ИМЭИ ИГУ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Гражданцева Е.Ю., Дамешек Л.Ю.

В пособии излагается основной теоретический материал по теме: Неопределенный интеграл. Приводятся примеры, иллюстрирующие применение описанных методов интегрирования.

Пособие предназначено для студентов нематематических специальностей университета.

2010

СОДЕРЖАНИЕ

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

I. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

1. ПОНЯТИЕ ПОРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА.

1.1. Первообразная и неопределенный интеграл.

Задача определения закона движения материальной точки, если известна скорость прямолинейного движения этой точки $v = v(t)$ является обратной к задаче определения скорости материальной точки при известном законе $s = s(t)$ прямолинейного движения этой материальной точки. Поскольку скорость $v = v(t)$ материальной точки определяется как производная по времени от закона движения: $v = s'(t)$, то естественно законом движения материальной точки при известной скорости ее движения будет такая функция , для которой $s'(t) = v$.

Определение. *Функция $F(x)$ называется **первообразной** функцией для данной функции $f(x)$ на заданном промежутке, если на нем $F'(x) = f(t)$.*

Пример 1.1. $F(x) = x^3$ – первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ для любых *x*, так как $(x^3)' = 3x^2$.

Пример 1.2. $F(x) = \frac{1}{3}\cos 3x$ – первообразная для функции $f(x) = \sin 3x$ для любых x.

Пример 1.3. $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ – первообразная для функции

$f(x) = \arcsin x$ для любых $x \in [-1;1]$.

Теорема. *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *– первообразные для функции* $f(x)$ *в некотором промежутке* X *, то найдется такое число С, что* $F_2(x) - F_1(x) = C$

Доказательство. Пусть $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ для любых $x \in X$. Так как $\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = f(x) - f(x) = 0 = C'$, то $F_1(x) - F_2(x) = C$.

Замечание. Операция нахождения первообразной неоднозначна и возможна с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

Определение. *Выражение* $F(x) + C$*, где* $F(x)$ *– первообразная функции* $f(x)$*,* C *– некоторая постоянная, называется* ***неопределенным интегралом*** *от* $f(x)$ *и обозначается* $\int f(x)dx$*; то есть* $\int f(x)dx = F(x) + C$*, если* $F'(x) = f(x)$*,* C *– некоторая постоянная.*

Здесь

$\int$ – знак интеграла, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение , $f(x)$ – подынтегральная функция, x – переменная интегрирования.

Теорема. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$*, то на нем существует первообразная для* $f(x)$.

1.2. *Свойства неопределенного интеграла.*

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$,
3. $\int F'(x)dx = F(x) + C$ или $\int d\left(F(x)\right) = F(x) + C$,
4. $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx, \quad A \in R$,
5. $\int \left(f(x) + g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

1.3. Таблица основных интегралов.

2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1,$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,\ x \neq 0,$

4. $\int a^{nx} dx = \frac{1}{n} \cdot \frac{a^{nx}}{\ln a} + C,\ a > 0,\ a \neq 1,$

5. $\int e^{nx} dx = \frac{1}{n} \cdot e^{nx} + C,$

6. $\int \sin ax\, dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax + C,$

7. $\int \cos ax\, dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax + C,$

8. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a} \cdot tg\, ax + C,\ x \neq \frac{p}{2} + pn,$

9. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a} \cdot ctg\, ax + C,\ x \neq pn,$

10. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} \cdot arctg \frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a} \cdot arcctg \frac{x}{a} + C, \end{cases}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C,\ |x| < a, \\ -\arccos \frac{x}{a} + C,\ |x| < a, \end{cases}$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C,\ |x| > a,$

13. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ |x| \neq a,$

14. $\int sh\, ax\, dx = \frac{1}{a} \cdot ch\, ax + C,$

15. $\int ch\, ax\, dx = \frac{1}{a} \cdot sh\, ax + C,$

16. $\int \frac{dx}{ch^2 ax} = \frac{1}{a} \cdot th\, ax + C$,

17. $\int \frac{dx}{sh^2 ax} = -\frac{1}{a} \cdot cth\, ax + C$.

2. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ.

2.1. *Интегрирование с использованием основных формул (табличное интегрирование).*

В простейшем случае, когда заданный интеграл представляет одну из формул интегрирования, задача нахождения интеграла сводится к простому применению соответствующей формулы.

Пример. 2.1. Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x}\, dx$.

Решение. Так как $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, то, применяя формулу 1 при $n = \frac{1}{3}$, получим

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C.$$

Пример 2.2. Найти интеграл $\int 5^x\, dx$.

Решение. По формуле при $a = 5,\ n = 1$ получаем

$$\int 5^x\, dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

Пример 2.3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{9 + x^2}$.

Решение. Применяя формулу 9 при $a = 3$ получим

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{3} arctg \frac{x}{3} + C.$$

Пример 2.4. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. По формуле 10 при $a = 2$ получаем $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$.

Пример 2.5. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

Решение. Используя формулу 11 при $a = 5$ получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+5}\right| + C.$$

Пример 2.6. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

Решение. По формуле 12 при $a = 2$ получаем

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{4} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

Пример 2.7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x}}$.

Решение. Поскольку $\frac{1}{\sqrt{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{3}} x^{-\frac{1}{2}}$, то, применяя формулу 1 при $n = -\frac{1}{2}$ и линейные свойства интеграла, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x}} = \int \frac{1}{\sqrt{3}} x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{x} + C.$$

2.2. *Интегрирование при помощи тождественных преобразований подынтегральной функции*.

Этот способ заключается в следующем: используя простейшие тождественные преобразования подынтегральной функции и свойства интегралов прежний интеграл преобразуется в табличный интеграл (или в линейную комбинацию табличных интегралов).

Пример 2.8. Найти $\int (5x^4 - 3x^2 + 1)dx$.

Решение:

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 1)dx = \int 5x^4 dx - \int 3x^2 dx + \int 1dx = 5\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int dx =$$

$$= 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x + C = x^5 - x^3 + x + C.$$

Пример 2.9. Найти $\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx$.

Решение:

$$\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx = \int \left(x^4 - x^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx = \int x^4 dx - \int x^3 dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$$

Пример 2.10. Найти $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^2 dx$.

Решение:

$$\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}\right)^2 dx = \int \left(x - 2\sqrt{x}\sqrt[3]{x} + \left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right) dx = \int \left(x - 2x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}} \right) dx =$$

$$= \int x\, dx - 2\int x^{\frac{5}{6}} dx + \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{12}{11} \cdot x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + C.$$

Пример 2.11. Найти $\int \frac{x^2+6}{x^2+4}dx$.

