УДК 517.988

Нелинейные операторные уравнения с функциональным возмущением аргумента нейтрального типа

Н.А. Сидоров, А.В. Труфанов
(sidorov@math.isu.runnet.ru, atrufanov@mail.ru)
Иркутский Государственный Университет

Аннотация. Строятся малые решения $x(t) \to 0$, при $t \to 0$ нелинейных операторных уравнений с функциональным возмущением аргумента, (кратко ФВА). Методом диаграммы Ньютона задача сводится к квазилинейным операторным уравнениям с ФВА. Показано, что такие уравнения могут иметь не только алгебраические, но и логарифмические точки ветвления. Число свободных параметров и вид решения зависят от свойств жордановой структуры операторных коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: ветвление решений, жорданов набор, функциональное возмущение аргумента

1. Введение

Рассматривается операторное уравнение

$$F(x(t), x(\alpha(t))) = 0 \tag{1.1}$$

с функциональным возмущением аргумента. Наибольший интерес представляет поведение решений $x(t)$ в окрестности точек t_0, в которых $\alpha(t_0) = t_0$. В работе рассматривается следующий случай: $\alpha(0) = 0$, $|\alpha'(0)| = q < 1$ и стоятся решения $x(t) \to 0$ при $t \to 0$. Такие возмущения аргумента естественно назвать функциональным возмущением нейтрального типа. В литературе есть лишь частные результаты, касающиеся построения решений таких уравнений в окрестности критических точек t_0.

Интерес к выделению и изучению такого класса уравнений возникает уже при изучении линейных алгебраических функциональных уравнений. Например, уравнение

$$x(t) - kx\left(\frac{t}{2}\right) = t \tag{1.2}$$

при $k \neq 2$ имеет единственное решение

$$x(t) = \frac{1}{1 - \frac{k}{2}}t,$$

т.к. соответствующее однородное уравнение имеет только нулевое решение. В дальнейшем, будем называть этот случай регулярным. Если $k = 2$, то соответствующее однородное уравнение имеет ненулевое решение $x_0(t) = ct$, где c - произвольная постоянная. Такой случай будем называть сингулярным или резонансным.
При $k = 2$ решением уравнения (1.2) будет функция

$$x(t) = \frac{1}{\ln 2} t \ln t + ct,$$

где c произвольная постоянная.
Отметим, что уравнения с ФВА могут иметь формальные решения, сходящиеся только в одной точке. Например, применяя метод последовательных приближений к уравнению

$$x(t) = t + tx(2t)$$

и выбирая в качестве начального приближения $x_0(t) = 0$ получим ряд

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{\frac{n(n+1)}{2}} t^{n+1},$$

сходящийся только в точке $t = 0$. К этому же расходящемуся ряду приводит применение метода неопределенных коэффициентов. Поэтому разработка теории линейных и нелинейных уравнений с ФВА является интересной задачей и актуальной в связи с рядом приложений [15] .
В работе предлагается общий метод, позволяющий строить малые разветвляющиеся решения нелинейных операторных уравнений с ФВА нейтрального типа в окрестности точек t_0, в которых $\alpha(t_0) = t_0$. На сегодняшний день теория ветвления решений нелинейных операторных уравнений хорошо развита [1], [2], [6], [3], [8] но для уравнений с ФВА в этой части имеются лишь частные результаты [4], [5], [9]- [11]. Утверждения, приведенные в работе, являются базисом аналога теории ветвления малых решений уравнений с ФВА нейтрального типа. В отличие от классической теории ветвления, в которой точки ветвления являются алгебраическими точками ветвления и решения строятся в виде рядов Пьюизо (по целым и дробным степеням параметра), уравнения с ФВА нейтрального типа могут иметь как алгебраические, так и логарифмические точки ветвления малых решений.

В первом параграфе приведена процедура сведения нелинейных уравнений (1.1) к нескольким уравнениям вида

$$Ax(t) - Bx(\alpha(t)) = R(x(t), x(\alpha(t)), t) \tag{1.3}$$

с ФВА, называемым нами квазилинейными.
Во втором параграфе приводятся утверждения касающиеся разрешимости треугольных операторных систем с фредгольмовым оператором на диагонали. Эти утверждения существенно используются при построении малых решений уравнений с ФВА нейтрального типа, но носят общий характер и выделены в отдельный параграф.
В третьем параграфе рассматриваются линейные операторно-разностные уравнения с полиномиальной правой частью

$$Ax(z) - Bx(z+a) = P(z).$$

Исследование решений таких уравнений позволяет формулировать утверждения о структуре решений квазилинейных уравнений с ФВА (1.3).
Параграф 4 посвящен построению решений квазилинейных уравнений (1.3). Там же формулируются теоремы существования решений нелинейного уравнения (1.1).

