УДК 517.956+517.958

СУЩЕСТВОВАНИЕ И КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ТОЧНЫХ НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ

Г.А.Рудых

Институт Динамики Систем и Теории Управления СО РАН

rudykh@icc.ru

EXISTENCE AND QUALITATIVE ANALYSIS OF EXACT NONSELF-SIMILAR SOLUTIONS FOR THE MULTIDIMENSIONAL EQUATION OF NONLINEAR DIFFUSION

G.A. Rudykh

1.Настоящий доклад примыкает к исследованиям [1-13] и посвящена построению точных неавтомодельных анизотропных по пространственным переменным явных неотрицательных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \nabla\cdot(u^{\lambda}\nabla u), u = u(\mathbf{x}, t) : \Omega\times\overline{\Re}^{+} \to \Re^{+}, \mathbf{x}\in\Re^{n}, \tag{1}$$

где $\Omega\subset\Re^{n}$ - область; $\Re^{+} = (0,\infty); u(\mathbf{x}, t)\geq 0$- температура среды; $\lambda\in\Re$- параметр нелинейной среды, значения которого различны для различных процессов переноса тепла. Уравнение (1) принадлежит классу, так называемых, неявно вырождающихся параболических уравнений [14]. Ниже предлагается и исследуется оригинальная конструкция [15-17] точного неотрицательного решения уравнения (1) в виде "конечной суммы" (см. работу [18] и приведенные в ней ссылки). В итоге, после подстановки предъявленной конструкции в уравнение (1), приходим к исследованию системы алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ), которая является переопределенной. Известно [19], что переопределенные системы уравнений (число уравнений превосходит число искомых функций) могут вообще не иметь решений. Доказано, что полученная система (АДУ) имеет решения отличные от тривиального. На основе этого результата, показано, что введенная конструкция позволяет получить точные неотрицательные решения как класса уравнений пористой среды (нестационарной фильтрации), когда $\lambda > 0$, так и класса уравнений (1) с отрицательным показателем λ в коэффициенте нелинейной теплопроводности $K(u) = u^{\lambda}$. В частности, в этот класс укладываются, так называемые, уравнения быстрой $(-1 < \lambda < 0)$ и предельной $(\lambda = -1)$ диффузии. Отметим, что в основном, полученные в этой работе точные неотрицательные решения, отмеченных выше уравнений не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли-Беклунда [20-21].

2. Введем в рассмотрение функции

$$Z_k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_k(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_k(t)) + C_k(t), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} \in \Re^n; A_k(t) = [a_{kij}(t)]$- вещественные симметричные матрицы $n \times n; \mathbf{B}_k(t) = (b_{k1}(t), \ldots, b_{kn}(t))'$ -вектор-столбцы; $C_k(t)$-скалярные функции; $a_{kij}(t), b_{ki}(t), C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$- вещественные функции; $(\cdot, \cdot)$-скалярное произведение в $\Re^n; k = 1, 2; i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1. *Уравнение (1) имеет точное неотрицательное решение вида*

$$u(\mathbf{x}, t) = \Big[\lambda [Z_1(\mathbf{x}, t)]_+^p + \lambda Z_2(\mathbf{x}, t)\Big]_+^{1/\lambda}, \tag{3}$$

если функции $A_k(t), \mathbf{B}_k(t), C_k(t)$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_2 = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2, \lambda Z_1 \Delta Z_1 + [p(\lambda + 1) - \lambda]|\nabla Z_1|^2 = 0, \tag{4}$$

$$pZ_1 \frac{\partial}{\partial t} Z_1 = p\lambda Z_1 Z_2 \Delta Z_1 + \lambda Z_1^2 \Delta Z_2 + \lambda p(p-1) Z_2 |\nabla Z_1|^2 + 2pZ_1(\nabla Z_1, \nabla Z_2).$$

где $[\cdot]_+ = \max\{[\cdot], 0\}; \lambda, p \in \Re; \lambda \neq 0; p \neq 0.$

Пусть $\xi = p(\lambda+1)-\lambda, \xi \neq 0$, тогда система уравнений (4) запишется

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_2 = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2, \lambda Z_1 \Delta Z_1 + \xi |\nabla Z_1|^2 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}Z_1 = \sigma Z_2 \Delta Z_1 + \tau Z_1 \Delta Z_2 + 2(\nabla Z_1, \nabla Z_2), \tag{5}$$

где $\sigma = p\lambda/\xi; \tau = \lambda/p; p, \lambda \in \Re; \lambda \neq 0; p \neq 0$.