Решение:

$$\int \frac{x^2+6}{x^2+4}dx = \int \frac{x^2+4+2}{x^2+4}dx = \int\left(1+\frac{2}{x^2+4}\right)dx = \int dx + 2\int \frac{dx}{x^2+4} = x + arctg\frac{x}{2} + C.$$

2.3. *Интегрирование заменой переменной (или метод подстановки).*

Теорема. *Пусть функция* $x = j(t)$ *имеет непрерывную производную* $j'(t)$ *и обратную функцию* $t = y(x)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int f(x)\,dx = \int f[j(t)]j'(t)\,dt.$$

Доказательство. Для доказательства найдем производные обеих частей равенства $\int f(x)\,dx = \int f[j(t)]j'(t)\,dt$.

Производная левого интеграла равна

$$\left(\int f(x)\,dx\right)_x' = f(x).$$

Производную правого интеграла найдем по правилу дифференцирования сложной функции с промежуточным аргументом t. Учитывая, что производная обратной функции равна

$$t_x' = \frac{1}{x_t'} = \frac{1}{j'(t)}, \text{ где } j'(t) \neq 0,$$

получим

$$\left(\int f([j(t)]j'(t)\,dt\right)_x' = \left(\int f([j(t)]j'(t)\,dt\right)_t' \cdot t_x' = f[j(t)]j'(t)\frac{1}{j'(t)} = f[j(t)] = f(x).$$

Так как производные левой и правой частей равенства $\int f(x)\,dx = \int f[j(t)]j'(t)\,dt$ равны, то интегралы $\int f(x)\,dx$ и $\int f[j(t)]j'(t)\,dt$ определяют одно и то же множество первообразных. Следовательно равенство $\int f(x)\,dx = \int f[j(t)]j'(t)\,dt$ справедливо.

Замечание. *Функцию $j(t)$ на практике выбирают так, чтобы интеграл в правой части равенства $\int f(x)\,dx = \int f[j(t)]j'(t)\,dt$ оказался более простым в сравнении с интегралом в левой части этого равенства.*

Пример 2.12. Найти интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. Произведем следующую замену переменной интегрирования: положим $x = t^2$. Тогда $\sqrt{x} = t$, $dx = d(t^2) = (t^2)' \cdot dt = 2t\,dt$ и интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int \frac{e^t}{t}2t\,dt = \int 2e^t dt = 2\int e^t dt = 2e^t + C.$$

Так как $\sqrt{x} = t$ (это следует из замены переменной), то. Возвращаясь к переменной x, получим $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$.

Пример 2.13. Найти интеграл $\int \sqrt{x+3}\,dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{x+3}\,dx = \left\{\begin{matrix} \textit{замена переменной}:\ x+3=t. \\ \textit{тогда}\ \ x=t-3,\ dx=(t-3)'dt=dt \end{matrix}\right\} = \int \sqrt{t}dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C =$$

$$= \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + C.$$

Пример 2.14. Найти интеграл $\int \frac{\ln^3 x}{x}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}dx = \left\{\begin{matrix} \textit{замена переменной}:\ \ln x = t. \\ \textit{тогда}\ x=e^t.\ dx=e^t dt. \end{matrix}\right\} = \int \frac{t^3}{e^t}e^t dt = \int t^3 dt = \frac{1}{4}t^4 + C =$$

$$=\frac{1}{4}\ln x+C.$$

2.4. *Интегрирование по частям.*

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, будем иметь

$$[u(x)v(x)]'=u(x)'v(x)+u(x)v'(x).$$

Это равенство показывает, что произведение данных функций $u(x)v(x)$ является первообразной для суммы $u(x)'v(x)+u(x)v'(x)$ и, следовательно,

$$\int[u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx=u(x)v(x)+C.$$

Отсюда, используя линейное свойство интеграла, получим

$$\int u(x)v'(x)\,dx=u(x)v(x)-\int u'(x)v(x)\,dx+C.$$

Так как по определению дифференциала

$$v'(x)\,dx=dv,\ u'(x)\,dx=du,$$

то полученное равенство можно записать короче

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du+C,$$

или

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du,$$

считая, что постоянная C включена в один из неопределенных интегралов.

При применении формулы интегрирования по частям

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$$

подынтегральное выражение $f(x)\,dx$ разбивают на два множителя (две части) u и dv из которых находят недостающие части формулы ,а именно, из u находится du, а из dv находится v. Разбиение подынтегрального выражения на две части производится таким образом, чтобы полученный интеграл $\int v\,du$ оказался проще первоначального $\int u\,dv$.

Пример 2.15. Найти интеграл $\int \ln x\,dx$.

Решение. Разобьем подынтегральное выражение $\ln x\,dx$ на две части следующим образом: $u=\ln x$, $dv=dx$. Тогда $du=(\ln x)'dx=\dfrac{dx}{x}$, а $v=x$ (как первообразная для функции v, находящейся под знаком дифференциала в выражении dv). Далее, используя формулу дифференцирования по частям, получим

$$\int \ln x\,dx = x\ln x-\int x\cdot\frac{dx}{x}=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C.$$

Пример 2.16. Найти интеграл $\int xe^x dx$.

Решение. Разобьем подынтегральное выражение на части: $u=x$, $dv=e^x dx$. Тогда $du=dx$, $v=e^x$. Затем, используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int xe^x dx = xe^x-\int e^x dx = xe^x-e^x+C.$$

Пример 2.17. Найти интеграл $\int arctg\,x\,dx$.

Решение. Разобьем подынтегральное выражение на части: $u=arctg\,x$, $dv=dx$. Тогда $du=\dfrac{1}{1+x^2}dx$, $v=x$. Следовательно, согласно формуле интегрирования по частям,

$$\int arctg\,x\,dx = arctg\,x\cdot x-\int x\frac{1}{1+x^2}dx.$$

Получившийся интеграл $\int x\dfrac{1}{1+x^2}dx$ найдем методом подстановки (при помощи замены переменной интегрирования):

$$\int x\frac{1}{1+x^2}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{замена}:\ x^2+1=t.\\ \text{тогда}\ \ x=\sqrt{t-1},\ dx=\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}dt.\end{array}\right\}=\int\sqrt{t-1}\cdot\frac{1}{t}\cdot\frac{1}{2\sqrt{t-1}}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{2}\ln t+C=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C.$$

Таким образом $\int arctg\,x\,dx=arctg\,x\cdot x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$.

