УДК 517.956+517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНЫХ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $u_t = \nabla \cdot \left(u^\lambda \nabla u\right)$

Г.А.Рудых

Настоящая статья примыкает к исследованиям [1-7] и посвящена конструктивному построению точных неавтомодельных, анизотропных по пространственным переменным, явных неотрицательных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), u = u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{1}$$

в виде "конечных сумм" [8], где $\Omega \subset \Re^n$ - область; $\Re^+ = (0, \infty); u(\mathbf{x}, t) \geq 0$-температура среды; $\lambda \in \Re\backslash\{0\}$. Уравнение (1) встречается во многих прикладных задачах [9] и принадлежит классу, так называемых, неявно вырождающихся параболических уравнений [10, 11]. В работе предлагается и исследуется нетривиальная конструкция [5–7]

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\lambda \left[Z_1(\mathbf{x}, t)\right]_+^p + \lambda Z_2(\mathbf{x}, t)\right]_+^{1/\lambda}, \tag{2}$$

точного неотрицательного решения уравнения (1), которое, в зависимости от параметра нелинейной среды $\lambda \in \Re\backslash\{0\}$, описывает [11, с.136–138]различные процессы распространения тепла и диффузии, где

$$Z_k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{x}, A_k(t)\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{x}, \mathbf{B}_k(t)\right) + C_k(t), \tag{3}$$

$\mathbf{x} \in \Re^n;\ A_k(t) = [a_{kij}(t)]$ - вещественные симметричные матрицы $n \times n;\ \mathbf{B}_k(t) = (b_{k1}(t), ..., b_{kn}(t))'$ - вектор-столбцы; $C_k(t)$ - скалярные функции; $a_{kij}(t),\ b_{ki}(t),\ C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ - вещественные функции; $k = 1, 2;\ i, j = 1, 2, ..., n;\ (\cdot, \cdot)$- скалярное произведение в $\Re^n;\ [\cdot]_+ = max\{[\cdot], 0\};\ p \in \Re\backslash\{0\}$.

В итоге, после подстановки выражения (2) с учетом (3) в уравнение (1) и с использованием результатов работы [12, с.177-209], приходим к исследованию переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций) системы алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ) [5–7]:

$$\dot{A}_2 = 2A_2^2 + \lambda(trA_2)A_2,\ A_2(t)|_{t=0} = A_2(0),$$

$$\dot{\mathbf{B}}_2 = 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(trA_2)\mathbf{B}_2,\ \mathbf{B}_2(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_2(0),$$

$$\dot{C}_2 = |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(trA_2)C_2,\ C_2(t)|_{t=0} = C_2(0),$$

$$\dot{A}_1 = 4A_1A_2 + \tau(trA_2)A_1 + \sigma(trA_1)A_2,\ A_1(t)|_{t=0} = A_1(0), \tag{4}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_1 = 2(A_1\mathbf{B}_2 + A_2\mathbf{B}_1) + \tau(trA_2)\mathbf{B}_1 + \sigma(trA_1)\mathbf{B}_2,\ \mathbf{B}_1(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_1(0),$$

$$\dot{C}_1 = 2(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) + \tau(trA_2)C_1 + \sigma(trA_1)C_2,\ C_1(t)|_{t=0} = C_1(0),$$

$$\lambda(trA_1)A_1 + 2\xi A_1^2 = 0,\ \lambda(trA_1)\mathbf{B}_1 + 2\xi A_1\mathbf{B}_1 = 0,\ \lambda(trA_1)C_1 + \xi|\mathbf{B}_1|^2 = 0, \tag{5}$$

где $\sigma = p\lambda/\xi; \tau = \lambda/p; p, \lambda, \xi \in \Re\backslash\{0\}; \xi = p(\lambda+1) - \lambda; trA_k = \sum_{i=1}^{n} a_{kii}(t)$ - след матрицы $_k(t); k = 1, 2$.