Теорема 2.*Пусть $A_k(t)$-вещественные симметричные матрицы с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+), \mathbf{B}_k(t)$ - вектор-столбцы с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ и $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$- скалярные функции. Тогда для того, чтобы функции Z_1, Z_2 определяемые соотношением (2) удовлетворяли системе уравнений (5) необходимо и достаточно, чтобы $A_k(t), \mathbf{B}_k(t), C_k(t)$ удовлетворяли системе АДУ*

$$\dot{A}_2 = 2A_2^2 + \lambda(trA_2)A_2, \dot{\mathbf{B}}_2 = 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(trA_2)\mathbf{B}_2, \dot{C}_2 = |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(trA_2)C_2, \tag{6}$$

$$\dot{A}_1 = 4A_1A_2 + \tau(trA_2)A_1 + \sigma(trA_1)A_2,$$

$$\dot{\mathbf{B}}_1 = 2(A_1\mathbf{B}_2 + A_2\mathbf{B}_1) + \tau(trA_2)\mathbf{B}_1 + \sigma(trA_1)\mathbf{B}_2, \tag{7}$$

$$\dot{C}_1 = 2(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) + \tau(trA_2)C_1 + \sigma(trA_1)C_2,$$

$$\lambda(trA_1)A_1 + 2\xi A_1^2 = 0, \lambda(trA_1)\mathbf{B}_1 + 2\xi A_1\mathbf{B}_1 = 0, \lambda(trA_1)C_1 + \xi|\mathbf{B}_1|^2 = 0, \tag{8}$$

где $trA_k = \sum_{i=1}^n a_{kii}(t)$-след матрицы $_k(t); k = 1, 2$.

Теоремы 1, 2 приводят к следующему результату

Утверждение 1.*Если вещественные симметричные матрицы $A_k(t)$ с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ и скалярные функции $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений (6)-(8), тогда функция (3) является точным неотрицательным решением уравнения (1).*

Если в (3) положить $Z_1(\mathbf{x},t)\equiv 0$, то $A_1(t)\equiv 0, \mathbf{B}_1(t)\equiv 0, C_1(t)\equiv 0$ и

$$u(\mathbf{x},t)=\left[\lambda\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_2(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_2(t))+C_2(t)\right]\right]_+^{1/\lambda}. \qquad (9)$$

В этом случае система АДУ (6)-(8) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (6) и справедлива

Теорема 3. *Пусть заданы вещественная симметричная матрица $A_2(0)\in M_n(\Re)$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(0)\in M_{n,1}(\Re)$ и скаляр $C_2(0)\in\Re$. Пусть, помимо этого, $z(t)$- вещественное решение задачи Коши*

$$\dot z(t)=\prod_{l=1}^{n}[1-2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}, z(0)=0, \dot z(t)=\frac{d}{dt}z(t). \qquad (10)$$

Тогда вещественное решение задачи Коши для системы ОДУ

$$\begin{gathered}\dot A_2(t)=2A_2^2(t)+\lambda[trA_2(t)]A_2(t),\ A_2(t)|_{t=0}=A_2(0),\\ \dot{\mathbf{B}}_2(t)=2A_2(t)\mathbf{B}_2(t)+\lambda[trA_2(t)]\mathbf{B}_2(t),\ \mathbf{B}_2(t)|_{t=0}=\mathbf{B}_2(0),\\ \dot C_2(t)=|\mathbf{B}_2(t)|^2+\lambda[trA_2(t)]C_2(t),\ C_2(t)|_{t=0}=C_2(0),\end{gathered} \qquad (11)$$

имеет вид

$$A_2(t)=\dot z(t)SQ(t)D(0)S'=\dot z(t)SQ(t)S'A_2(0), \qquad (12)$$

$$\mathbf{B}_2(t)=\dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), C_2(t)=\dot z(t)C_2(0)+z(t)(\mathbf{B}_2(0),\mathbf{B}_2(t)).$$

Причем $A_2(t)$- симметричная матрица для всех $t\in domainA_2(t)$, где $S\in M_n(\Re)$- вещественная ортогональная матрица; $D(0)=diag[d_1(0),\ldots,d_n(0)]$;

$$Q(t)=diag\Big[[1{-}2d_1(0)z(t)]^{-1},\ldots,[1{-}2d_n(0)z(t)]^{-1}\Big]; A_2(0)=SD(0)S';$$

$d_l(0)\in\Re$-собственные значения матрицы $A_2(0)$; $d_l(0)\neq 0; \lambda\in\Re; \lambda\neq 0$.