2. Редукция к квазилинейным уравнениям с ФВА

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, функция $\alpha(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \alpha_i t^i$, $|\alpha_1| = q < 1$.
Рассмотрим нелинейное операторное уравнение

$$F(x(t), x(\alpha(t)), t) = 0, \tag{2.1}$$

где $F : E_1 \times E_1 \times R_1 \to E_2$ аналитическое нелинейное отображение в окрестности нуля, т.е.

$$F(x(t), x(\alpha(t)), t) = \sum_{i+j+k \geq 1}^{\infty} F_{ijk} x^i(t) x^j(\alpha(t)) t^k, \tag{2.2}$$

где F_{ijk} - степенные операторы [1] по x.

Определение 1. Если в разложении (2.2) $F_{100} \neq 0$ и $F_{010} \neq 0$, то уравнение (2.1) будем называть квазилинейным.

Покажем что замена

$$x(t) = t^{\epsilon}(z_0 + u(t)) \tag{2.3}$$

где ϵ определяется методом диаграммы Ньютона, z_0 - решение определенного нелинейного операторного уравнения и $u(t) \to 0$ при $t \to 0$ позволяет свести построение малых решений $x(t) \to 0$ при

$t \to 0$ с порядком роста ϵ к квазилинейному уравнению с ФВА нейтрального типа относительно функции $u(t)$.

Множество индексов $\{i, j, k\}$, отвечающих $F_{ijk} \neq 0$, обозначим $supp\{F\}$.

Для построения показателя степени ϵ необходимо выбрать его так, чтобы хотя бы два числа из совокупности

$$k + \epsilon(i + j),$$

где $\{i, j, k\} \in supp\{F\}$, совпадали, а остальные были не меньше их.

Для этого нанесем на плоскость точки $(i + j, k)$, где $\{i, j, k\} \in supp\{F\}$. не ограничивая общности будем считать, что $F(0, 0, t) \neq 0$, т.к. в противном случае уравнение (2.1) имеет тривиальное решение $x(t) = 0$.

Зафиксируем отрезок диаграммы Ньютона, отвечающий уравнению $k + \epsilon(i + j) = \theta$, где $\epsilon = \frac{r}{s}$ и определяется по формуле

$$\epsilon = \frac{k_1 - k_2}{(i_2 + j_2) - (i_1 + j_1)},$$

где точки $(i_1 + j_1, k_1)$, $(i_2 + j_2, k_2)$ принадлежат выбранному отрезку диаграммы Ньютона и $i_2 + j_2 > i_1 + j_1$.

С помощью замены $x(t) = t^\epsilon z(t),\ z(0) \neq 0$ приведем уравнение (2.2) к виду

$$t^\theta \left[P(z(t), z(\alpha(t))) + R(z(t), z(\alpha(t)), t^{\frac{1}{s}}) \right] = 0, \tag{2.4}$$

где

$$P(z(t), z(\alpha(t))) = \sum_{(i+j)\epsilon + k = \theta} F_{ijk} z^i(t) z^j(\alpha(t)) (\alpha'(0))^{\epsilon j}, \tag{2.5}$$

и нелинейное отображение R имеет оценку

$$R(z(t), z(\alpha(t)), t^{\frac{1}{s}}) = o(1), \forall z(t), z(\alpha t), \quad t \to 0.$$

Сокращая (2.5) на t^θ и устремляя t к нулю. получим для определения $z(0)$ уравнение Уравнение

$$P(z(0), z(0)) = 0. \tag{2.6}$$

Следуя теории ветвления [1], [2] операторное уравнение (2.6) назовем укорочением основного уравнения (2.1), отвечающим выбранному отрезку диаграммы Ньютона.

Пусть $z_0 = z(0)$ удовлетворяет (2.6). Тогда построение малых решений уравнения (2.1) с порядком роста $\epsilon > 0$ сводится с помощью замены (2.3) к отысканию функции $u(t) \to 0$ при $t \to 0$ из уравнения

$$P(z_0 + u(t), z_0 + u(\alpha(t))) + R(z_0 + u(t), z_0 + u(\alpha(t)), t^{\frac{1}{s}}) = 0. \quad (2.7)$$

Т.к. z_0 удовлетворяет уравнению (2.6), то уравнение (2.7) принимает вид

$$A_1 u(t) + A_2 u(\alpha(t)) + \tilde{R}(z_0 + u(t), z_0 + u(\alpha(t)), t^{\frac{1}{s}}) = 0, \quad (2.8)$$