Имеет место следующий, основополагающий, результат.

Теорема 1. *Пусть заданы вещественные симметричные матрицы $A_1(0), A_2(0) \in M_n(\Re)$, обладающие свойством коммутации $A_1(0)A_2(0) = A_2(0)A_1(0)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\Re)$ и скаляры $C_1(0), C_2(0) \in \Re$. Пусть $z(t)$ и $u(t)$- соответственно вещественные решения задачи Коши*

$$\dot{z}(t) = \prod_{l=1}^{n}[1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}, z(0) = 0, \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t),$$

и линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_0(t) = \sigma\int_0^t K_0(t,\eta)u_0(\eta)d\eta + f_0(t),$$

с ядром $K_0(t,\eta)$ и свободным членом $f_0(t)$ вида

$$K_0(t,\eta) = \dot{z}(\eta)tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)],\ \ f_0(t) = tr[Q^2(t)\Lambda(0)].$$

Тогда существует вещественное решение матрично-векторно-скалярной задачи Коши (4), определяемое формулами

$$A_2(t) = \dot z(t) S Q(t) D(0) S' = \dot z(t) S Q(t) S' A_2(0),\ \mathbf{B}_2(t) = \dot z(t) S Q(t) S' \mathbf{B}_2(0),$$

$$C_2(t) = \dot z(t)\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\right],$$

$$A_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{p}} S\left[\sigma\int_0^t \dot z(\eta) u_0(\eta) Q^{-1}(\eta) D(0) d\eta + \Lambda(0)\right] Q^2(t) S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{p}} S Q(t)\left[\sigma\left(\int_0^t \dot z(\eta) u_0(\eta) Q^{-1}(\eta) d\eta\right) Q(t) S'\mathbf{B}_2(0) +\right.$$

$$\left. +2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\right],$$

$$C_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{p}}\left[C_1(0) + 2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +\right.$$

$$+2z^2(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+\sigma\left(\int_0^t \dot z(\eta) u_0(\eta) d\eta\right)\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +\right.$$

$$\left. +z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\right] - \sigma\left(\int_0^t z(\eta)\dot z(\eta) u_0(\eta) d\eta\right)\left.|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\right].$$

Помимо этого, $A_1(t), A_2(t)$*- вещественные симметричные матрицы, соответственно, для всех* $t \in domain A_1(t), t \in domain A_2(t)$ *и*

$$v(t) = tr A_2(t) = \dot z(t) tr\left(Q(t)D(0)\right) = \dot z(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)},$$

$$Q(t) = diag\left[[1 - 2d_1(0)z(t)]^{-1}, \ldots, [1 - 2d_n(0)z(t)]^{-1}\right] = (I - 2z(t)D(0))^{-1},$$

$$\ddot z(t) = \lambda v(t)\dot z(t),\ \dot z(0) = 1,\ z(0) = 0,$$

где $D(0) = diag[d_1(0), \ldots, d_n(0)];\ \ d_l(0) \in \Re$*- собственные значения матрицы* $A_2(0); S \in M_n(\Re)$*- произвольная ортогональная матрица;* $\Lambda(0) = S'A_1(0)S;\ D(0) = S'A_2(0)S;\ u_0(t) = u(t)[\dot z(t)]_+^{-1/p};\ u(t) = tr A_1(t)$.

Замечание 1. Если ввести в рассмотрение матрицы $\Lambda(t) = diag[\lambda_1(t), \dots, \lambda_n(t)], D(t) = diag[d_1(t), ..., d_n(t)]$ с вещественными собственными значениями вида

$$\lambda_k(t) = \left[\sigma d_k(t) \int_0^t [1 - 2d_k(0)z(\eta)][\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) d\eta + \lambda_k(0)\right] \times$$

$$\times [1 - 2d_k(0)z(t)]^{-2} [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}, \ d_k(t) = \frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)} \dot{z}(t), \ (k = 1, 2, \dots, n),$$

то $A_2(t) = SD(t)S', \ D(t) = \dot{z}(t)Q(t)D(0)$ и

$$A_1(t) = S\Lambda(t)S', \Lambda(t) = [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}} \left[\sigma \int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta) D(0) d\eta + \Lambda(0)\right] Q^2(t).$$

Исследование задачи Коши для системы АДУ (4), (5) распадается на два непересекающихся случая: $p \neq 2$ и $p = 2$. Например, с учетом теоремы 1, справедлив следующий результат.