Из утверждения 1 и теоремы 3 вытекает

Следствие 1. Уравнение (1) обладает точным неавтомодельным анизотропным по пространственным переменным явным неотрицательным решением (9). При этом $A_2(t), \mathbf{B}_2(t), C_2(t)$ определяются согласно (12).

3. Перейдем к исследованию системы АДУ (6)-(8).

Утверждение 2. *Пусть* $A_1(t) = \varphi(t) S E_m S' \neq 0, E_m = diag[e_1, \ldots, e_n]$, $e_k \in \{0, 1\}, (k = 1, 2, \ldots, n), rank E_m = m \in \{1, 2, \ldots, n\}, \varphi(t)$ - *произвольная вещественная функция, обладающая тем свойством, что* $\varphi(t) \neq 0$ *для всех* $t \in domain A_1(t)$, $S \in M_n(\Re)$ - *вещественная ортогональная матрица. Тогда, если* $m = -2\xi/\lambda$, *то* $A_1(t)$ *является решением матричного уравнения системы (8) и выполняется соотношение* $rank E_m = rank A_1(t) = -\frac{2\xi}{\lambda}$, *где* $\xi = p(\lambda + 1) - \lambda; \xi \neq 0; \lambda, p \in \Re; \lambda \neq 0, p \neq 0$.

Тем самым, в силу зависимости $m = -\frac{2\xi}{\lambda}$ и с учетом вида матрицы $A_1(t)$ векторное и скалярное уравнения системы (8), соответственно, запишутся

$(I - E_m) S' \mathbf{B}_1(t) = 0, |\mathbf{B}_1(t)|^2 = 2\varphi(t) C_1(t)$.

Теорема 4. *Если* $p = \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{m-1}, m \in \{2, \ldots, n\}$, *то* $\xi = \frac{m}{2(m-1)}, \tau = -\frac{2}{m-1}, \sigma = -\frac{1}{m}$ *и система АДУ (6)-(8) обладает решением*

$$A_1(t) = \beta [h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}} S E_m S', A_2(t) = \alpha [h(t)]^{-1} S E_m S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = [\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{B}_2(0)][h(t)]_+^{\frac{2}{m-2}} + \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{B}_2(0) [h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}},$$

$$\mathbf{B}_2(t) = [h(t)]^{-1} \mathbf{B}_2(0), C_1(t) = \frac{1}{2\beta} |\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{B}_2(0)|^2 [h(t)]_+^{\frac{m+1}{m-2}} +$$

$$+ \frac{1}{\alpha} [(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha} |\mathbf{B}_2(0)|^2] [h(t)]_+^{\frac{2}{m-2}} + \frac{\beta}{2\alpha^2} |\mathbf{B}_2(0)|^2 [h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}},$$

$$C_2(t) = -\frac{\alpha}{2\beta^2} |\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha} \mathbf{B}_2(0)|^2 [h(t)]_+^{\frac{m}{m-2}} + \frac{1}{2\alpha} |\mathbf{B}_2(0)|^2 [h(t)]^{-1}, \quad (13)$$

причем $(I-E_m)S'\mathbf{B}_1(0)=(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(0)=0$, *где* $h(t)=1-\alpha\frac{m-2}{m-1}t; \mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0)\in\Re^n-$ *постоянные векторы;* $\alpha,\beta\in\Re;\alpha\neq 0;\beta\neq 0$.

