УДК 517.983.51
М.В.Фалалеев

Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в условиях секториальности и радиальности

В представляемой заметке исследуются линейные вырожденные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах (т.е. с необратимым оператором при производной). Уравнениями такого типа описываются многочисленные задачи математической физики прикладного характера. В то же время они разрешимы в классе непрерывных функций лишь при определенном соотношении между правыми частями уравнений и начальными условиями. Описать эти соотношения, равно как и вывести формулы для самих (непрерывных) решений, можно либо непосредственно получая эти решения по какой-либо методике, либо (как автор заметки) выстраивая обобщенные решения. В последнем случае обобщенное решение оказывается суммой сингулярной и регулярной составляющих. Условия, при которых обращается в нуль сингулярная составляющая решения и являются условиями разрешимости в классе обычных (непрерывных, но не только) функций, а регулярная составляющая обобщенного решения в этом случае и оказывается искомым (классическим) решением. К настоящему времени при построении обобщенных решений используется по преимуществу две "технологии": первая предполагает непосредственное восстановление обеих частей искомого обобщенного решения [1], но в этом случае о единственности построенного решения можно говорить лишь в "зауженном"классе, определяемом видом решения, второй подход, о котором далее и будет идти речь, предполагает использование конструкции фундаментальной оператор-функции, обобщающей идею фундаментального решения из [2] на уравнения в банаховых пространствах. При этом подходе в полной мере удается решить вопросы как о построении самих обобщенных решений, так и описании (довольно широких) классов единственности построенных решений. В работах [3] и [4] во фредгольмовском случае были построены фундаментальные оператор-функции для ряда дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных операторов в классе обобщенных функций с ограниченным слева носителем. В [5] результаты из [3] и [4] были обобщены на случай спектральной ограниченности [6], в представляемой работе конструкция фундаментальной оператор-функции перенесена на секториальный и радиальный [6, 7] случаи. Изложению публикуемых результатов будут предшествовать необходимые сведения из [6] и [7] в удобных автору обозначениях.

Фундаментальные оператор-функции для секториально ограниченных операторных пучков. Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $B \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ - необратим, A - замкнутый линейный из E_1 в E_2, $\overline{D(A)} \equiv E_1$. Следуя [6] и [7] B-резольвентным множеством оператора A называется множество $\rho^B(A) \equiv \{\mu \in C : (\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2, E_1)\}$, при $\mu \in \rho^B(A)$ операторы $R^B_\mu(A) = (\mu B - A)^{-1}B \in \mathcal{L}(E_1)$, $L^B_\mu(A) = B(\mu B - A)^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$ называются [6, 7] соответственно правой и левой B-резольвентами оператора A. Если же $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \in \rho^B(A)$, то операторы $R^B_{(\mu,p)}(A) \equiv \prod_{q=0}^{p} R^B_{\mu_q}(A)$ и $L^B_{(\mu,p)}(A) \equiv \prod_{q=0}^{p} L^B_{\mu_q}(A)$ называют соответственно правой p-резольвентой и левой p-резольвентой оператора A относительно B (или, короче, правой (B,p)-резольвентой оператора A и левой (B,p)-резольвентой оператора A).

Оператор A называется p-секториальным относительно B [6, 7] с числом $p \in \{0\} \cup N$ (или короче (B,p)-секториальным), если а) $\exists a \in R \; \exists \theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ что сектор

$$S^B_{a,\theta}(A) \equiv \Big\{\mu \in C : \mid arg(\mu - a) \mid < \theta, \; \mu \neq a\Big\} \subset \rho^B(A),$$

б) $\exists K \in R_+$ что $\forall \mu_0, \mu_1, \ldots \mu_p \in S^B_{a,\theta}(A)$

$$\max\Big\{\| R^B_{(\mu,p)}(A) \|_{\mathcal{L}(E_1)}, \| L^B_{(\mu,p)}(A) \|_{\mathcal{L}(E_2)}\Big\} \leq \frac{K}{\prod_{q=0}^p \mid \mu_q - a \mid}.$$

В условиях а) и б) не ограничивая общности [6, 7] можно считать $a = 0$, это принято записывать как $S^B_{a,\theta}(A) \equiv S^B_\theta(A)$.