где $A_1 = \frac{\partial P(z(t), z(\alpha(t)))}{\partial z(t)}|_{z(t)=z(\alpha(t))=z_0}$, $A_1 = \frac{\partial P(z(t), z(\alpha(t)))}{\partial z(\alpha(t))}|_{z(t)=z(\alpha(t))=z_0}$ - линейные ограниченные операторы и

$$\tilde{R}(z_0 + u(t), z_0 + u(\alpha(t)), t^{\frac{1}{s}}) = \\ = \sum_{i+j=2}^{\infty} \tilde{R}_{ij0} u^i(t) u^j(\alpha(t)) + \sum_{i+j=2}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{R}_{ijk} u^i(t) u^j(\alpha(t)) t^{k/s}. \quad (2.9)$$

Таким образом, метод диаграммы Ньютона позволяет свести уравнение (2.1) к квазилинейным уравнениям (2.8) с ФВА нейтрального типа.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнено условие (2.2) , уравнение укорочения (2.6) имеет решение z_0, соответствующее отрезку диаграммы Ньютона при выбранном $\epsilon > 0$, пусть оператор A_1 непрерывно обратим, $A_2 = 0$, тогда уравнение (2.1) имеет решение*

$$x(t) = \sum_{i=r}^{\infty} x_i t^{i/s}, \; x_r = z_0.$$

Доказательство. Т.к. оператор A_1 непрерывно обратим, $A_2 = 0$, то коэффициенты x_i определяются единственным образом методом неопределенных коэффицентов. Сходимость ряда в окрестности точки $t = 0$ легко устанавливается с помощью принципа сжимающих отображений. □

Замечание 1. Приведенные выше рассуждения можно применить и к исследованию уравнений Вольтерра

$$F(x(\alpha_1(t)), \dots x(\alpha_N(t)), t) + \int_0^{\beta(t)} K(t,s) G(x(\alpha_1(t)), \dots x(\alpha_N(t))) ds = 0, \quad (2.10)$$

где $\alpha_i(t) = \sum\limits_{j=\beta_i}^{\infty} \alpha_{ij} t^j$, $i = 1, \ldots, N$, имеющих важные приложения в энергетике [15].

Отметим, что замена $t = \tau^s$ позволяет избавиться от дробных степеней в уравнении (2.8). Поэтому в целях прозрачночти изложения будем предполагать, что в уравнении (2.8) $s = 1$. Далее основной объект этой статьи - уравнение (2.8) будет исследовано в общем случае, когда $A_2 \neq 0$. При этом предполагается, что оператор A_1 непрерывно обратим.

3. Линейные операторно-разностные системы уравнений с фредгольмовым оператором на диагонали

Пусть оператор $C : E_1 \to E_2$ - фредгольмов, $B : E_1 \to E_2$ - ограниченный оператор .

Пусть оператор C имеет полный B- жорданов набор $\{\varphi_i^{(j)}\}, i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i$ [1] , т.е. выполняются условия

$$C\varphi_i^{(1)} = 0,\ i = 1, \ldots, n,$$

$$C\varphi_i^{(j+1)} = B\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i - 1,$$

$$det < B\varphi_i^{(p_i)}, \psi_j >_{i,j=0}^{n} \neq 0,$$

где $C^*\psi_j = 0, j = 1, \ldots, n.$

Рассмотрим треугольную систему из N операторных уравнений вида

$$Lx = \beta, \tag{3.1}$$

где $L = [L_{ik}]_{i,k=\overline{1,N}}$, $L_{ik} = 0, k > i,\ i, k = 1, \ldots, N$,

$$L_{ik} = \begin{cases} -Ba_{ik},\ k \leq i-1, a_{i,i-1} \neq 0 \\ C,\ k = i \end{cases},$$

вектор $\beta \in E_2 \times \ldots \times E_2$, $x \in E_1 \times \ldots \times E_1$, число $N > \max\limits_{i=1,\ldots,n} \{p_i\}$.

ЛЕММА 1. *Оператор L действует из E_1^N в E_2^N и является фредгольмовым. При этом $dimN(L) = dimN(L^*) = k$, где $k = p_1 + \ldots + p_n$ - B-корневое число фредгольмова оператора C.*

Доказательство. Т.к. C- фредгольмов оператор, B- ограниченный, то в силу блочно-треугольной структуры оператора L, оператор L является нормально разрешимым. Осталось проверить равенство $dim N(L) = dim N(L^*) = k$.
Для проверки этого равенства построим базисы в $N(L)$ и в $N(L^*)$. Предварительно отметим, что если $\vec{e^*} \in N(L)$, то первая его отличная от нуля кордината необходимо лежит в $N(C)$. Следовательно, эта координата входит в множество $span(\varphi_1^{(1)}, \ldots, \varphi_n^{(1)})$. Поэтому не менее $N - p_i,\ i = 1, \ldots, n$ первых координат соответствующих векторов $\vec{e} \in N(L)$ будут нулями. Поэтому векторы $\vec{e}$ из $N(L)$ следует искать в виде

$$\vec{e}_i^{(j)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ e_i^{(j,1)} \\ \vdots \\ e_i^{(j,j)} \end{bmatrix}, j = \overline{1, p_i},\ i = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

где $e_i^{(j,1)} = \varphi_i^{(1)}$.

