ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ СТУДЕНТОВ МОиАИС 1-Й СЕМЕСТР

ГРАЖДАНЦЕВА Е.Ю.

Глава 1

Исследование функции одной переменной

1.1 Признаки возрастания и убывания.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется неубывающей на нем, если для любых точек $x_1, \ x_2$ из отрезка $[a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется невозрастающей на нем, если для любых точек $x_1, \ x_2$ из отрезка $[a, b]$ таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется возрастающей на нем, если для любых точек $x_1, \ x_2$, из отрезка $[a, b]$, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется убывающей на нем, если для любых точек $x_1, \ x_2$, из отрезка $[a, b]$, таких, что $x_1 < x_2$, справедливо неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется монотонной на нем, если она на этом отрезке только неубывающая, или только невозрастающая.

Определение. Функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a, b]$, называется строго монотонной на нем, если она на этом отрезке только возрастающая, или только убывающая.

Теорема 1. Пусть

1) функция $f(x)$, непрерывна на отрезке $[a, b]$,

2) существует $f^{'}(x)$, по крайней мере, на (a, b).

Чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была неубывающей, необходимо и достаточно, чтобы $f^{'}(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ неубывающая. Возьмем $x \in (a, b)$. Так как $f(x)$ неубывающая, то $\forall \Delta x$ знак Δx и Δf одинаков. Следовательно, $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

Поскольку $\exists f^{'}(x)\ \forall x \in (a, b)$, то $f^{'}(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \geq 0$.

($\Leftarrow$) Пусть $f^{'}(x) \geq 0$ на (a, b) и пусть $x_1 < x_2\ \forall x \in [a, b]$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f^{'}(\xi)(x_2 - x_1),\ \ \xi \in (x_1, x_2).$$

Так как $f^{'}(x) \geq 0\ \forall x \in (a, b)$, то $f^{'}(\xi) \geq 0$. Посклькy $x_1 < x_2$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$. Т.е. $f(x_2) \geq f(x_1)$, следовательно $f(x)$ – неубывающая. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть

1) функция $f(x)$, непрерывна на отрезке $[a, b]$,

2) существует $f^{'}(x)$, по крайней мере, на (a, b).

Чтобы функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ была невозрастающей, необходимо и достаточно, чтобы $f^{'}(x) \leq 0\ \forall x \in (a, b)$.

Доказательство. доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 1.

Таким образом, интервалы знакопостоянства $f^{'}(x)$ являются интервалами монотонности $f(x)$.

Утверждение (достаточные условия возрастания и убывания функции. Если $f^{'}(x) > 0\ \forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ возрастает на отрезке $[a, b]$; если $f^{'}(x) < 0\ \forall x \in (a, b)$, то $f(x)$ убывает на отрезке $[a, b]$.

Замечание.Утверждение работает в одну сторону.

Пример. $f(x) = x^3$ возрастает на $[-1, 1]$, но $f^{'}(x) = 3x^2 = 0$ при $x = 0$.

Определение. Функция $f(x)$ называется возростающей в точке $x = x_0$, если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$, удовлетворющих неравентсву $x < x_0$, справедливо $f(x) < f(x_0)$, и $\forall x \in U_\delta(x_0)$, удовлетворяющих неравенству $x > x_0$, справедливо $f(x) > f(x_0)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется убывающей в точке $x = x_0$, если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$, удовлетворющих неравентсву $x < x_0$, справедливо $f(x) > f(x_0)$, и $\forall x \in U_\delta(x_0)$, удовлетворяющих неравенству $x > x_0$, справедливо $f(x) < f(x_0)$.

Теорема (Достаточные условия возрастания и убывания в точке. Пусть существует $f^{'}(x_0)$. Если $f^{'}(x_0) > 0$, то $f(x)$ возрастает в точке $x = x_0$; если $f^{'}(x_0) < 0$, то $f(x)$ убывает в точке $x = x_0$.

Доказательство. Пусть существует $f^{'}(x_0) > 0$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Следовательно, $\exists \delta > 0$ такая, что $\forall \Delta x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |\Delta x| < \delta$, верно неравенство

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0.$$

Т.е. величины Δx и $\Delta f(x_0)$ имеют одинаковый знак. Следовательно, если $\Delta x < 0$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ т.е. $f(x_0 + \Delta x) < f(x_0)$; а если $\Delta x > 0$, то $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$ т.е. $f(x_0 + \Delta x) > f(x_0)$,

Таким образом функция $f(x_0)$ возрастает, т.е. $f(x)$ возрастает в точке $x = x_0$.