Отметим, что фактическим следствием утверждения 1 и теоремы 4 является следующий результат

Теорема 5. *Уравнение нелинейной диффузии*

$$u_t=\nabla\cdot(u^{-1/(m-1)}\nabla u), u\triangleq u(\mathbf{x},t):\Omega\times\overline{\Re}^+\to\Re^+,\mathbf{x}\in\Re^n,$$

обладает точным неавтомодельным анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением вида (3) при $p=1/2$ *и* $\lambda=-1/(m-1)$. *Причем функции* $A_k(t),\mathbf{B}_k(t),C_k(t)$ *определяются формулами (13), где* $k=1,2;m\in\{2,\ldots,n\}$.

Если $m=2$, то из теоремы 4 вытекает важное, как нам представляется,

Следствие 2. Если $p=1/2,\lambda=-1,m=2$, то $\tau=-2,\sigma=-1/2,\xi=1$ и система АДУ (6)-(8) имеет следующее решение

$$A_1(t)=\beta e^{-\alpha t}SE_2S',\ A_2(t)=\alpha SE_2S',$$

$$\mathbf{B}_1(t)=e^{-2\alpha t}[\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)\mathbf{B}_2(0)+\mathbf{B}_1(0)],\ \mathbf{B}_2(t)=\mathbf{B}_2(0),$$

$$C_1(t)=\frac{1}{2\beta}e^{-3\alpha t}|\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t}-1)\mathbf{B}_2(0)+\mathbf{B}_1(0)|^2,$$

$$C_2(t)=-\frac{\alpha}{2\beta^2}e^{-2\alpha t}|\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)-\mathbf{B}_1(0)|^2+\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

причем $(I-E_2)S'\mathbf{B}_1(0)=(I-E_2)S'\mathbf{B}_2(0)=0$, где $\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0)\in\Re^n;\alpha,\beta\in\Re;\alpha\neq 0;\beta\neq 0$.

Пусть $u(t)=trA_1(t);v(t)=trA_2(t)$. Так как функции $A_2(t),\mathbf{B}_2(t),C_2(t)$ имеют вид (12), то для системы уравнений (7) рассмотрим задачу Коши

$$\dot{A}_1(t)=4A_1(t)A_2(t)+\tau v(t)A_1(t)+\sigma u(t)A_2(t),A_1(t)|_{t=0}=A_1(0), \tag{14}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t)=[2A_2(t)+\tau v(t)I]\mathbf{B}_1(t)+[2A_1(t)+\sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t),\mathbf{B}_1(t)|_{t=0}=\mathbf{B}_1(0),$$

$$\dot{C}_1(t)=\tau v(t)C_1(t)+\sigma u(t)C_2(t)+2\left(\mathbf{B}_1(t),\mathbf{B}_2(t)\right),C_1(t)|_{t=0}=C_1(0).$$

Теорема 6. *Пусть $p=2$ и заданы вещественные симметричные матрицы $A_1(0),A_2(0)\in M_n(\Re)$ со свойством $A_1(0)A_2(0)=A_2(0)A_1(0)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0)\in M_{n,1}\Re$, связанные соотношением $\mathbf{B}_2(0)=\frac{1}{\beta}SD(0)S'\mathbf{B}_1(0)$ и скаляры $C_1(0),C_2(0)\in\Re$ определяемые согласно $C_1(0)=\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2$,*
$C_2(0)=\frac{1}{2\beta^2}(S'\mathbf{B}_1(0),D(0)S'\mathbf{B}_1(0))=\frac{1}{2\beta}(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))$. Пусть, помимо этого, функция $z(t)$ является вещественным решением задачи Коши

$$\dot{z}(t)=\prod_{k=1}^{m}[1-2d_k(0)z(t)]^{2/(m+2)},z(0)=0.$$

Тогда задача Коши (11), (14) нагруженная алгебраическими уравнениями (8) обладает вещественным решением

$$A_2(t)=\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S'=\dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0),\mathbf{B}_1(t)=[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_1(0),$$

$$\mathbf{B}_2(t)=\frac{1}{\beta}\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)=\frac{1}{\beta}A_2(t)\mathbf{B}_1(0),\qquad(15)$$

$$C_2(t)=\frac{1}{2\beta^2}\dot{z}(t)\Big(SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_1(0)\Big)=\frac{1}{2\beta^2}\Big(A_2(t)\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_1(0)\Big),$$

$$A_1(t)=\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}SE_mS'=[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}A_1(0),C_1(t)=\frac{1}{2\beta}[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}|\mathbf{B}_1(0)|^2.$$

Кроме того, $A_1(t),A_2(t)$- вещественные симметричные матрицы, соответственно, для всех $t\in domain A_1(t),t\in domain A_2(t)$. Здесь

$$Q(t)=diag\Big[[1-2d_1(0)z(t)]^{-1},\dots,[1-2d_m(0)z(t)]^{-1},1,\dots,1\Big];$$

$D(0)=diag[d_1(0),\dots,d_m(0),0,\dots,0]$; $d_l(0)\in\Re$- собственные значения матрицы $A_2(0);d_l(0)\neq0;l=1,2,\dots m;\beta\in\Re;\beta\neq0$.