Теорема 2. *Пусть $p = 2$ и заданы вещественные симметричные матрицы $A_1(0), A_2(0) \in M_n(\Re)$ со свойством коммутации $A_1(0)A_2(0) = A_2(0)A_1(0)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\Re)$, и скаляры $C_1(0), C_2(0) \in \Re$, определяемые посредством формул*

$$\mathbf{B}_2(0) = \frac{1}{\lambda(0)} SD(0)S'\mathbf{B}_1(0), C_1(0) = \frac{1}{2\lambda(0)} |S'\mathbf{B}_1(0)|^2 = \frac{1}{2\lambda(0)} |\mathbf{B}_1(0)|^2,$$

$$C_2(0) = \frac{1}{2\lambda^2(0)} \left(S'\mathbf{B}_1(0), D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right) = \frac{1}{2\lambda(0)} \left(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)\right).$$

Пусть $z(t)$ - вещественное решение задачи Коши

$$\dot{z}(t) = \prod_{k=1}^{m} [1 - 2d_k(0)z(t)]^{\frac{2}{m+2}}, \ \ z(0) = 0, \ m \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Тогда задача Коши (4), нагруженная алгебраическими уравнениями (5) обладает вещественным решением

$$A_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S' = \dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0),$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) = \frac{1}{\lambda(0)} \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0) = \frac{1}{\lambda(0)} A_2(t)\mathbf{B}_1(0),$$

$$C_2(t)=\dot z(t)C_2(0)+z(t)\left(\mathbf{B}_2(0),\mathbf{B}_2(t)\right)=$$
$$=\frac{1}{2\lambda^2(0)}\dot z(t)\left(SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_1(0)\right)=\frac{1}{2\lambda^2(0)}\left(A_2(t)\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_1(0)\right),$$
$$A_1(t)=\lambda(0)[\dot z(t)]_+^{1/2}SE_mS'=[\dot z(t)]_+^{1/2}A_1(0),$$
$$\mathbf{B}_1(t)=[\dot z(t)]_+^{1/2}\left[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0)-2\lambda(0)z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right]=[\dot z(t)]_+^{1/2}\mathbf{B}_1(0),$$
$$C_1(t)=[\dot z(t)]_+^{1/2}\Bigg[C_1(0)-4\lambda(0)z(t)C_2(0)+2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)-$$
$$-4\lambda(0)z^2(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)\Bigg]=\frac{1}{2\lambda(0)}[\dot z(t)]_+^{1/2}|\mathbf{B}_1(0)|^2,\lambda(0)\in\Re\backslash\{0\}.$$

Помимо этого, $A_1(t),A_2(t)-$ *вещественные симметричные матрицы, соответственно, для всех* $t\in domain A_1(t),t\in domain A_2(t)$ *и*

$$Q(t)=diag\left[[1-2d_1(0)z(t)]^{-1},\dots,[1-2d_m(0)z(t)]^{-1},1,\dots,1\right],$$
$$v(t)=-\frac{m+2}{4}\frac{d}{dt}\ln|\dot z(t)|,\ u(t)=\lambda(0)m[\dot z(t)]_+^{1/p},$$

где $D(0)=diag[d_1(0),\dots,d_m(0),0,\dots,0]$; $d_k(0)\in\Re\backslash\{0\}$*- собственные значения матрицы* $A_2(0); rank A_1(t)=m=-2\xi/\lambda; k=1,2,\dots,m; u(t)$*- решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода*

$$u(t)=\sigma\int_0^t K(t,\eta)u(\eta)d\eta+f(t),\ \sigma=\frac{\lambda p}{\xi},$$