Пример 2.18. Найти интеграл $\int x^2\cos x\,dx$.

Решение. Проинтегрируем по частям.

$$\int x^2\cos x\,dx=\left\{\begin{matrix}\text{по частям:}\\ u=x^2\Rightarrow du=2x\,dx,\\ dv=\cos x\,dx\Rightarrow v=\sin x\end{matrix}\right\}=x^2\sin x-\int\sin x\cdot 2x\,dx.$$

Получившийся интеграл найдем интегрированием по частям.

$$\int\sin x\cdot 2x\,dx=\int 2x\sin x\,dx=\left\{\begin{matrix}\text{по частям:}\\ u=2x\Rightarrow du=2dx,\\ dv=\sin x\,dx\Rightarrow v=-\cos x\end{matrix}\right\}=-2x\cos x+\int 2\cos x\,dx=$$

$$=-2x\cos x+2\sin x+C.$$

Следовательно

$$\int x^2\cos x\,dx=x^2\sin x-\left(-2x\cos x+2\sin x+C\right)=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C.$$

Пример 2.19. Найти интеграл $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

Решение.

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\left\{\begin{matrix}\text{по частям:}\\ u=e^{2x}\Rightarrow du=2e^{2x}dx,\\ dv=\sin 3x\,dx\Rightarrow v=-\frac{1}{3}\cos 3x.\end{matrix}\right\}=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\int\frac{2}{3}e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Получившийся интеграл $\int\frac{2}{3}e^{2x}\cos 3x\,dx$ найдем интегрированием по частям, разбивая на части аналогично разбиению на части исходного интеграла $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

$$\int \frac{2}{3}e^{2x}\cos 3x\,dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{по частям}: \\ u = \frac{2}{3}e^{2x} \Rightarrow du = \frac{4}{3}e^{2x}dx, \\ dv = \cos 3x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}\sin 3x. \end{array}\right\} = \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{4}{9}e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Таким образом получим

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{4}{9}e^{2x}\sin 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Далее, решая полученное уравнение

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$$

относительно неизвестного $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$ получим следующую цепочку равенств

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx + \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x,$$

$$\left(1 + \frac{4}{9}\right)\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x,$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{-3e^{2x}\cos 3x + 2e^{2x}\sin 3x}{9},$$

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{-3e^{2x}\cos 3x + 2e^{2x}\sin 3x}{9}\cdot\frac{9}{13}.$$

Таким образом $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \dfrac{-3e^{2x}\cos 3x + 2e^{2x}\sin 3x}{13}$, или $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \frac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x - 3\cos 3x)$.

Замечание.

1. *В интегралах вида* $\int x^n e^{ax} dx$, $\int x^n \sin(ax)dx$, $\int x^n \cos(ax)dx$ *рекомендуется подынтегральное выражение разбивать на части таким образом, чтобы* $u = x^n$*;*

2. В интегралах вида $\int x^n \ln^k x\,dx$, $\int x^n \arcsin(ax)dx$, $\int x^n \arccos(ax)dx$, $\int x^n \mathrm{arctg}(ax)dx$, $\int x^n \mathrm{arcctg}(ax)dx$ *рекомендуется подынтегральное выражение разбивать на части таким образом, чтобы* $dv = x^n dx$. *(Здесь* a, k, n *– действительные числа.)*

3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ.

3.1. *Понятие рациональной дроби.*

Определение. ***Дробно-рациональной функцией*** *(или* ***рациональной дробью****) называют отношение двух многочленов.*

Определение. *Рациональную дробь называют* ***правильной****, если степень многочлена, находящегося в числителе, меньше степени многочлена, находящегося в знаменателе; Рациональную дробь называют* ***неправильной****, если степень многочлена, находящегося в числителе, больше степени многочлена, находящегося в знаменателе.*

Пример 3.1.

$\frac{3x+2}{x^2}$, $\frac{2}{x}$, $\frac{x+1}{x^6 - x + 8}$ – правильные рациональные дроби;

$\dfrac{x^2}{3x+1}$, $\dfrac{x^3-1}{5x}$, $\dfrac{x+5}{3-x}$ – неправильные рациональные дроби.

Утверждение 1. *Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби (непосредственным делением числителя на знаменатель).*

Пример 3.2. Рассмотрим дробь $\dfrac{x^4-x^3+1}{x^2+x-2}$.

Разделим x^4-x^3+1 на x^2+x-2. Деление будем производить «столбиком»:

$$
\begin{array}{l|l}
\_\,x^4-x^3+1 & \underline{x^2+x-2} \\
\quad \underline{x^4+x^3-2x^2} & x^2-2x+4 \\
\quad \_\,-2x^3+2x^2+1 & \\
\quad\quad \underline{-2x^3-2x^2+2x} & \\
\quad\quad \_\;4x^2-2x+1 & \\
\quad\quad\quad \underline{4x^2+4x-8} & \\
\quad\quad\quad\quad -8x+9 &
\end{array}
$$

В результате деления x^4-x^3+1 на x^2+x-2 получим

$$\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x-2}=x^2-2x+4+\frac{-8x+9}{x^2+x-2}.$$

Определение. *Рациональные дроби следующих типов:*

1) $\dfrac{A}{x-a}$, *2)* $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k=2,\ 3,\ \mathbf{K}$,

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, *4)* $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$, $l=2,\ 3,\ \mathbf{K}$

где A, V, N, a, p, q *– действительные числа,* $x^2 + px + q$ *не имеет действительных корней называют **простейшими** рациональными дробями.*

Теорема. *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь, в которой* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *– многочлены аргумента* x*, и многочлен* $Q(x)$ *представим в виде* $Q(x) = (x-a)^k (x^2 + px + q)^l \quad , k = 0,\ 1,\ 2, \mathbf{K},\ l = 0,\ 1,\ 2, \mathbf{K}$. *Тогда дробь* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *разлагается единственным образом на сумму конечного числа простейших дробей по правилу*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \mathbf{L} + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \mathbf{L} + \frac{M_l x + N_l}{(x^2 + px + q)^l},$$

где $A_1,\ A_2,\ \mathbf{K},\ A_k, M_1,\ M_2,\ \mathbf{K},\ M_l, N_1,\ N_2,\ \mathbf{K},\ N_l$ *– действительные числа, которые можно найти методом неопределенных коэффициентов.*

Замечание. *Эта теорема имеет обобщение на случай представления многочлена* $Q(x)$ *в виде произведения нескольких линейных множителей и нескольких квадратичных множителей со своими степенями.*

Пример3.3. Разложить дробь $\dfrac{2x+1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$ на сумму простейших дробей.