Аналогично доказывается и убывание функциии $f(x)$ в точке $x = x_0$. Теорема доказана.

1.2 Экстремум функции.

Пусть $f(x)$ определена в окрестности $U(x_0)$ точки x_0 включая x_0.

Определение. Точка $x = x_0$ называется точкой локального максимума, если $\exists \delta > 0$ такая, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$ справедливо $\Delta f = f(x) - f(x_0) \leq 0$, т.е. $f(x) \leq f(x_0)$.

Определение. Точка $x = x_0$ называется точкой локального минимума, если $\exists \delta > 0$ такая, что $\forall x \in U_\delta(x_0)$ справедливо $\Delta f = f(x) - f(x_0) \geq 0$, т.е. $f(x) \geq f(x_0)$.

Определение. Значение $f(x_0)$ называется локальным максимумом функции $f(x)$ если точка x_0 является точкой локального максимума.

Определение.Значение $f(x_0)$ называется локальным минимумом функции $f(x)$ если точка x_0 является точкой локального минимума.

Определение. Локальные максимум и минимум функции называются локальными экстремумами функции.

Определение. Точка $x = x_0$ называется точкой строгого максимума (минимума) функции $f(x)$ если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется $f(x) - f(x_0) < 0$ ($f(x) - f(x_0)$, соответственно). При этом значение $f(x_0)$ называется строгим максимумом (минимумом) соответственно.

Замечание.Здесь не предполагается непрерывности функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

Пример.Функция $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ в точке $x = 0$ имеет разрыв и локальный максимум, так как $f(x) - f(0) = f(x) - 1 < 0$, $\forall x \in (-1, 1)$.

Теорема (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ имеет экстремум в точке $x = x_0$, то $f'(x_0) = 0$ либо $\nexists f'(x_0)$.

Доказательство. Пусть существует $\exists f'(x_0) \neq 0$. Для определенности, пусть $f'(x_0) > 0$. Тогда функция $f(x)$ возрастает в точке x_0 и, следовательно, существует $\delta > 0$ такая, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$, а $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ справедливо неравенство $f(x) > f(x_0)$. Следовательно, не существует окрестности $U(x_0)$ такой, что $\forall x \in U(x_0)$ $f(x_0) > f(x)$, или $f(x_0) < f(x)$. Получаем, что точка $x = x_0$ не является точкое экстремума.

Аналогично, при $f'(x_0) < 0$ точка $x = x_0$ не является точкой экстремума. Таким образом, получили противоречие предположению. Теорема доказана.

Определение. Точки экстремума называются критическими точками функции.

Определение. Корни уравнения $f'(x) = 0$ нвзываются стационарными точками функции $f(x)$.

Замечание. Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

Пример. Для функции $f(x) = x^3$ имеем $f'(0) = 0$, т.е. точка $x = 0$ – критическая точка, однако, она не является точкой экстемума.

Теорема (достаточные условия экстемума). Пусть

1) точка $x = x_0$ – критическая точка функции $f(x)$ т.е. $f'(x_0) = 0$ либо $\nexists f'(x_0)$,

2) функция $f(x)$ непрерывнав точке x_0.

Тогда

1) если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) > 0$ и $\forall \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) < 0$, то точка x_0 – точка локального максимума функции $f(x)$;

2) если $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall \in (x_0 - \delta, x_0)$ $f'(x) < 0$ и $\forall \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f'(x) > 0$, то точка x_0 – точка локального минимума функции $f(x)$.

Доказательство. По условию $f'(x) > 0$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$, следовательно функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[x_0 - \delta, x_0]$.

Так как $f'(x) < 0$ $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$, то функция $f(x)$ убывает на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$.

Таким образом, значение $f(x_0)$ – наибольшее значение функции $f(x)$ $\forall x \in U_\delta(X_0)$. Следовательно, x_0 – точка локального максимума функции $f(x)$, $f(x_0)$ – локальный максимум этой функции.

Случай 2) доказывается аналогично. Теорема доказана.