с ядром $K(t,\eta)$ *и свободным членом* $f(t)$ *вида*

$$K(t,\eta)=\left[\frac{\dot z(t)}{\dot z(\eta)}\right]^{1/p}\dot z(\eta)tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)],\ f(t)=[\dot z(t)]^{1/p}tr[\Lambda(0)Q^2(t)].$$

Рассмотрим уравнение

$$u_t=\Delta\ln u, u=u(\mathbf{x},t):\Omega\times\overline{\Re}^+\to\Re^+,\mathbf{x}\in\Re^n, \tag{6}$$

которое при $n=2$ является особым с точки зрения групповой теории, так как в этом случае группа Ли допустимых преобразований является бесконечномерной [13] и, согласно общепринятой терминологии, называется предельным уравнением быстрой диффузии.

Пример 1. Уравнение (6) ($n = 2$) имеет точное неавтомодельное, анизотропное по пространственным переменным, явное неотрицательное решение

$$u(x,y,t) = \left[4cn(\Omega t,k)\left[\frac{\gamma^2+\mu^2}{4\sigma}\Big(1+sn(\Omega t,k)\Big)(x^2+y^2)^2+\right.\right.$$

$$+4\gamma\Big(1-sn(\Omega t,k)\Big)xy+\Big(\Omega-2\mu\Big(1-sn(\Omega t,k)\Big)\Big)y^2+$$

$$\left.\left.+\Big(\Omega+2\mu\Big(1-sn(\Omega t,k)\Big)\Big)x^2+4\sigma\Big(1+sn(\Omega t,k)\Big)\right]^{-1}\right]_+, \sigma \in \Re\backslash\{0\},$$

где $sn(\Omega t,k)$, $cn(\Omega t,k)$ - эллиптические синус, косинус Якоби [14] с модулем

$$k = \sqrt{\frac{A^2-32(\gamma^2+\mu^2)}{A^2+32(\gamma^2+\mu^2)}};\ A^2 \geq 32(\gamma^2+\mu^2);\ \Omega = \frac{1}{2}\sqrt{A^2+32(\gamma^2+\mu^2)};$$

$A, \gamma, \mu \in \Re$. При $A^2 = 32(\gamma^2+\mu^2)$ эллиптические синус и косинус Якоби вырождаются в тригонометрические функции. В этом случае имеем

$$u(x,y,t) = \left[4cos(\omega t)\left[\frac{\omega^2}{16\sigma}\Big(1+sin(\omega t)\Big)(x^2+y^2)^2+\Big(\omega^2+2\mu\Big(1-sin(\omega t)\Big)\Big)x^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+4\gamma\Big(1-sin(\omega t)\Big)xy+\Big(\omega^2-2\mu\Big(1-sin(\omega t)\Big)\Big)y^2+4\sigma\Big(1+sin(\omega t)\Big)\right]^{-1}\right]_+,$$

где $\omega = 4\sqrt{\gamma^2+\mu^2}$; $\sigma, \gamma, \mu \in \Re; \sigma \neq 0$.

Пример 2. Уравнение нелинейной диффузии (6) при $n = 3$ обладает точным неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением

$$u(x,y,z,t) = \left[\frac{2\,\mathrm{sn}(mt,k)\,\mathrm{cn}(mt,k)}{\mathrm{dn}(mt,k)}\left[mx^2-\frac{2c_6}{k}\frac{\mathrm{sn}^2(mt,k)}{\mathrm{cn}^2(mt,k)}-\frac{2c_3}{k}x-\right.\right.$$

$$-\frac{\mathrm{sn}^2(mt,k)}{\mathrm{dn}^2(mt,k)}\left(\frac{c_1}{m}y^2+2c_4ky\right)+\mathrm{sn}^2(mt,k)\left(mz^2-\frac{2c_5}{k}z\right)+ \tag{7}$$

$$\left.\left.+\frac{1}{m\,\mathrm{cn}^2(mt,k)}\left(\frac{c_3^2}{k^2}-c_4^2\frac{\mathrm{sn}^2(mt,k)}{\mathrm{dn}^2(mt,k)}-\frac{c_5^2}{k^2}\,\mathrm{sn}^4(mt,k)\right)\right]^{-1}\right]_+,$$