Подставим (3.2) в однородное уравнение $Lx = 0$. Построим рекуррентным образом все ненулевые координаты вектора $\vec{e}_i^j$:

$$\left.\begin{array}{l} e_i^{(j,2)} = \Gamma B a_{N-j+2N-j+1} e_i^{(j,1)} = \Gamma B \varphi_i^{(1)} a_{N-j+2N-j+1} \\ e_i^{(j,3)} = \Gamma B(a_{N-j+3N-j+1} e_i^{(j,1)} + a_{N-j+3N-j+2} e_i^{(j,2)}) \\ \ldots \\ e_i^{(j,j)} = \Gamma B(a_{NN-j+1} e_i^{(j,1)} + \ldots + a_{NN-1} e_i^{(j,j-1)}) \end{array}\right., j = \overline{1, p_i},\ i = 1, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Элементы $e_i^{(j,s)}, s = 2, \ldots, j$ будут лежать в $E_1^{\infty - n}$ и являться линейно независимыми.

Таким образом $span\{e_i^{(j,s)},\ i = 1 \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i,\ s = 2, \ldots, j\}$ лежит в подпространстве $span\{\varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}, i = 1, \ldots, n\} \in E_1^{\infty - n}$. Следовательно $dim N(L) = p_1 + \ldots + p_n$

Построение базиса в $N(L^*)$ проводим аналогично. Введем однородную сопряженную систему

$$L^* \vec{e^*} = C^* \begin{bmatrix} 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix} - B^* \begin{bmatrix} 0 & a_{21} & a_{31} & \ldots & a_{N1} \\ 0 & 0 & a_{32} & \ldots & a_{N2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & a_{NN-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Поэтому векторы $\vec{e}^*$ из $N(L^*)$ ищем в виде

$$\vec{e}_i^{(j)*} = \begin{bmatrix} e_i^{(j,1)*} \\ \vdots \\ e_i^{(j,j)*} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, j = \overline{1,p_i},\ i = 1,\dots,n,$$

где $e_i^{(j,1)*} = \psi_i^{(1)}$.

Тогда

$$\begin{bmatrix} e_i^{(j,2)*} \\ \vdots \\ e_i^{(j,j)*} \end{bmatrix} = \Gamma^* B^* \begin{bmatrix} a_{N-j+2N-j+1} & 0 & \dots & 0 \\ a_{N-j+3N-j+1} & a_{N-j+3N-j+2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{NN-j+1} & a_{NN-j+2} & \dots & a_{NN-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_i^{(j,1)*} \\ \vdots \\ e_i^{(j,j-1)*} \end{bmatrix},$$

$$j = \overline{2,p_i},\ i = 1,\dots,n. \quad (3.4)$$

□

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если вектор* $\beta = (0,\dots,0,\beta_{max\{p_i\}+1},\dots,\beta_{max\{p_i\}+m})'$, *то система* $Lx = \beta$ *разрешима.*

Замечание 2. Если $a_{ii-1} = 1,\ a_{is} = 0, s = 1,\dots,i-2$, то $\vec{e}_i^{(j)} = [0,\dots,0,\varphi_i^{(j)}]', i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,p_i$.

4. Линейные операторно-разностные уравнения

При построении решений уравнений вида (2.8) приходится решать несколько операторно-разностных уравнений с полиномиальной правой частью вида

$$Ax(z) - Bx(z+a) = P(z), \quad (4.1)$$

где $z \in \mathtt{R}$, $a \in \mathtt{R}$, $P(z) = \sum_{i=0}^{m} P_i z^i$ - определенный полином аргумента z степени m, коэффициенты $P_i \in E_2$ $i = \overline{1,m}$, искомое решение $x(z) \in E_1$.

Решение $x(z)$ строится в виде полинома аргумента z. Обозначим $C \stackrel{\triangle}{=} A - B$.

ЛЕММА 2. *Пусть оператор C непрерывно обратим, тогда уравнение (4.1) имеет единственное решение вида*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m} x_i z^i. \tag{4.2}$$

Для доказательства достаточно подставить предлагаемое решение в исходное уравнение. В результате, для определения коэффициентов решения получим треугольную операторную систему с обратимым оператором на диагонали, из которой все коэффициенты решения определяются единственным образом.

