$ имеет один знак, а $\forall x \in U_\delta(x_0) : x > x_0$ производная $f^{''}(x)$ имеет противоположный знак. Следовательно, при переходе через точку $M(x_0, f(x_0))$ график $y = f(x)$ меняет направление выпуклости, т.е. точка M является точкой перегиба.

Если $\nexists f^{''}(x)$, то касательная вертикальна. Теорема доказана.

5.5 Асимптоты графика функции.

Определение. Прямая, к которой график кривой $y = f(x)$ непрерывно приближается, называется асимптотой.

1) Вертикальные асимптоты.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика $y = f(x)$, если хотя ба один из пределов $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, равен $\pm\infty$.

При этом, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \pm\infty$, то $x = x_0$ является левой асимптотой, а если $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \pm\infty$, то $x = x_0$ – правой асимптотой.

2) Наклонные асимптоты.

Теорема. Чтобы график $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $y = kx + b$ – асимптота графика $y = f(x)$. Тогда функцию $y = f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to+\infty}(kx + b + \alpha(x) - kx) = b$.

($\Leftarrow$) пусть существуют пределы $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - kx) = b$.

Тогда функция $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$. Следовательно, $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, т.е. $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика $y = f(x)$. Аналогично, при $x \to -\infty$. Теорема доказана.

3) Горизонтальные асимптоты. – частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$.

Пример 1. Функция $y = \frac{x^2}{x-1}$ неопределена в точке $x = 1$. Поскольку $\lim\limits_{x\to1\pm0} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика $y = \frac{x^2}{x-1}$. Далее,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1.$$

Следовательно, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой графика $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Пример 2. Функция $y = \frac{sin\,x}{x}$ неопределена в точке $x = 0$. Однако, $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{sin\,x}{x} = 1$, следовательно, прямая $x = 0$ не является асимптотой к данному графику. Далее,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{sin\,x}{x \cdot x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{sin\,x}{x} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0$ горизонтальная асимптота графика $y = \frac{sin\,x}{x}$.