Решение. Разлагаем знаменатель рассматриваемой дроби на множители:

$$x^3 + 2x^2 + 2x = 1 = (x+1)(x^2 + x + 1).$$

Тогда, используя теорему, данная дробь разложится на сумму простейших дробей следующим образом:

$$\frac{2x+1}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{2x+1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Далее используем метод неопределенных коэффициентов для нахождения чисел $A,\ B,\ C$:

1) в получившемся равенстве приведем левую и правую части к общему знаменателю – $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{A(x^2+x+1)+(x+1)Bx+C}{(x+1)(x^2+x+1)}$;
2) для того, чтобы последнее равенство стало тождеством приравниваем числители левой и правой дробей этого равенства. Получаем
$2x+3=A(x^2+x+1)+(x+1)Bx+C$.
После перегруппировки в правой части получим
$2x+3=(A+B)x^2+(A+C+B)x+(A+C)$.
3) Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x, т.е. при x^2, x, x^0 (свободный член), в левой и правой частях тождества, получаем линейную систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $A,\ B,\ C$:
$$\begin{array}{c|l} x^2 & A+B=0 \\ x & A+C+B=2 \\ x^0 & A+C=3 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}1\\1\\1\end{array}}\right\}.$$
4) Решая полученную систему находим $A=1,\ B=-1,\ C=2$.
Таким образом разложение данной дроби $\dfrac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}$ на сумму простейших дробей имеет вид
$$\frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2+x+1}.$$

Пример 3.4. Разложить на сумму простейших дробей дробь $\dfrac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}$.

Решение. Так как $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, то, согласно теореме о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей, получим $\dfrac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}$.

Далее, приводя к общему знаменателю обе части полученного равенства и приравнивая получившиеся после этого числители, получим равенство

$$5x^2-14x+11=Ax^2+(-2A+B)x+(A-B+C).$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента x, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных A, B, C вида

$$\left.\begin{array}{c||l} x^2 & \quad A=5 \\ x & A-2A+B=-14 \\ x^0 & \quad A-B+C=11 \end{array}\right\}.$$

Из полученной системы получаем $A=5$, $B=-4$, $C=2$.

Следовательно разложение данной дроби на сумму простейших дробей примет вид $\dfrac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}=\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{-4}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$.

3.2. *Интегрирование простейших рациональных дробей.*

Как было сказано выше, неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь, можно представить суммой простейших рациональных дробей. Следовательно, неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и простейших рациональных дробей. Поэтому интегрирование неправильной рациональной дроби сводится интегрированию многочлена (что не представляет трудностей) и интегрированию простейших рациональных дробей.

Рассмотрим вопрос об интегрировании простейших рациональных дробей.

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\int \frac{d(x-a)}{x-a} = A\ln|x-a| + C$.

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k}dx = A\int (x-a)^{-k}d(x-a) = A\cdot\frac{1}{-k+1}\cdot(x-a)^{-k+1} + C =$

$$= \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$$

3) Чтобы найти интеграл $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ у квадратного трехчлена в знаменателе выделим полный квадрат двучлена:

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right).$$

Далее сделаем замену следующую переменной интегрирования: $x + \frac{p}{2} = t$.

Тогда $x = t - \frac{p}{2}$, $dx = dt$. Следовательно, учитывая линейные свойства неопределенного интеграла, получим следующую цепочку равенств:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dt = \int \frac{Mt - \frac{Mp}{2} + N}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dt =$$

$$= M\int \frac{t}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dt + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right) + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}} + C =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right) + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C.$$

Пример3.5. Найти интеграл $\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является простейшей рациональной дробью третьего типа, так как степень числителя меньше степени знаменателя и в знаменателе стоит квадратный трехчлен не имеющий действительных корней. Поэтому решаем следующим образом:

- Выделяем полный квадрат в квадратном трехчлене
    - $x^2+4x+6=(x+2)^2+2$;
- делаем подстановку $x+2=t$, тогда $x=t-2$, $dx=dt$;
- находим интеграл

$$\int\frac{2-x}{x^2+4x+6}dx=\int\frac{2-(t-2)}{t^2+2}dt=4\int\frac{dt}{t^2+2}-\int\frac{t}{t^2+2}dt=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{t}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln(t^2+2)+C=\frac{4}{\sqrt{2}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6)+C.$$

4) Чтобы найти интеграл $\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$ $(k>2)$, аналогично выше изложенному, делаем замену переменной интегрирования: $x+\frac{p}{2}=t$.

Тогда получим

$$\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\int\frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dt=\int\frac{Mt-\frac{Mp}{2}+N}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dt=$$

$$=M\int\frac{t}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}=$$

$$=\frac{M}{2(1-k)}\cdot\frac{1}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int\frac{dt}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}.$$

Пример 3.6. Найти интеграл $\int\frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

Решение. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, так как степень числителя меньше степени знаменателя, а квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней, поэтому в квадратном трехчлене выделяем полный квадрат: $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ и делаем подстановку: $x-2=t$ (тогда $x=t+2$, $dx=dt$). Таким образом получим следующую цепочку равенств

$$\int\frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx=\int\frac{t+3}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{t}{(t^2+1)^2}dt+3\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2(t^2+1)}+3\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Найдем интеграл $\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$ следующим образом:

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}=arctg\,t-\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Так как

$$\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+1)^2}=\left\{\begin{array}{l}\textit{по частям}:\\ u=t\Rightarrow du=dt,\\ dv=\dfrac{t\,dt}{(t^2+1)^2}\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{t^2+1}.\end{array}\right\}=\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}arctg\,t+C,$$

то

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=arctg\,t-\left(\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}arctg\,t\right)=\frac{3}{2}arctg\,t-\frac{t}{2(t^2+1)}+C.$$

Следовательно

$$\int\frac{x+1}{x^2-4x+5}dx=-\frac{1}{2(t^2+1)}+3\left(\frac{3}{2}arctg\,t-\frac{t}{2(t^2+1)}\right)=\frac{9}{2}arctg\,t-\frac{1+3t}{2(t^2+1)}+C=$$

$$=\frac{9}{2}arctg\,(x-2)-\frac{3x-5}{2(x^2-4x+5)}+C.$$

4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ.