Пусть оператор C фредгольмов, размерность $dimN(C) = dimN(C^*) = n$, элементы $\varphi_i, i = \overline{1,n}$ образуют базис пространства $N(C)$, элементы $\psi_j, j = \overline{1,n}$ образуют базис пространства $N(C^*)$, и выполняется условие

$$\mathbf{det} < B\varphi_k, \psi_l > \Big|_{k,l=\overline{1,n}} \neq 0. \tag{4.3}$$

ЛЕММА 3. *Пусть $dimN(C) = dimN(C^*) = n$, выполняются условия (4.3), тогда уравнение (4.1) имеет решение вида*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m+1} x_i z^i, \tag{4.4}$$

зависящее от n произвольных постоянных, где коэффициенты $x_{m+1}, \ldots, x_1$ определяются единственным образом.

ЛЕММА 4. *Пусть $dimN(C) = dimN(C^*) = 1$, и $\{\varphi^{(j)}\}, j = 1, \ldots, p$ - B-жорданова цепочка оператора C, т.е. выполняются равенства*

$$C\varphi^{(1)} = 0,$$

$$C\varphi^{(j+1)} = B\varphi^{(j)},\ j = 1, \ldots, p_i - 1,$$

$$< B\varphi^{(p)}, \psi > \neq 0,$$

где $C^*\psi = 0$, тогда уравнение (4.1) имеет решение вида

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m+p} x_i z^i, \tag{4.5}$$

зависящее от p произвольных постоянных.

ЛЕММА 5. *Пусть* $dimN(C) = dimN(C^*) = n$, *и* $\{\varphi_i^{(j)}\}, i = 1, \ldots, n, \ j = 1, \ldots, p_i$ *- полный* B*-жорданов набор оператора* C, *тогда уравнение (4.1) имеет решение вида*

$$x(z) = \sum_{i=0}^{m+p} x_i z^i, \tag{4.6}$$

где $p = \max_{i=1,\ldots,n} \{p_i\}$, *зависящее от* $k = p_1 + \ldots + p_n$ *произвольных постоянных.*

Доказательства лемм 3-5 идентичны, для этого достаточно подставить предлагаемое решение в исходное уравнение. В результате, для определения коэффициентов решения получим треугольную операторную систему с фредгольмовым оператором на диагонали, рассмотренную в предыдущем параграфе. Поэтому справедливость лемм 3,4,5 вытекает из следствия 1. Коэффициенты x_i разложений (4.4),(4.5),(4.6) можно вычислить последовательно методом неопределенных коэффициентов. При этом, первым вычисляется коэффициент при старшей степени z. Произвольные постоянные, появляющиеся при вычислениях, определяются из условий разрешимости последующих уравнений системы. Детали вычислений изложены в работах [4], [5], [12], [13].

5. Квазилинейные операторные уравнения с ФВА.

Рассмотрим уравнение

$$Ax(t) - Bx(\alpha(t)) = R(x(t), x(\alpha(t)), t), \tag{5.1}$$

где A, B - линейные ограниченные операторы, действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, оператор A непрерывно обратим, функция $\alpha(t)$ аналитическая в точке $t = 0$ и

$$\alpha(0) = 0, \quad |\alpha'(0)| < q < 1. \tag{5.2}$$

Пусть

$$R(x(t), x(\alpha(t)), t) = \\ = \sum_{i+j=2}^{\infty} R_{ij0} x^i(t) x^j(\alpha(t)) + \sum_{i+j=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} R_{ijk} x^i(t) x^j(\alpha(t)) t^k. \tag{5.3}$$

ЛЕММА 6. *Зафиксируем число* $0 < q_2 < 1$ *и выберем число* Q *так, чтобы выполнялось неравенство*

$$q^Q \|A^{-1}B\| \leq q_2. \tag{5.4}$$

Пусть существует функция $x_Q^*(t)$ такая, что выполняется оценка

$$\|Ax_Q^*(t) - Bx_Q^*(\alpha(t)) - R(x_Q^*(t), x_Q^*(\alpha(t)), t)\| = \\ = o(|t|^Q), \quad t \to 0, \quad (5.5)$$

тогда существуют числа $\rho > 0$, $r > 0$ такие, что в окрестности $|t| < \rho$ уравнение (5.1) имеет решение вида

$$x(t) = x_Q^*(t) + t^Q V(t), \quad (5.6)$$

где функция $V(t) \to 0$, при $t \to 0$ и выполняется оценка

$$\|V\| \stackrel{def}{=} \max_{|t|\le\rho} \|V(t)\|_{E_1} \le r. \quad (5.7)$$

Доказательство. Подставив решение (5.6) в уравнение (5.1) получим равенство

$$Ax_Q^*(t) + t^Q AV(t) - Bx_Q^*(\alpha(t)) - \alpha(t)^Q BV(\alpha(t)) = \\ = R(x_Q^*(t) + t^Q V(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V(\alpha(t)), t). \quad (5.8)$$