Замечание. Условие непрерывности функции существенно.

Определение. Множество $X \in R$ такое, что $\forall x \in X$ $f^{'}(x) > 0$ называется множеством (интервалом) возрастания функции $f(x)$.
Определение. Множество $X \in R$ такое, что $\forall x \in X$ $f^{'}(x) < 0$ называется множеством (интервалом) убывания функции $f(x)$.

Правило отыскания экстремума.

1)Найти критические точки, т.е.

а) найти стационарные точки (решить уравнение $f^{'}(x) = 0$)

б)Найти точки, в которых $\nexists f^{'}(x)$;

2) Определить знак $f^{'}(x)$ с обеих сторон от каждой критической точки;

3) Сделать вывод, используя теорему о достаточных условиях экстремума.

Пример 1. Исследовть на экстремум функцию $y = x^2 e^{-x}$.

Решение. 1) Найдем критические точки:

$y^{'} = 0 \quad \Leftrightarrow xe^{-x}(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0,\ \ x_2 = 2$. Таким образом, точки $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ – критические.

2) Определим знак $y = x^2 e^{-x}$ с обеих сторон от каждой критической точки:

$$y^{'}(x) > 0 \ \ \forall x \in (0, 2),$$

$$y^{'}(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty).$$

Следовательно, функция возрастает при $x \in (0, 2)$, и убывает при $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

3) Согласно теореме о достаточных условиях экстремума $x_1 = 0$

– точка локального минимума функции, а $f(x_1) = 0$ – локальный минимум; $x_2 = 2$ – точка локального максимума функции, а $f(x_2) = 4e^{-2}$ – локальный максимум.

Пример 2. Исследовть на экстремум функцию $y = x^{\frac{2}{3}}$.

Решение. 1) Найдем критические точки:

$y^{'} = 0 \quad \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = 0$ – это уравнение решения не имеет и $y^{'}$ не определено при $x = 0$. Таким образом, точка $x = 0$ – критическая.

2) Определим знак функции с обеих сторон от этой критической точки:

$$y^{'}(x) < 0 \ \ \forall x \in (-\infty, 0).$$

$$y^{'}(x) > 0 \ \ \forall x \in (0, +\infty),$$

Следовательно,функция убывает при $x \in (-\infty, 0)$, и возрастает при $x \in (0, +\infty)$.

3) Согласно теореме о достаточных условиях экстремума $x = 0$ – точка локального минимума функции, а $f(x = 0) = 0$ – локальный минимум.

Исследование на экстремум при помощи второй производной.

Теорема. Пусть существуют $f^{'}(x_0)$ и $f^{''}(x_0)$, и $f^{'}(x_0) = 0$, $f^{''}(x_0) \neq 0$. Тогда

1) если $f^{''}(x_0) < 0$, то x_0 – точка локального максимума;

2) если $f^{''}(x_0) > 0$ то x_0 – точка локального минимума.

Доказательство. Пусть $f^{'}(x_0) = 0$ и $f^{''}(x_0) < 0$. Тогда $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $f^{'}(x) > f^{'}(x_0) = 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает, а $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ выполняется неравенство $f^{'}(x) < f^{'}(x_0) = 0$, т.е. функция $f(x)$ убывает. Следовательно точка x_0 – точка локального максимума.

Аналогично, если $f^{''} > 0$. Тогда $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ выполняется неравенство $f^{'}(x) < f^{'}(x_0) = 0$, т.е. функция

$f(x)$ убывает, а $\forall x \in (x_0, x_0+\delta)$ выполняется неравенство $f'(x) > f'(x_0) = 0$, т.е. функция $f(x)$ возрастает. Следовательно точка x_0 – точка лькального минимума. Теорема доказана.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = e^{-x^2}$.

Решение.

$$y' = 0 \leftrightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow x = 0,$$

т.е. $x = 0$ – критическая точка функции.

$$y'' = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1),$$

и $y''(x = 0) = -2 < 0$. Следовательно, $x = 0$ – точка локального максимаму, а $y(x = 0) = 1$ – локальный максимум.

Теорема (достаточные условия экстремума). Пусть $f(x)$ k раз дифференцируема в точке $x = x_0$, и $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)} \neq 0$.