4.1. *Интегралы вида* $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$, $\int \sin ax \sin bx\, dx$.

Использование тригонометрических формул

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right),$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right),$$

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

дает возможность произведение тригонометрических функций представить в виде суммы. А именно:

А) используя формулу $\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

получим $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)$, следовательно

$$\int \sin ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(a+b)x}{a+b} - \frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right) + C;$$

Б) применяя формулу $\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

имеем $\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right)$, следовательно

$$\int \cos ax \cos bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a+b)x}{a+b} + \frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right) + C;$$

В) согласно формуле

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$$

Получаем, что $\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)$, следовательно

$$\int \sin ax \sin bx\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b} - \frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right).$$

Пример 4.1. Найти интеграл $\int \cos 8x \cos 6x\, dx$.

Решение. Чтобы найти этот интеграл воспользуемся формулой

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right).$$

Тогда

$$\int \cos 8x \cos 6x\, dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos 14x + \cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 14x}{14} + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{28}\sin 14x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

4.2. ***Интегралы вида*** $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$, $n \in N$, $m \in N$.

Для нахождении интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$, где $n \in N$, $m \in N$, целесообразно использовать следующие тригонометрические формулы

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

При решении интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$, где $n \in N$, $m \in N$, возможны несколько случаев.

Случай 1 – число $n \in N$ является нечетным, т.е $n = 2k+1$, $k \in N$. В этом случае $\sin^n x$ представляем в виде произведения, выделяя множитель $\sin x$, то есть

$$\sin^n x = \sin^{2k+1} = \sin^{2k} x \cdot \sin x = \left(\sin^2 x\right)^k \cdot \sin x.$$

Далее, поскольку из формулы $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ следует, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим, окончательно,

$$\sin^n x = \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cdot \sin x.$$

Таким образом

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^m x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^k \cos^m x \sin x\, dx =$$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^m x \sin x\, dx.$$

Поскольку $\sin x\, dx = d(\cos x)$, то, вводя новую переменную интегрирования как $t = \cos x$, получим, что $\sin x\, dx = -dt$, следовательно, после замены переменной интегрирования

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = -\int \left(1 - t^2\right)^k t^m\, dt.$$

В интеграле $\int \left(1 - t^2\right)^k t^m\, dt$ раскрывая скобки в подынтегральной функции получим интеграл от степенных функций, интегрирование которых очевидно.

Случай 2 – число $m \in N$ является нечетным, т.е. $m = 2l + 1$, $l \in N$. В этом случае поступают аналогично первому случаю, а именно,

$\cos^m x$ представляем в виде произведения, выделяя множитель $\cos x$, то есть

$$\cos^m x = \cos^{2l+1} = \cos^{2l} x \cdot \cos x = \left(\cos^2 x\right)^l \cdot \cos x.$$

Далее, поскольку из формулы $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ следует, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получим, окончательно,

$$\cos^m x = \left(1 - \sin^2 x\right)^l \cdot \cos x.$$

Таким образом,

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int \sin^n x \cos^{2l+1} x\, dx = \int \sin^n x \cos^{2l} x \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^n x \left(1 - \sin^2 x\right)^l \cos x\, dx.$$

Поскольку $\cos x\,dx = d(\sin x)$, то, вводя новую переменную интегрирования как $t = \sin x$, получим, что $\cos x\,dx = dt$, следовательно, после замены переменной интегрирования

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = \int t^n \left(1 - t^2\right)^l\,dt\,.$$

Получившийся интеграл $\int t^n \left(1 - t^2\right)^l\,dt$ легко находится.

Случай 3 – числа $n \in N$, $m \in N$ являются нечетными одновременно, т.е. $n = 2k + 1,\ k \in N$, $m = 2l + 1,\ l \in N$.

В этом можно использовать один из рассмотренных выше случаев.

Пример 4.2. Найти интеграл $\int \sin^8 x \cos^5 x\,dx$.

Решение. Поскольку

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x$$

получим

$$\int \sin^8 x \cos^5 x\,dx = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x\,dx\,.$$

Производя замену переменной интегрирования как $t = \sin x$ (следовательно $\cos x\,dx = dt$) получим

$$\int \sin^8 x \cos^5 x\,dx = \int t^8 (1 - t^2)^2\,dt = \int (t^8 - 2t^{10} + t^{12})dt = \frac{t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + C\,.$$

Следовательно, после возврата к переменной x, получим

$$\int \sin^8 x \cos^5 x\,dx = \frac{1}{9}\sin^9 x - \frac{2}{11}\sin^{11} x + \frac{1}{13}\sin^{13} x + C\,.$$

Случай 4 – числа $n \in N$, $m \in N$ являются четными т.е. $n = 2k$, $k \in N$, $m = 2l$, $l \in N$.

Здесь удобно преобразовывать подынтегральную функцию, используя

- при $n \neq m$ формулы

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left(1 - \cos 2x\right),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2x\right),$$

- при $n = m$ формулу

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

В результате применения этих формул

- при $n \neq m$ интеграл приведется к виду

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x\,dx = \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^l\,dx =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^k \left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^l dx = \frac{1}{2^{k+l}} \int (1-\cos 2x)^k (1+\cos 2x)^l\,dx.$$

Возводя биномы $1-\cos 2x$, $1+\cos 2x$ в соответствующие степени и раскрывая скобки, подынтегральная функция примет вид суммы, члены которой содержат четные и нечетные степени $\cos 2x$. Далее, используя линейные свойства неопределенного интеграла, интеграл $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$ преобразуется в сумму рассмотренных выше интегралов;

- при $n = m$ интеграл приведется к виду

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = \int \sin^n x \cos^n x\,dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^n dx = \frac{1}{2^n}\int \sin^n 2x\,dx.$$

Далее, поскольку число $n = 2k$, $k \in N$, получим

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = \frac{1}{2^n}\int \sin^n 2x\,dx = \frac{1}{2^{2k}}\int \sin^{2k} 2x\,dx = \frac{1}{4^k}\int (\sin^2 2x)^k\,dx =$$

$$= \frac{1}{4^k}\int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right)^k dx = \frac{1}{8^n}\int (1-\cos 4x)^k\,dx.$$

Далее, раскрывая в подынтегральной функции скобки и используя линейные свойства интеграла, получим сумму интегралов, каждый из которых будет соответствовать одному из четырех выше рассмотренных случаев.