Объединяя утверждение 1 и теорему 6 заключаем, что справедлива

Теорема 7. *Уравнение нелинейной диффузии*

$$u_t = \nabla \cdot (u^{-4/(m+2)} \nabla u), u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^{+} \to \Re^{+}, \mathbf{x} \in \Re^{n}, \qquad (16)$$

имеет точное неавтомодельное анизотропное по пространственным переменным явное неотрицательное решение вида (3) при $p = 2$ *и* $\lambda = -4/(m+2)$. *При этом функции* $A_k(t), \mathbf{B}_k(t), C_k(t)$ *определяются формулами (15), где* $m \in \{1, 2, \ldots, n\}; k = 1, 2$.

Замечание 1. Групповая классификация уравнения (16) при $m = n$ проведена в работе [18]. В этом исследовании отмечено, что при любом $n \in N$ и $K(u) = u^{-4/(n+2)}$ происходит значительное расширение допустимой группы преобразований для уравнения (16). При этом особо выделяется двумерный случай: $n = 2, K(u) = 1/u$, когда группа допустимых преобразований бесконечномерна.

Пример 1. Пусть $n = 3, d_l = d_l(0) \in \Re^{+}, l = 1, 2, 3$. Тогда, при $\lambda = -1$ решение задачи Коши (10) выражается в эллиптических функциях Якоби [23]. Например, приведем одно из восьми вещественных решений, найденных авторами. Итак, если $d_3 > d_2 > d_1 > 0$, то

$$z(t) = \frac{d_2 - d_3 \operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_3 - d_1)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{d_2/d_3}, k), k)}{2d_2 d_3 \operatorname{cn}^2(\sqrt{d_2(d_3 - d_1)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{d_2/d_3}, k), k)},$$

где $\operatorname{sn}(\cdot, k), \operatorname{cn}(\cdot, k)$- эллиптические синус и косинус Якоби с модулем

$$k = \sqrt{d_3(d_2 - d_1)/(d_2(d_3 - d_1))},\ 0 < k < 1;$$

$\operatorname{sn}^{-1}(\cdot, k)$- функция обратная к $\operatorname{sn}(\cdot, k)$. Если $d_1 = d_2 < d_3$, то $k = 0$ и

$$z(t) = \frac{d_2 - d_3 \sin^2(\sqrt{d_2(d_3 - d_2)}t + \arcsin(\sqrt{d_2/d_3}))}{2d_2 d_3 \cos^2(\sqrt{d_2(d_3 - d_2)}t + \arcsin(\sqrt{d_2/d_3}))}.$$

Если $d_3 = d_2 > d_1$, тогда $k = 1$ и

$$z(t) = \frac{d_1 - d_2 \operatorname{sech}^2(\sqrt{d_2(d_2 - d_1)}t + \operatorname{arth}(\sqrt{(d_2 - d_1)/d_2}))}{2d_1 d_2 \operatorname{th}^2(\sqrt{d_2(d_2 - d_1)}t + \operatorname{arth}(\sqrt{(d_2 - d_1)/d_2}))}.$$

Теорема 8. *Пусть заданы вещественные симметричные матрицы $A_1(0), A_2(0) \in M_n(\Re)$, обладающие свойством коммутации $A_1(0)A_2(0) = A_2(0)A_1(0)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\Re)$ и скаляры $C_1(0), C_2(0) \in \Re$. Пусть $z(t)$ и $u(t)$- соответственно вещественные решения задачи Коши*

$$\dot{z}(t) = \prod_{l=1}^{n} [1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}, z(0) = 0, \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t),$$

и линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода

$$u_0(t) = \sigma \int_0^t K_0(t,\eta)u_0(\eta)d\eta + f_0(t),$$

с ядром $K_0(t,\eta)$ и свободным членом $f_0(t)$ вида

$$K_0(t,\eta) = \dot{z}(\eta)tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)], \ \ f_0(t) = tr[Q^2(t)\Lambda(0)].$$

Тогда существует вещественное решение матрично-векторно-скалярной задачи Коши (11), (14), определяемое формулами

$$A_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S' = \dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0),$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0),$$

$$C_2(t) = \dot{z}(t)\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\right],$$

$$A_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{p}} S\left[\sigma \int_0^t \dot{z}(\eta)u_0(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta + \Lambda(0)\right]Q^2(t)S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{p}} SQ(t)\left[\sigma\left(\int_0^t \dot{z}(\eta)u_0(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta\right)Q(t)S'\mathbf{B}_2(0) + \right.$$

$$\left. +2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\right],$$

$$C_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{p}}\Big[C_1(0) + 2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+2z^2(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) +$$

$$+\sigma\left(\int_0^t \dot{z}(\eta)u_0(\eta)d\eta\right)\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \right.$$

$$+z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2] - \sigma\left(\int_0^t z(\eta)\dot{z}(\eta)u_0(\eta)d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\Big].$$

Помимо этого, $A_1(t), A_2(t)$*- вещественные симметричные матрицы, соответственно, для всех* $t \in domain A_1(t), t \in domain A_2(t)$ *и*

$$v(t) = tr A_2(t) = \dot{z}(t) tr\left(Q(t)D(0)\right) = \dot{z}(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(0)}{1-2d_k(0)z(t)},$$

$$Q(t) = diag\Big[[1-2d_1(0)z(t)]^{-1}, \ldots, [1-2d_n(0)z(t)]^{-1}\Big] = (I-2z(t)D(0))^{-1},$$

$$\ddot{z}(t) = \lambda v(t)\dot{z}(t),\ \dot{z}(0) = 1,\ z(0) = 0,$$

где $D(0) = diag[d_1(0), \ldots, d_n(0)];\ d_l(0) \in \Re$*- собственные значения матрицы* $A_2(0)$*;* $S \in M_n(\Re)$*- произвольная ортогональная матрица;* $\Lambda(0) = S'A_1(0)S;\ D(0) = S'A_2(0)S;\ u_0(t) = u(t)[\dot{z}(t)]_+^{-1/p};\ u(t) = tr A_1(t)$.

Рассмотрим уравнение

$$u_t = \Delta \ln u, u = u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{17}$$

которое при $n = 2$ является особым с точки зрения групповой теории, так как в этом случае группа Ли допустимых преобразований является бесконечномерной [28] и, согласно общепринятой терминологии, называется предельным уравнением быстрой диффузии.

Пример 2. Уравнение (17) ($n = 2$) имеет точное неавтомодельное, анизотропное по пространственным переменным, явное неотрицательное решение

$$u(x,y,t) = \Big[4cn(\Omega t, k)\Big[\frac{\gamma^2+\mu^2}{4\sigma}\Big(1+sn(\Omega t,k)\Big)(x^2+y^2)^2 +$$

$$+4\gamma\Big(1-sn(\Omega t,k)\Big)xy + \Big(\Omega - 2\mu\Big(1-sn(\Omega t,k)\Big)\Big)y^2 +$$

$$+\Big(\Omega + 2\mu\Big(1-sn(\Omega t,k)\Big)\Big)x^2 + 4\sigma\Big(1+sn(\Omega t,k)\Big)\Big]^{-1}\Big]_+, \sigma \in \Re\backslash\{0\},$$

где $sn(\Omega t,k)$, $cn(\Omega t,k)$ - эллиптические синус, косинус Якоби [23] с модулем

$$k=\sqrt{\frac{A^2-32(\gamma^2+\mu^2)}{A^2+32(\gamma^2+\mu^2)}};\ A^2\geq 32(\gamma^2+\mu^2);\ \Omega=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+32(\gamma^2+\mu^2)};$$