Тогда

1) если k – четное, то при $f^{(k)}(x_0) > 0$ точка $x = x_0$ является точкой локального минимума, а при $f^{(k)}(x_0) < 0$ – точкой локального максимума;

2) если k – нечетное, то в точке $x = x_0$ экстремума нет.

Пример. Для функции $y = x^3$ точка $x = 0$ является критической. Но в этой точке функция не имеет экстремума, так как $f'(0) = 3x^2|_{x=0} = 0$, $f''(0) = 6x|_{x=0} = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$.

1.3 Наибольшее и наименьшее значения функции.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a, b]$, то, согласно 2-й теореме Вейерштрасса, на этом отрезке она принимает наибольшее и наименьшее значения.

Если свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает в точке $x_0 \in (a, b)$, то $M = f(x_0)$ – локальный максимум.

Аналогично с наименьшим значением: если $x_0 \in (a, b)$ и $m = f(x_0)$, то m – локальный минимум.

Однако, свои наибольшее M и наименьшее m значения функция $f(x)$ может принимать и на концах отрезка $[a, b]$. Следовательно, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $f(x)$, надо найти все экстремумы на интервале (a, b) и значения функции на концах отрезка. Тогда m – наименьшее из всех полученных значений, а M – наибольшее.

Пример. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x(a-2x)^2$ на отрезке $[0, \frac{a}{2}]$.

Решение. $f^{'} = (a-2x)(a-6x)$. Следовательно, из $y^{'} = 0$ получаем $x_1 = \frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{6}$.

Считаем значения функции в найденных точках и на концах отрезка:

$$f(x_1) = f\left(\frac{a}{2}\right) = 0, \ \ f(x_2) = f\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{2a^3}{27}, \ \ f(0) = 0.$$

Поскольку, наибольшее из всех полученных значений – это число $\frac{2a^3}{27}$, а наименьшее – это число 0, то $M = \frac{2a^3}{27} = f\left(\frac{a}{6}\right)$, $m = 0 = f\left(\frac{a}{2}\right) = f(0)$.

1.4 Направления выпуклости функции. точки перегиба.

Пусть функция $y = f(x)$ такова, что существует конечная производная $f^{'}(x_0)$, т.е. в точке $M(x_0, f(x_0))$ существует касательная к графику функции $y = f(x)$, которая не параллельна оси Oy.

Определение. Если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что любые точки $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$, где $x \in U_\delta(x_0)$, расположены над касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, то говорят, что выпоуклость данной кривой направлена вниз.

Определение. Если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что любые точки $(x, f(x))$ графика функции $y = f(x)$, где $x \in U_\delta(x_0)$, расположены под касательной, проведенной к графику $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, то говорят, что выпоуклость данной кривой направлена вверх.

Определение. Точка $M(x_0, f(x_0))$ называется тоской перегиба графика функции $y = f(x)$ если $\exists U_\delta(x_0)$ такая, что $\forall x < x_0$, $x \in U_\delta(x_0)$, выпуклость графика направлена в одну сторону, а $\forall x > x_0$, $x \in U_\delta(x_0)$, – в противоположную сторону, т.е. если при переходе через точку $M(x_0, f(x_0))$ график функции $y = f(x)$ меняет направление выпуклости.

Теорема (необходимое условие перегиба). Если $M(x_0, f(x_0))$ точка перегиба графика $y = f(x)$, то $f^{''}(x_0) = 0$ либо не существует.

Доказательство. Пусть точка $M(x_0, f(x_0))$ – точка перегиба графика $y = f(x)$ и пусть, для определенности,

$$\forall x \in U_\delta(x_0): \;\; x < x_0 \Rightarrow f(x) > Y(x) \;\; (\; f(x) - Y(x) > 0),$$

$$\forall x \in U_\delta(x_0): \;\; x > x_0 \Rightarrow f(x) < Y(x) \;\; (\; f(x) - Y(x) < 0),$$

где $Y(x)$ – ординаты касательной $Y = Y(x)$ к графику $y = f(x)$ в точке M.