где $m = \sqrt{c_2-c_1}$; $\mathrm{sn}(mt,k), \mathrm{cn}(mt,k), \mathrm{dn}(mt,k)$ - соответственно эллиптический синус, эллиптический косинус и дельта амплитуда Якоби с модулем $k = \sqrt{c_2}/m$; $c_i \in \Re$; $c_2 > c_1; c_2 \geq 0; i = 1, 2, \ldots, 6$.

Рассмотрим случаи вырождения эллиптических функций в тригонометрические и гиперболические. Если $c_2 = 0$, тогда $k = 0$ и из формулы (7), в пределе, получим точное решение в тригонометрических функциях

$$u(x,y,z,t) = \Bigg[2\sin(wt)\cos(wt)\Bigg[wx^2 - 2c_3x + \frac{c_3^2}{w\cos^2(wt)} - 2c_6\operatorname{tg}^2(wt) +$$

$$+\sin^2(wt)\Big(wy^2 - 2c_4y + wz^2 - 2c_5z\Big) - \frac{(c_4^2+c_5^2)}{w}\frac{\sin^4(wt)}{\cos^2(wt)}\Bigg]^{-1}\Bigg]_+, \qquad (8)$$

где $w = \sqrt{-c_1}$. Отметим, что если $c_1 = -1, c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$, то из (8) следует решение

$$u(x,y,z,t) = \left[\frac{2\sin t\cos t}{x^2 + \sin^2 t(y^2+z^2)}\right]_+,$$

приведенное в [3]. Полагая $c_1 = 0$, получим $k = 1$ и из выражения (7) вытекает точное решение в гиперболических функциях

$$u(x,y,z,t) = \Bigg[\operatorname{th}(vt)\Bigg[vx^2 - 2c_3x - 2c_4\operatorname{sh}^2(vt)y + \operatorname{th}^2(vt)\Big(vz^2 - 2c_5z\Big) + \qquad (9)$$

$$+\frac{c_3^2}{v}\operatorname{ch}^2(vt) - \frac{c_4^2}{v}\operatorname{sh}^2(vt)\operatorname{ch}^2(vt) - \frac{c_5^2}{v}\frac{sh^4(vt)}{ch^2(vt)} - 2c_6\operatorname{sh}^2(vt)\Bigg]^{-1}\Bigg]_+,$$

которое является довольно интересным, так как при $c_4 = 0$ оно вырождается в двумерное, где $v = \sqrt{c_2}$. Например, если $c_2 = 1,\ c_3 = c_4 = c_5 = 0,\ c_6 = -1/2$, то из (9) следует точное решение уравнения (6) при $n = 2$. Итак имеем

$$u(x,y,t) = \left[\frac{2\operatorname{th} t}{x^2 + y^2\operatorname{th}^2 t + \operatorname{sh}^2 t}\right]_+.$$

Методы исследования переопределенных систем АДУ и систем эволюционных уравнений, нагруженных дифференциальными связями, обсуждались в [15–18]. Наконец, отметим, что переопределенные системы АДУ возникают во многих прикладных задачах, например, при математическом моделировании процессов химической кинетики с учетом диффузии и теплопроводности [19] (см. также [8]).

References

[1] King J.R. Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations //Quart.J.Mech.Appl.Math. 1993. V. 46, N 3. P.419-436.