Пример 4.3. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^2 x\,dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

Пример 4.4. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

Решение.

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx = \int \sin^2 x (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx.$$

Так как

- $\frac{1}{8}\int dx = \frac{1}{8}x + C$;
- $\frac{1}{8}\int \cos 2x\, dx = \frac{1}{16}\sin 2x + C$;
- $\frac{1}{8}\int \cos^2 2x\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{1}{16}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C =$

$$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin 4x + C;$$

- $\frac{1}{8}\int \cos^3 2x\, dx = \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\, dx = \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\, dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (\cos 2x - \sin^2 2x \cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\, dx,$$

поскольку

$$\frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{16}\sin 2x + C,$$

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x\cos 2x\,dx = \left\{ \textit{замена}:\ t=\sin 2x \Rightarrow \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}t \right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{16}\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{48}\sin^3 2x + C,$$

то $$\frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Следовательно

$$\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx = \frac{1}{8}x + \frac{1}{16}\sin 2x - \left(\frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin 4x\right) - \left(\frac{1}{16}\sin 2x - \frac{1}{48}\sin^3 2x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

4.3. *Интегралы вида* $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$*, где* $R(\sin x,\ \cos x)$ *является рациональной функцией аргументов* $\sin x$ *и* $\cos x$.

Интегралы указанного вида приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2} = t$, где $x \in (-p;\ p)$.

(Тригонометрическую подстановку $tg\frac{x}{2} = t$ принято называть ***универсальной тригонометрической подстановкой***.)

Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через t используя подстановку $tg\frac{x}{2} = t$. Получим

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \ \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Из того, что $tg\frac{x}{2} = t$ следует, что

$$x = 2\,arctg\,t,\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Таким образом

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}dt = \int R_1(t)\,dt,$$

Где $R_1(t)$ является рациональной функцией аргумента t.

Пример 4.5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin x}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{\sin x} = \left\{\text{подстановка}:\ tg\frac{x}{2} = t\right\} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}dt = \int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}dt =$$

$$= \int\frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \left\{\text{обратная подстановка}:\ t = tg\frac{x}{2}\right\} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Пример 4.6. Найти интеграл $\int\frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left\{\text{подстановка}:\ tg\frac{x}{2} = t\right\} = \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5}dt =$$

$$= \int\frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t^2+8t+8}{1+t^2}}dt = \int\frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2(t^2+4t+4)}dt = \int\frac{dt}{t^2+4t+4} = \int\frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C.$$

Замечание. *Если в интеграле* $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$*, где* $R(\sin x,\ \cos x)$ *является четной функцией аргументов* $\sin x$ *и* $\cos x$*, т.е. подынтегральная функция* $R(\sin x,\ \cos x)$ *содержит* $\sin x$ *и* $\cos x$ *только в четных степенях, либо* $R(-\sin x,\ -\cos x) = R(\sin x,\ \cos x)$*, то удобно применять подстановку* $tg\,x = t$.

Тогда, если $tg\,x = t$. то

$$x = arctg\,t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

и, следовательно,

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\ \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2} = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ является рациональной функцией аргумента t.

Пример 4.7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x - \cos^2 x}$ является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, следовательно воспользуемся подстановкой $tg\,x = t$. Тогда

$$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}},\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

И получаем следующую цепочку равенств

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 - 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{tg\, x+1-\sqrt{2}}{tg\, x+1+\sqrt{2}}\right| + C.$$

4.4. *Интегралы вида* $\int R(\sin x)\cos x\, dx$*, где* $R(\sin x)$ *является рациональной функцией аргумента* $\sin x$.

Интегралы этого вида при использовании подстановки $\sin x = t$ приводятся к интегралам вида $\int R(t)\, dt$, где $R(t)$ – рациональная функция аргумента t.

Пример 4.8. Найти интеграл $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx$.

Решение.

$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx = \{\text{подстановка}: \sin x = t \Rightarrow \cos x\, dx = dt\} = \int \frac{dt}{4+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2} arctg \frac{t}{2} + C = \frac{1}{2} arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C.$$

4.5. *Интегралы вида* $\int R(\cos x)\sin x\, dx$.

Интегралы данного вида приводятся к интегралам вида $\int R(t)\,dt$, где $R(t)$ – рациональная функция аргумента , при использовании подстановки $\cos x = t$.

Пример 4.9. Найти интеграл $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$.

Решение.

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = \{\cos x = t \;\Rightarrow\; \sin x\,dx = -dt\} = -\int \frac{dt}{2+t} = -\ln|2+t| + C =$$

$$= -\ln|2+\cos x| + C.$$

Замечание. *Если в интеграле* $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$, *где* $R(\sin x,\ \cos x)$ *является рациональной функцией аргументов* $\sin x$ *и* $\cos x$, *подынтегральная функция* $R(\sin x,\ \cos x)$ *содержит* $\sin x$ *и* $\cos x$ *только в четных степенях, то удобно применять подстановку* $tg\, x = t$.

4.6. *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, *где* $m \in N,\ n \in N$.

Подстановкой $tg\, x = t$ данный интеграл приводится к интегралу от рациональной функции следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \int \left(1+\frac{1}{t^2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1+t^2\right)^{\frac{n-2}{2}} dt.$$

В частности, к интегралу вида $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, где $m \in N$, $n \in N$ сводятся следующие интегралы:

- интеграл вида $\int \frac{dx}{\sin^m x}$, используя прежде подстановку $\frac{x}{2} = t$, т.е.

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \left\{ \frac{x}{2} = t \right\} = \frac{1}{2^{m-1}} \int \frac{dt}{\sin^m t \cos^m t};$$

- интеграл вида $\int \frac{dx}{\cos^n x}$, используя прежде подстановку $x + \frac{p}{2} = t$ и формулу $\cos x = \sin\left(x + \frac{p}{2}\right)$, получим

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{dt}{\sin^n t}.$$

Надлежащие преобразования получившегося интеграла описаны выше.

5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ.

5.1. Интегралы с линейной иррациональностью.

Если подынтегральная функция содержит только линейные иррациональности вида $(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}$, $(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}$, …, где $a \in R$, $a \neq 0$, $b \in R$, m_1, n_1, m_2, n_2 –целые числа, то полезна подстановка $(ax+b) = t^s$, где s – наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2. … . С помощью такой подстановки интеграл с линейной иррациональностью преобразуется в интеграл от рациональной функции.