$A,\gamma,\mu\in\Re$. При $A^2=32(\gamma^2+\mu^2)$ эллиптические синус и косинус Якоби вырождаются в тригонометрические функции. В этом случае имеем

$$u(x,y,t)=\Bigg[4cos(\omega t)\Bigg[\frac{\omega^2}{16\sigma}\Big(1+sin(\omega t)\Big)(x^2+y^2)^2+$$
$$+\Bigg(\omega^2+2\mu\Big(1-sin(\omega t)\Big)\Bigg)x^2+$$
$$+4\gamma\Big(1-sin(\omega t)\Big)xy+\Bigg(\omega^2-2\mu\Big(1-sin(\omega t)\Big)\Bigg)y^2+4\sigma\Big(1+sin(\omega t)\Big)\Bigg]^{-1}\Bigg]_+,$$

где $\omega=4\sqrt{\gamma^2+\mu^2}$; $\sigma,\gamma,\mu\in\Re;\sigma\neq 0$.

Пример 3. Уравнение нелинейной диффузии (17) при $n=3$ обладает точным неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением

$$u(x,y,z,t)=\Bigg[\frac{2\,\mathrm{sn}(mt,k)\,\mathrm{cn}(mt,k)}{\mathrm{dn}(mt,k)}\Bigg[mx^2-\frac{2c_6}{k}\frac{\mathrm{sn}^2(mt,k)}{\mathrm{cn}^2(mt,k)}-\frac{2c_3}{k}x-$$
$$-\frac{\mathrm{sn}^2(mt,k)}{\mathrm{dn}^2(mt,k)}\left(\frac{c_1}{m}y^2+2c_4ky\right)+\mathrm{sn}^2(mt,k)\left(mz^2-\frac{2c_5}{k}z\right)+ \tag{18}$$
$$+\frac{1}{m\,\mathrm{cn}^2(mt,k)}\left(\frac{c_3^2}{k^2}-c_4^2\frac{\mathrm{sn}^2(mt,k)}{\mathrm{dn}^2(mt,k)}-\frac{c_5^2}{k^2}\,\mathrm{sn}^4(mt,k)\right)\Bigg]^{-1}\Bigg]_+,$$

где $m=\sqrt{c_2-c_1}$; $\mathrm{sn}(mt,k),\mathrm{cn}(mt,k),\mathrm{dn}(mt,k)$ - соответственно эллиптический синус, эллиптический косинус и дельта амплитуда Якоби с модулем $k=\sqrt{c_2}/m$; $c_i\in\Re$; $c_2>c_1; c_2\geq 0; i=1,2,\ldots,6$.

Рассмотрим случаи вырождения эллиптических функций в тригонометрические и гиперболические. Если $c_2=0$, тогда $k=0$ и из формулы (18), в пределе, получим точное решение в тригонометрических функциях

$$u(x,y,z,t)=\Big[2\sin(wt)\cos(wt)\Big[wx^2-2c_3x+\frac{c_3^2}{w\cos^2(wt)}-2c_6\operatorname{tg}^2(wt)+$$

$$+\sin^2(wt)\left(wy^2-2c_4y+wz^2-2c_5z\right)-\frac{(c_4^2+c_5^2)}{w}\frac{\sin^4(wt)}{\cos^2(wt)}\Big]^{-1}\Big]_+, \quad (19)$$

где $w=\sqrt{-c_1}$. Отметим, что если $c_1=-1, c_3=c_4=c_5=c_6=0$, то из (19) следует решение

$$u(x,y,z,t)=\left[\frac{2\sin t\cos t}{x^2+\sin^2 t(y^2+z^2)}\right]_+,$$

приведенное в [9]. Полагая $c_1=0$, получим $k=1$ и из выражения (18) вытекает точное решение в гиперболических функциях

$$u(x,y,z,t)=\Big[\operatorname{th}(vt)\Big[vx^2-2c_3x-2c_4\operatorname{sh}^2(vt)y+\operatorname{th}^2(vt)\Big(vz^2-2c_5z\Big)+$$

$$+\frac{c_3^2}{v}\operatorname{ch}^2(vt)-\frac{c_4^2}{v}\operatorname{sh}^2(vt)\operatorname{ch}^2(vt)-\frac{c_5^2}{v}\frac{sh^4(vt)}{ch^2(vt)}-2c_6\operatorname{sh}^2(vt)\Big]^{-1}\Big]_+, \quad (20)$$