[2] Галактионов В.А., Посашков С.А. Примеры несимметричного полного остывания и режимов с обострением для квазилинейных уравнений теплопроводности //Препринт. Инс-т прикл. матем. РАН N21. Москва, 1994. 24с.

[3] Пухначев В.В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии //Прикл.механика и технич.физика. 1995. Т.36, N 2. С.23-31.

[4] Косыгина Е.Р. Об анизотропных точных решениях многомерного уравнения нестационарной фильтрации//Журн.вычис.матем. и матем. физики.1995. Т.35, N 2. С.241-259.

[5] Рудых Г.А. Точные неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии //Докл. РАН. 1998. Т.358, N 3. С.323-324.

[6] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии //Сиб. матем. журн.1998. Т.39, N 5.С.1129-1138.

[7] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии// Матем.заметки. 2000. Т.67, N2. С.250-256.

[8] Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями// Дифференц. уравнения. 1995. Т.31, N 2. С.253-261.

[9] Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений //Дифференциальные уравнения. 1980. Т.16, N 11. С.1925-1935.

[10] Антонцев С.Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986.

[11] Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка //УМН. 1987. Т.42, N 2 (254). С.135-176.

[12] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. Эволюция диссипативных структур. М.: Наука, 1987.

[13] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19, N 7. С.1215-1223.

[14] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Гостехиздат, 1948.

[15] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. North-Holland. Elsevier. New-York. 1989.

[16] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1987.

[17] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Новосибирск.: Наука, 1984.

[18] Капцов О.В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей// Мат.сборник. 1998. Т.189, N 12. С.103-118.

[19] Вольперт А.И., Иванова А.Н. Математические модели в химической кинетике// Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Наука, 1987. С.57-102.

УДК 517.956+517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ ТОЧНЫХ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $u_t = \nabla \cdot \left(u^\lambda \nabla u\right)$

Г.А.Рудых

Предлагается и исследуется нетривиальная конструкция точного неотрицательного решения многомерного уравнения нелинейной диффузии в виде "конечной суммы". После подстановки предъявленной конструкции в исходное уравнение приходим к исследованию системы алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ), которая является переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций). Так как переопределенные системы уравнений могут вообще не иметь решений, то доказано, что полученная система АДУ имеет решения отличные от тривиального. На основе этого результата построены точные неавтомодельные анизотропные по пространственным переменным явные неотрицательные решения как класса уравнений пористой среды (нестационарной фильтрации), так и класса уравнений быстрой диффузии. В частности, в последний класс укладывается, так называемое, предельное уравнение быстрой диффузии. В основном, полученные в работе точные неотрицательные решения, отмеченных выше уравнений, не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли-Беклунда.
Библ. 19 названий.

Рудых Геннадий Алексеевич

Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН,

664033, г.Иркутск, ул. Лермонтова, 134

тел.раб. (395-2) 51-14-09

тел.дом. (395-2) 46-76-65

E-mail: rudykh@icc.ru.

EXISTENCE OF EXACT NON SELF-SIMILAR SOLUTIONS OF EQUATION $u_t = \nabla \cdot \left(u^\lambda \nabla u\right)$

Rudykh G.A.

The nontrivial construction of exact nonnegative solution of multidimensional equation of the nonlinear diffusion in the form "finite sum "is proposed and investigated. After substitution of produced construction to the initial equation we come to research of the system of algebro-differential equations (ADE) that is overdetermined (the number of equations exceeds the number of desired functions). Because the overdetermined system of equations is not solvabale, then it is proved that the obtained system of ADE posseses the other solutions than are nontrivial ones. On the basis of this result the exact non self-similar anizotropic over spatial variables explicit nonnegative solutions both of the class equations of porous medium (non-stationary filtration) and the class of equations of fast diffusion are constructed. In particular this class includes so-called limit equation of fast diffusion. Basically, obtained exact nonnegative solutions for above equations are not invariant in view of the groups of point-wise transformations and Lee-Baklund's groups.
References, 19.