Пример 5.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

Решение. Здесь подынтегральная функция содержит линейные иррациональности $(2x+b)^{\frac{2}{3}}$ и $(2x+b)^{\frac{1}{2}}$. Следовательно $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, а наименьшее общее кратное этих чисел $s = 6$.

Применим подстановку $2x+1=t^6$. Тогда $x=\frac{1}{2}(t^6-1)$, $dx=3t^5dt$.

Таким образом, после замены переменной интегрирования получим

$$\int\frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=\int\frac{3t^5}{t^4-t^3}dt=\int\frac{3t^5}{t^3(t-1)}dt=\int\frac{3t^2}{t-1}dt=3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt=$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C=3\left(\frac{(2x+1)^{\frac{1}{3}}}{2}+(2x+1)^{\frac{1}{6}}+\ln\left|(2x+1)^{\frac{1}{6}}-1\right|\right)+C.$$

5.2. *Интегралы с квадратичной иррациональностью.*

- *Интегралы вида* $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, *где* a, b, c *– действительные числа.*

Интегралы такого вида путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена, в зависимости от знака числа a, приводятся к одному из табличных интегралов.

Пример 5.2. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

Решение. В квадратном трехчлене x^2+2x+5 выделим полный квадрат: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Тогда

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}=\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}}=\{\textit{замена}\ \ x+1=t\ \Rightarrow\ x=t-1,\ dx=dt\}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+4}}=\ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C=\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

Пример 5.3. Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

Решение. Выделяя в полный квадрат в квадратном трехчлене $-3x^2+4x-1$ получим

$$-3x^2+4x-1=-3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=-3\left(\left(x^2-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)=3\left(\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right).$$

Следовательно

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=$$

$$=\left\{\text{замена}:\ x-\frac{2}{3}=t\ \Rightarrow x=t+\frac{2}{3},\ dx=dt\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{9}-t^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin(3t)+C=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C.$$

- *Интегралы вида* $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, *где* A, B, a, b, c *– действительные числа.*

Чтобы найти такой интеграл надо в числителе выделить производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и почленным делением разложить на сумму двух интегралов, один из которых элементарными преобразованиями приводится к табличному интегралу , а другой интегралом вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, который рассмотрен выше.

Пример 5.4. Найти интеграл $\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$.

Решение. Найдем производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня:

$$(2x^2+8x+1)'=4x+8.$$

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена:

$$5x-3=\frac{5}{4}(4x+8)-13.$$

Таким образом, после преобразования числителя и почленного деления, получим следующую цепочку равенств:

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx - 13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}.$$

Найдем каждое слагаемое правого выражения этого равенства.

Первое слагаемое:

$$\frac{5}{4}\int \frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \left\{2x^2+8x+1=t \Rightarrow (4x+8)dx = dt\right\} = \frac{5}{4}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= \frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{t} + C = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} + C,$$

Второе слагаемое:

$$13\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}} = 13\int \frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2+4x+\frac{1}{2}\right)}} = \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}} = \{x+2=t \Rightarrow x=t-2,\ dx=dt\} = \frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}} =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}\right| + C = \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C.$$

Следовательно

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C.$$

- *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, *где* A, B, a, b, c *– действительные числа,* $A \neq 0$.

Используя подстановку $Ax+B=\frac{1}{t}$, этот интеграл приводится к рассмотренному выше интегралу вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где a, b, c – действительные числа.

Пример 5.5. Найти интеграл $\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}=\left\{x=\frac{1}{t}\Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,\ t=\frac{1}{x}\right\}=\int\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}}=$$

$$=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}}=\int\frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+6}}=\ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right|+C=\ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right|+C.$$

Пример 5.6. Найти интеграл $\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$.

Решение.

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}=\left\{x+1=\frac{1}{t}\Rightarrow x=\frac{1}{t}-1,\ dx=-\frac{1}{t^2},\ t=\frac{1}{x+1}\right\}=$$

$$=\int\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2+3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}}dt=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}=\ln\left|t+\frac{1}{2}+\sqrt{t^2+t+1}\right|+C=$$

$$=\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}+1}\right|+C=\ln\left|\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right|+C.$$

- *Интегралы вида* $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, *где* a, b, c *– действительные числа,* $a\neq 0$.

Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и применением линейной подстановки интеграл $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ примет один из следующих видов:

1) при $a>0$ получим интеграл вида $\int\sqrt{t^2+M}\,dt$, где $M\in R$;

2) при $a<0$ получим интеграл вида $\int\sqrt{M-t^2}\,dt$, где $M\in R$.

Чтобы найти такие интегралы, сначала подынтегральную функцию представляют в виде дроби, в которой знаменателем является иррациональность, а числителем – выражение, стоящее под знаком корня. Затем в преобразованной подынтегральной функции производят почленное деление, и таким образом исходный интеграл ($\int\sqrt{t^2+M}\,dt$ или $\int\sqrt{M-t^2}\,dt$) преобразуют в сумму двух интегралов, один из которых является табличным, а другой интеграл находится интегрированием по частям один раз. После этого, выражая из полученного равенства исходный интеграл ($\int\sqrt{t^2+M}\,dt$ или $\int\sqrt{M-t^2}\,dt$), получим окончательный ответ.

Пример 5.7. Найти интеграл $\int\sqrt{x^2+5}\,dx$.

Решение.

$$\int\sqrt{x^2+5}\,dx=\int\frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+5}}dx=\int\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}+\frac{5}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx=\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}dx+5\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}.$$

Так как

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{\textit{по частям}}:\\ u=x\ \Rightarrow\ du=dx,\\ dv=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}}\ \Rightarrow\ v=\sqrt{x^2+5}\end{array}\right\}=x\sqrt{x^2+5}-\int\sqrt{x^2+5}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + C,$$

то

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = x\sqrt{x^2+5} - \int \sqrt{x^2+5}\,dx + 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + C.$$

Далее, выражая из полученного равенства $\int \sqrt{x^2+5}\,dx$, получим ответ:

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+5} + 5\ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right|\right) + C.$$

Пример 5.8. Найти интеграл $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 9\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx.$$

Поскольку

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C;$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{по частям}: \\ u = x \;\Rightarrow\; du = dx, \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} \;\Rightarrow\; v = -\sqrt{9-x^2} \end{array}\right\} = -x\sqrt{9-x^2} + \int \sqrt{9-x^2}\,dx,$$

то

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\arcsin\frac{x}{3} - \left(-x\sqrt{9-x^2} + \int \sqrt{9-x^2}\,dx\right) + C.$$

Следовательно

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3}+x\sqrt{9-x^2}\right)+C.$$

- *Тригонометрические подстановки.*

Интегралы с квадратичными иррациональностями вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ приводятся интегралам от рациональной относительно $\sin x$ и $\cos x$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки:

1) для иррациональности $\sqrt{a^2-x^2}$ удобна подстановка $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$),
2) для иррациональности $\sqrt{a^2+x^2}$ удобна подстановка $x=a\,tg\,t$ (или $x=a\,ctg\,t$),
3) для иррациональности $\sqrt{x^2-a^2}$ удобна подстановка $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (или $x=\dfrac{a}{\cos t}$).