Поскольку существует ограниченный обратный оператор A^{-1}, то запишем равенство (5.8) в виде

$$V(t) = \Phi(V(t), t), \quad (5.9)$$

где

$$\Phi(V(t), t) = \frac{\alpha(t)^Q}{t^Q} A^{-1} BV(\alpha(t)) - \frac{A^{-1}}{t^Q}(Ax_Q^*(t) - \\ - Bx_Q^*(\alpha(t)) - R(x_Q^*(t) + t^Q V(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V(\alpha(t)), t)). \quad (5.10)$$

Покажем, что отображение $\Phi(V(t), t)$ является сжимающим. Действительно,

$$\|\Phi(V_2(t), t) - \Phi(V_1(t), t)\| = \frac{|\alpha(t)|^Q}{|t|^Q} \|A^{-1}B\| \|V_2(\alpha(t)) - V_1(\alpha(t))\| - \\ - \frac{\|A^{-1}\|}{|t|^Q} \|R(x_Q^*(t) + t^Q V_2(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_2(\alpha(t)), t) - \\ - R(x_Q^*(t) + t^Q V_1(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_1(\alpha(t)), t)\|. \quad (5.11)$$

В силу условий (5.2) и выбора окрестности нуля $|t| < \rho$ выполняется неравенство

$$\max_{|t|\le\rho} \|V_2(\alpha(t)) - V_1(\alpha(t))\| \le \max_{|t|\le\rho} \|V_2(t) - V_1(t)\| = \|V_2 - V_1\|. \quad (5.12)$$

В силу условий условий леммы в определеной окрестности нуля выполняется неравенство

$$|\frac{\alpha(t)}{t}|^Q \|A^{-1}B\| \le q_2 < 1. \quad (5.13)$$

В силу нелинейности правой части R и её гладкости по своим аргументам можно получить оценку

$$\frac{\|A^{-1}\|}{|t|^Q} \|R(x_Q^*(t) + t^Q V_2(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_2(\alpha(t)), t) -$$
$$- R(x_Q^*(t) + t^Q V_1(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_1(\alpha(t)), t)\| \le$$
$$\le \int_0^1 \|\frac{\partial R}{\partial v(\alpha(t))}(x_Q^*(t) + t^Q V_2(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q \theta(V_2(\alpha(t)) - V_1(\alpha(t))), t)\|$$
$$d\theta |\alpha'(0)t|^Q \|V_2(\alpha(t)) - V_1(\alpha(t))\| +$$
$$+ \int_0^1 \|\frac{\partial R}{\partial v(t)}(x_Q^*(t) + t^Q \theta(V_2(t) - V_1(t)), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_1(\alpha(t)), t)\|$$
$$d\theta |t|^Q \|V_2(t) - V_1(t)\|. \quad (5.14)$$

Выбрав окрестность нуля $|t| \le \rho_4$ обеспечим выполнение неравенства

$$\frac{\|A^{-1}\|}{|t|^Q} \|R(x_Q^*(t) + t^Q V_2(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_2(\alpha(t)), t) -$$
$$- R(x_Q^*(t) + t^Q V_1(t), x_Q^*(\alpha(t)) + \alpha(t)^Q V_1(\alpha(t)), t)\| < \frac{1 - q_2}{2}. \quad (5.15)$$

Тогда, при $|t| \le min(\rho, \rho_4)$, с учетом (5.12), (5.13), (5.14), (5.15) получим

$$\|\Phi(V_2(t), t) - \Phi(V_1(t), t)\| \le \Big(\frac{1 + q_2}{2}\Big) \|V_2 - V_1\|. \quad (5.16)$$

Покажем, что отображение $\Phi(V(t), t)$ не выводит нас из шара $\|V\| \le r$.
Воспользуемся неравенством треугольника

$$\|\Phi(V(t), t)\| \le \|\Phi(V(t), t) - \Phi(0, t)\| + \|\Phi(0, t)\|. \quad (5.17)$$

В силу условия леммы (5.5), функция $\Phi(0,t) \to 0$ при $t \to 0$. Выберем число $\rho_5 > 0$ так, чтобы при $|t| < \rho_5$ выполнялось неравенство

$$\|\Phi(0,t)\| \leq (1 - \frac{1+q_2}{2})r.$$

Следовательно,

$$\|\Phi(V(t),t)\| \leq \frac{1+q_2}{2} \max_{|t|<min(\rho,\rho_4)} \|V(t)\| + (1 - \frac{1+q_2}{2}) \max_{|t|<\rho_5} \|V(t)\|. \tag{5.18}$$