которое является довольно интересным, так как при $c_4=0$ оно вырождается в двумерное, где $v=\sqrt{c_2}$. Например, если $c_2=1,\ c_3=c_4=c_5=0,\ c_6=-1/2$, то из (20) следует точное решение уравнения (17) при $n=2$. Итак имеем

$$u(x,y,t)=\left[\frac{2\operatorname{th} t}{x^2+y^2\operatorname{th}^2 t+\operatorname{sh}^2 t}\right]_+.$$

Методы исследования переопределенных систем АДУ и систем эволюционных уравнений, нагруженных дифференциальными связями, обсуждались в [19, 24–26]. Наконец, отметим, что переопределенные системы АДУ возникают во многих прикладных задачах, например, при математическом моделировании процессов химической кинетики с учетом диффузии и теплопроводности [27] (см. также [29]).

References

[1] Кершнер Р. О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений// Acta Math.Acad.Sci.
Hungaricae.1978. Т.32, N3-4.С.301-330.

[2] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности : обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры //Соврем.пробл.матем. Новешие достижения. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. Т.28. С.95-205.

[3] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

[4] Галактионов В.А., Посашков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями //Журн.вычис.матем. и матем.физики.1989. Т.29, N 4. С.497-506.

[5] Galaktionov V.A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications //J.Differential and Integral Equations. 1990. V.3, N 5. P.863-874.

[6] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit so lution to evolution equations with quadratic nonlinearities //School of Mathematics. Univ.Bristol.1991. Report N AM-91-11, 39 p.

[7] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit so lution to evolution equations with quadratic nonlinearities //Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1995. V.125A. P.225-246.

[8] King J.R. Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations //Quart.J.Mech.Appl.Math. 1993. V. 46, N 3. P.419-436.

[9] Пухначев В.В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии //Прикл.механика и технич.физика. 1995. Т.36, N 2. С.23-31.

[10] Meirmanov A.M., Pukhnachev V.V., Shmarev S.I. Evolution equations and Lagrangian coordinates. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1997.

[11] Косыгина Е.Р. Об анизотропных точных решениях многомерного уравнения нестационарной фильтрации//Журн.вычис.матем. и матем. физики.1995. Т.35, N 2. С.241-259.

[12] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии //Сиб. матем.журн. 1997. Т.38, N 5.С.1130-1139.

[13] Рудых Г.А., Семенов Э.И. О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком) //Журн. вычис. матем. и матем. физики. 1998. Т.38, N 6.С.971-977.

[14] Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка// УМН. 1987. Т.42, N.2 (254). С.135-176.

[15] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии //Сиб. матем. журн.1998. Т.39, N 5.С.1129-1138.

[16] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Точные неавтомодельные решения уравнения $u_t = \Delta \ln u$ //Матем. заметки (принята к публикации).

[17] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Точные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии//Известия РАН. Серия матем.(принята к публикации).

[18] Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями //Дифференц.уравнения. 1995. Т.31, N 2. С.253-261.

[19] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.:Наука, 1978.

[20] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[21] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[22] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

[23] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.:Гостехиздат, 1948.

[24] Brenan K.E., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations. North-Holland. Elsevier. New-York. 1989.

[25] Сидоров А.Ф., Шапеев В.П., Яненко Н.Н. Метод дифференциальных связей и его приложения к газовой динамике. Новосибирск.: Наука, 1984.

[26] Капцов О.В. Линейные определяющие уравнения для дифференциальных связей// Мат.сборник. 1998. Т.189, N 12. С.103-118.

[27] Вольперт А.И., Иванова А.Н. Математические модели в химической кинетике// Математическое моделирование. Нелинейные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Наука, 1987. С.57-102.

[28] Дородницын В.А., Князева И.В., Свирщевский С.Р. Групповые свойства уравнения теплопроводности с источником в двумерном и трехмерном случаях // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19, N 7. С.1215-1223.

[29] Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями// Дифференц. уравнения. 1995. Т.31, N 2. С.253-261.

[30] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии// Матем. заметки. 2000. Т.67, N2. С. 250-256.

[31] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии I, II//Сиб. матем. журн. 2000.

[32] Рудых Г.А. Существование и качественный анализ точных неавтомодельных решений многмерного уравнения нелинейной диффузии// Маетем. сборник.