Пример 5. 9. Найти интеграл $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$.

Решение.

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\left\{x=3\sin t\ \Rightarrow\ dx=3\cos t\,dt,\ t=\arcsin\frac{x}{3}\right\}=$$

$$=3\int\sqrt{9-9\sin^2 t}\cos t\,dt=9\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=9\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C=\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\sin t\cos t+C=$$

$$=\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3}+x\sqrt{9-x^2}\right)+C.$$

Пример 5.10. Найти интеграл $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

Решение.

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}=\left\{x=\frac{2}{\sin t}\ \Rightarrow dx=-\frac{2\cos t}{\sin^2 t}dt,\ t=\arcsin\frac{2}{x}\right\}=$$

$$=-\int\frac{\frac{4}{\sin^2 t}\cdot\frac{2\cos t}{\sin^2 t}}{\sqrt{\frac{4}{\sin^2 t}-4}}dt=-4\int\frac{\cos t}{\sin^3 t\sqrt{1-\sin^2 t}}dt=-4\int\frac{\cos t}{\sin^3 t\cos t}dt=$$

$$=-4\int\frac{dt}{\sin^3 t}=-4\int\frac{dt}{8\sin^3\frac{t}{2}\cos^3\frac{t}{2}}=\left\{tg\frac{t}{2}=u\ \Rightarrow\ t=2arctg\,u,\ dt=\frac{2du}{1+u^2}\right\}=$$

$$=-4\int\left(1+\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+u^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2du}{1+u^2}=-8\int\frac{(1+u^2)^3}{u^3(1+u^2)}du=-8\int\frac{(1+u^2)^2}{u^3}du=$$

$$=-8\int\left(\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u}+u\right)du=-8\left(-\frac{1}{2u^2}+2\ln|u|+\frac{u^2}{2}\right)+C.$$

Далее, постепенно возвращаясь к старой переменной интегрирования путем обратных подстановок, получим

$$\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}+2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right|+C.$$

6. **Интегралы от дифференциальных биномов.**

Интегралы от дифференциальных биномов $\int x^m(a+bx^n)^p\,dx$, где $m,\ n,$ p – рациональные числа, выражаются через элементарные функции только в трех случаях: когда p – целое число; когда $\frac{m+1}{n}$ – целое число, когда $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число. В каждом из этих случаев удобно применять свою подстановку:

1) если p – целое число, то подстановка $x=t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то подстановка $a+bx^n=t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, то подстановка $\frac{a}{x^n}+b=t^r$, где r – знаменатель дроби p.

Пример 6.1. Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$,

Решение. $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$.

Здесь $m=-4$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=1$.

Поскольку $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2$ – целое число, то применяем подстановку вида $\frac{a}{x^n}+b=t^r$, где где r – знаменатель дроби p.

Так как $m=-4$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=1$, $r=2$, то, окончательно, получим подстановку $\frac{1}{x^2}+1=t^2$. Следовательно, применяя данную подстановку, получим

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2}+1=t^2 \ \Rightarrow \ x^2=(t^2-1)^{-1}, \ x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}, \ dx=-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}t\,dt \\ t=\sqrt{\dfrac{1}{x^2}+1}=\sqrt{\dfrac{1+x^2}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}. \end{array} \right\} =$$

$$= \int \frac{-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}t\,dt}{(t^2-1)^{-2}\sqrt{1+(t^2-1)^{-1}}} = -\int \frac{(t^2-1)^2 t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\dfrac{1}{(t^2-1)}}}dt = -\int \frac{(t^2-1)^2 t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\dfrac{t^2}{(t^2-1)}}}dt =$$

$$= -\int \frac{(t^2-1)^2 t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\dfrac{t}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}}}dt = -\int (t^2-1)\,dt = -\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C = t-\frac{1}{3}t^3+C =$$

$$= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3 + C = \frac{3x^2\sqrt{1+x^2}-\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{3x^3} + C = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

Пример 6.2. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-10}dx$.

Здесь $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=-10$, $a=1$, $b=1$, следовательно применим подстановку вида $x=t^s$, где s – наименьшее общее кратное знаменателей дробей m и n (т.е. $s=4$), поскольку $p=-10$ – целое число.

Тогда получим следующую цепочку равенств:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \left\{ x=t^4 \ \Rightarrow \ dx=4t^3dt, \ t=x^{\frac{1}{4}} \right\} = \int \frac{4t^3}{t^2(t+1)^{10}}dt =$$

$$=4\int\frac{t}{(t+1)^{10}}dt=4\int\frac{t+1-1}{(t+1)^{10}}dt=4\int\frac{dt}{(t+1)^{9}}-4\int\frac{dt}{(t+1)^{10}}=$$

$$=4\cdot\left(-\frac{1}{8(t+1)^{8}}\right)-4\cdot\left(-\frac{1}{9(t+1)^{9}}\right)+C=-\frac{1}{2(t+1)^{8}}+\frac{4}{9(t+1)^{9}}+C=$$

$$=-\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{8}}+\frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{9}}+C.$$

7. **Примеры для самостоятельного решения.**

Читателю предлагается самостоятельно решить следуюшие примеры (смотри: Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике.: М. 1986.):

1264, 1265, 1267, 1270, 1272, 1273, 1275, 1276, 1281, 1282, 1284, 1286, 1288, 1292, 1297, 1298, 1302, 1305, 1308, 1309, 1311, 1314, 1315, 1322, 1330, 1331, 1332, 1336, 1338, 1339, 1341, 1345, 1346, 1353, 1357, 1358, 1360, 1363, 1368, 1369, 1372, 1371, 1373, 1376, 1379, 1377, 1378, 1380.