Положим $\rho = min(\rho, \rho_4, \rho_5)$, тогда

$$\|\Phi(V(t),t)\| \leq \max_{|t|\leq\rho} \|V(t)\| = r. \tag{5.19}$$

Таким образом, отображение $\Phi(V(t),t)$ является сжимающим в шаре $\|V\| \leq r$, при $|t| < \rho$ и функция $V(t)$ может быть построена последовательными приближениями вида

$$\begin{array}{l} V_n(t) = \Phi(V_{n-1}(t),t), n = 1,2,\ldots, \\ V_0(t) = 0. \end{array} \tag{5.20}$$

□

Функцию $x_Q^*(t)$ будем строить в виде

$$x_Q^*(t) = \sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|t|)t^s. \tag{5.21}$$

Поскольку выполняются условия (5.2), то при малом t справедливы равенства

$$\begin{array}{l} \alpha(t) = \alpha'(0)t + (\alpha(t) - \alpha'(0)t), \\ ln|\alpha(t)| = ln|\alpha'(0)| + ln|t| + ln(1 + \frac{\alpha(t)-\alpha'(0)t}{\alpha'(0)t}) = \\ \quad = ln|\alpha'(0)| + ln|t| + \beta_1 t + \beta_2 t + \ldots, \end{array} \tag{5.22}$$

где числа β_i являются коэффицинтами разложения

$$\beta(t) \stackrel{\triangle}{=} ln(1 + \frac{\alpha(t) - \alpha'(0)t}{\alpha'(0)t})$$

в ряд Маклорена.

Подставим представление функции (5.21) в уравнение (5.1), учтем равенство (5.22) и получим

$$A\sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|t|)t^s - B\sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|\alpha'(0)| + ln|t| + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + \ldots)\cdot$$
$$\cdot(\alpha'(0)t + (\alpha(t) - \alpha'(0)t))^s =$$
$$= R(\sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|t|)t^s, \sum_{s=1}^{Q} x_s(ln|\alpha(t)|)\alpha(t)^s, t). \quad (5.23)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial t^i}(Bx_i(ln|\alpha'(0)| + z + \beta(t))\alpha(t)^i)\Big|_{t=0} =$$
$$= \frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial t^i}(B\alpha'(0)^i t^i x_i(ln|\alpha'(0)| + z + \beta(t)))\Big|_{t=0} =$$
$$= B\alpha'(0)^i x_i(ln|\alpha'(0)| + z). \quad (5.24)$$

Уравнения для определения коэффициентов $x_i(ln|t|)$ асимптотики $x_Q^*(t)$ можно выделить или при помощи метода неопределенных коэффициентов, или по следующей формуле

$$Ax_i(z) - \alpha'(0)^i Bx_i(ln|\alpha'(0)| + z) =$$
$$= \frac{1}{i!}\frac{\partial^i}{\partial t^i}\Big(B\sum_{s=1}^{i-1} x_s(ln|\alpha'(0)| + z + \beta(t))\alpha(t)^s +$$
$$+ R(\sum_{s=1}^{i-1} x_s(z)t^s, \sum_{s=1}^{i-1} x_s(ln|\alpha'(0)| + z + \beta(t))\alpha(t)^s, t)\Big)\Big|_{t=0},$$
$$i = 1, 2, \ldots, \quad (5.25)$$

где $z = ln|t|$.
Заметим, что правая часть зависит от коэффициентов, определенных на предыдущих шагах $s = 1, 2, \ldots, i-1$, и имеет вид некоторого полинома аргумента $ln|t|$.
Проводя данную процедуру дифференцирования, мы выделяем те члены равенства (5.23), которые соответствуют членам порядка t^i, при разложении соответствующих функций, вектор-функций, и отображений в ряды Тейлора.

Для решения уравнениq (5.25) можно применить утверждения лемм 2,3,4,5 и определить сколь угодно много коэффициентов $x_i(ln|t|)$.

Найдем такое число Q коэффициентов $x_i(ln|t|)$, чтобы для $0 < q_2 < 1$ выполнялось неравенство

$$|\alpha'(0)|^Q \|A^{-1}B\| < q_2 < 1,$$

тогда на основании леммы 6 исходное уравнение (5.1) имеет в некоторой окрестности нуля локальное вида

$$x(t) = x_Q^*(t) + t^Q V(t),$$

где функция $V(t) \to 0$ при $t \to 0$ и может быть построена последовательными приближениями вида (5.20).

Замечание 3. Заметим, что от требований аналитичности можно отказаться. Для построения решения достаточно требовать гладкость порядка Q в некоторой окрестности нуля.