Уравненеие касательной имеет вид

$$Y - f(x_0) = f^{'}(x_0)(x - x_0),$$

или

$$Y = f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)$$

Разложим функцию $y = f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $U_\delta(x_0):$

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{'}(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{''}(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2, \;\; 0 < \theta < 1.$$

Тогда получим

$$f(x) - Y(x) =$$

учитывая уравнение касательной

$$= f(x) - \Big(f(x_0) + f^{'}(x_0)(x - x_0)\Big) =$$

согласно разложения в ряд Тейлора

$$= \frac{f^{''}(x_0 + \theta(x - x_0))}{2!}(x - x_0)^2.$$

Так как,

если $f(x) - Y(x) > 0, \forall x \in U_\delta(x_0) : x < x_0$, то $f^{''}(x_0 + \theta(x - x_0)) > 0$,

если $f(x) - Y(x) < 0, \forall x \in U_\delta(x_0) : x > x_0$, то $f^{''}(x_0 + \theta(x - x_0)) < 0$.

Предположим, что $f^{''}(x_0) \neq 0$. Тогда, в силу устойчивости знака непрерывной функции, в окрестности $U_\delta(x_0)$ знак $f^{''}(x_0 + \theta(x - x_0))$ совпадает со знаком $f^{''}(x_0)$. Следовательно получаем противоречие предположению, т.е. $f^{''}(x_0) = 0$ или не существует. Теорема доказана.

Теорема (достаточные условия перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ такая, что

1) $\exists f^{''}(x) \ \ \forall x \in U_\delta(x_0)$,

2) $f^{''}(x_0) = 0$, или не существует,

3) $\forall x \in U_\delta(x_0)$ производная $f^{''}(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0.

Тогда точка $M(x_0, f(x_0))$ является точкой перегиба графика $y = f(x)$.

Доказательство. Пусть выполнены условия теоремы. Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0) : x < x_0$ производная $f^{''}(x)$ имеет один знак, а $\forall x \in U_\delta(x_0) : x > x_0$ производная $f^{''}(x)$ имеет противоположный знак. Следовательно, при переходе через точку $M(x_0, f(x_0))$ график $y = f(x)$ меняет направление выпуклости, т.е. точка M является точкой перегиба.

Если $\nexists f^{''}(x)$, то касательная вертикальна. Теорема доказана.

1.5 Асимптоты графика функции.

Определение. Прямая, к которой график кривой $y = f(x)$ непрерывно приближается, называется асимптотой.

1) Вертикальные асимптоты.

Определение. Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика $y = f(x)$, если хотя ба один из пределов $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x)$, равен $\pm\infty$.

При этом, если $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x) = \pm\infty$, то $x = x_0$ является левой асимптотой, а если $\lim\limits_{x \to x_0-0} f(x) = \pm\infty$, то $x = x_0$ – правой асимптотой.

2) Наклонные асимптоты.

Теорема. Чтобы график $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ наклонную асимптоту $y = kx+b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $y = kx + b$ – асимптота графика $y = f(x)$. Тогда функцию $y = f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx+b+\alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Следовательно существуют пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(x + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = k$, $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x \to +\infty}(kx + b + \alpha(x) - kx) = b$.

($\Leftarrow$) пусть существуют пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k$, $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - kx) = b$.

Тогда функция $\alpha(x) = f(x) - kx - b$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$. Следовательно, $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$, т.е. $y = kx + b$ – наклонная асимптота графика $y = f(x)$. Аналогично, при $x \to -\infty$. Теорема доказана.

3) Горизонтальные асимптоты. – частный случай наклонной асимптоты при $k = 0$.

Пример 1. Функция $y = \frac{x^2}{x-1}$ неопределена в точке $x = 1$. Поскольку $\lim\limits_{x \to 1\pm0} \frac{x^2}{x-1} = \pm\infty$, то прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой графика $y = \frac{x^2}{x-1}$. Далее,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{(x-1)x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x-1} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - x \right) = \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1.$$

Следовательно, прямая $y = x + 1$ является наклонной асимптотой графика $y = \frac{x^2}{x-1}$.

Пример 2. Функция $y = \frac{sin\, x}{x}$ неопределена в точке $x = 0$. Однако, $\lim\limits_{x\to 0\pm} \frac{sin\, x}{x} = 1$, следовательно, прямая $x = 0$ не является асимптотой к данному графику. Далее,

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{sin\, x}{x \cdot x} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{sin\, x}{x} - 0 \cdot x \right) = 0.$$

Следовательно, прямая $y = 0$ горизонтальная асимптота графика $y = \frac{sin\, x}{x}$.