Справедливо утверждение:

ТЕОРЕМА 2. *Пусть в уравнении (5.1) оператор A непрерывно обратим, $\alpha(0) = 0$, $|\alpha'(0)| < q < 1$, R удовлетворяет (5.3). Выберем Q так, чтобы*

$$|\alpha'(0)|^Q \|A^{-1}B\| < q < 1.$$

Пусть $\alpha(t)$, $R(x(t), x(\alpha(t)), t)$ обладают гладкостью порядка Q в некоторой окрестности нуля. Пусть число $\lambda = 0$ является регулярной точкой или изолированной фредгольмовой точкой семейства операторов

$$\tilde{C}(i) \stackrel{\triangle}{=} A + (\lambda - \alpha'(0)^i)B, \; i = 1, 2, \ldots, Q, \tag{5.26}$$

то уравнение (5.1) имеет решение вида

$$x(t) = \sum_{i=1}^{Q} x_i(\ln|t|)t^i + t^Q v(t). \tag{5.27}$$

Здесь коэффициенты $x_i(\ln|t|)$ определяются единственным образом, если $\lambda = 0$ является регулярной точкой всех операторов $\tilde{C}(i), i = 1, \ldots, Q$. Если $\lambda = 0$ - регулярная точка операторов $\tilde{C}(i), i = 1, \ldots, j-1, j \le Q$, и изолированная фредгольмова точка оператора $\tilde{C}(j)$, то коэффициенты $x_1, \ldots, x_{j-1}$ определятся единственным образом, а последующие коэффициенты $x_j(\ln|t|), \ldots, x_Q(\ln|t|)$ будут полиномами аргумента $\ln|t|$, зависящими от свободных параметров. Функция $V(t)$, входящая в решение (5.27), определится методом последовательных приближений и удовлетворяет оценке $\|V\| = o(1)$ при $t \to 0$.

6. Заключение.

Метод, изложенный в этой работе, позволяет доказывать теоремы существования и строить параметрические семества вещественных решений уравнения (1.1) в виде

$$x(t) = t^{\frac{r}{s}}(z_0 + \sum_{i=1}^{Q} x_i(\ln|t|)t^{\frac{i}{s}} + o(|t|^{\frac{Q}{s}})). \tag{6.1}$$

Метод может быть применен для построения теории разветвляющихся решений более общих операторно функциональных уравнений Вольтерра, вида (2.10). Некоторые результаты в этом направлении есть в работах [4],[7]. Кроме того, данная методика позволяет изучить решения операторно-функциональных уравнений с ФВА нейтрального типа и в случае возмущений нескольких аргументов [14].

Список литературы

1. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. — М:, 1986.
2. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решенийнелинейных уравнений. — М:Наука, 1969.
3. *Логинов Б.В.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой симметрии. — Ташкент:ФАН, 1985.
4. *Сидоров Н.А., Сидоров Д.Н., Труфанов А.В.* Построение обобщенных решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений // Вестник МАГУ Математика . — 2005., № 8. — С. 123–138.
5. *Сидоров Н.А., Труфанов А.В.* Структура решений линейных операторных уравнений с функциональным возмущением аргумента // Труды Средневолжского Математического общества. — 2006. — Т. 1, № 8. — С. 104–109.
6. *Сидоров Н.А.* Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления.- Иркутск: Изд-во ИГУ, 1982г. - Гл.4.
7. *N.A. Sidorov, D.N. Sidorov, A.V. Trufanov.* Generalized solutions of nonluinear integral-functional equations // Nonlinear boundary problems, 16, 2006, p.96-106.
8. *Nikolay Sidorov, Boris Loginov and others* Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. - Kluwer Academic Publishers. - Dordrecht/Boston/London .- 2002, p.547.
9. *Smajdor W.* Local analytic solutions of functional equations // Annal Polon. math. - 1967, vol.19, №1, p.37-45.
10. *Smajdor W.* Local analytic solutions of functional equations // Annal Polon. math. - 1970, vol.24, p.39-43.
11. *Baron K., Ger R., Matkowski J.* Analytic solutions of a system of functional equations // Publs. math. - 1975, vol.22, №3-4, p.189-194.
12. *Труфанов А.В.* Квазилинейные операторные уравнения с функциональными возмущениями нейтрального типа // Вестник Самарского гос. тех. ун-та. — 2007. — № 2 (6). — С. 104–109.

13. *Труфанов А.В.* Нелинейные операторные уравнения с функциональным возмущением аргумента // Известия Иркутского гос. ун-та: серия Математика. — 2007. — т.1, — С. 308–321.
14. *Труфанов А.В., Бровко О.В.* Линейные операторные уравнения двух переменных с функциональными возмущениеми аргументов // Труды III межвузовской зональной конференции, посвященной памяти проф. Б.А.Бельтюкова. — Иркутск, 2007, — С. 72–74.
15. *Апарцин А.С.* Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы.- Новосибирск: Наука. Сибирская издательсткая фирма РАН. — 1999. 193с.