Если в условии б) при добавлении в $R^B_{(\mu,p)}(A)$ ($L^B_{(\mu,p)}(A)$) еще одного множителя вида $(\lambda B - A)^{-1}A$ ($A(\lambda B - A)^{-1}$), $\lambda \in \rho^B(A)$ константу K уже не удается выбрать не зависящей от аргумента, т.е.

$$\| R^B_{(\mu,p)}(A)(\lambda B - A)^{-1}Ax \|_{E_1} \leq \frac{Const(x)}{\mid \lambda \mid \prod_{q=0}^p \mid \mu_q \mid}$$

$$\left(\| A(\lambda B - A)^{-1}L^B_{(\mu,p)}(A)y \|_{E_2} \leq \frac{Const(y)}{\mid \lambda \mid \prod_{q=0}^p \mid \mu_q \mid}\right),$$

то в этом случае (B,p)-секториальный оператор A принято [6, 7] называть сильно (B,p)-секториальным справа (слева).

Если же в определении сильно (B,p)-секториального слева оператора A дополнительно выполнено условие

$$\| (\lambda B - A)^{-1}L^B_{(\mu,p)}(A)y \|_{\mathcal{L}(E_2)} \leq \frac{C}{\mid \lambda \mid \prod_{q=0}^p \mid \mu_q \mid},$$

$C \in R_+$, λ, $\mu_q \in \rho^B(A)$, то оператор A принято называть [6, 7] просто сильно (B,p)-секториальным.

Отметим [6, 7], что сильно (B,p)-секториальные операторы A являются также и сильно (B,p)-секториальными справа.

В тех же работах [6, 7] доказаны следующие утверждения.

Теорема. [6, 7] *а) Если опреатор A (B,p)-секториален, то оператор-функции*

$$\mathcal{U}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R^B_\mu(A)e^{\mu t}d\mu, \quad \mathcal{F}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma L^B_\mu(A)e^{\mu t}d\mu,$$

являются аналитическими и равномерно ограниченными полугруппами операторов, здесь контур интегрирования $\Gamma \subset S^B_\theta(A)$ такой, что $\mid arg\mu \mid \to \theta$ при $\mid \mu \mid \to +\infty$.

б) Если опреатор A сильно (B,p)-секториален слева (справа), то существуют единицы полугрупп $\mathcal{U}(t)$ и $\mathcal{F}(t)$, т.е. в сильной топологии существуют предельные операторы

$$P = \lim_{t\to 0+}\mathcal{U}(t) \in \mathcal{L}(E_1), \quad Q = \lim_{t\to 0+}\mathcal{F}(t) \in \mathcal{L}(E_2)$$

являющиеся проекторами в E_1 и E_2 соответственно, причем $BP = QB$, $AP = QA$.

в) Проекторы P и Q порождают разложения пространств E_1 и E_2 в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = kerP \oplus imP$, $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = kerQ \oplus imQ$, действия операторов B, A расщепляются, $B_0 : E_1^0 \to E_2^0$, $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ - ограничены, $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$ имеет ограниченный обратный, причем операторы $A_0^{-1}B_0 \in \mathcal{L}(E_1^0)$ и $B_0A_0^{-1} \in \mathcal{L}(E_2^0)$ нильпотентны со степенью нильпотентности не выше числа p. Если A сильно (B,p)-секториален, то $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратим.

Теорема 1. *Если оператор A сильно (B,p)-секториален, то дифференциальный оператор $(B\delta'(t)-A\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ (обобщенных функций с ограниченным слева носителем [2]) фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}(t)=\mathcal{U}(t)B_1^{-1}Q\theta(t)-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t).$$

Доказательство. В соответствии с определением фундаментальной оператор-функции [3, 4] для доказательства необходимо проверить справедливость равенства

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}(t)*u(t)=u(t)$$

$\forall u(t)\in K'_+(E_2)$.

Действительно,

$$\Big(B\delta'(t)-A\delta(t)\Big)*\mathcal{E}(t)*u(t)=\Big(B\mathcal{U}'(t)B_1^{-1}Q\theta(t)+B\mathcal{U}(0)B_1^{-1}Q\delta(t)-$$

$$-\sum_{q=0}^{p}B(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)-A\mathcal{U}(t)B_1^{-1}Q\theta(t)+$$

$$+\sum_{q=0}^{p}A(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t)\Big)*u(t)=$$

$$=\Big(\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma(\mu B-A)(\mu B-A)^{-1}Be^{\mu t}d\mu B_1^{-1}Q\theta(t)+BPB_1^{-1}Q\delta(t)+$$

$$+AA_0^{-1}(I-Q)\delta(t)+\sum_{q=0}^{p-1}(AA_0^{-1}B_0-B)(A_0^{-1}B_0)^qA_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)\Big)*u(t)=$$

$$=Q\delta(t)+(I-Q)\delta(t)=I\delta(t)*u(t)=u(t).$$

Теорема 1 доказана.

Рассмотрим задачу Коши

$$B\dot{x}=Ax+f(t),\ \ x(0)=x_0, \tag{1}$$

в обобщенных функциях [1, 2] эту задачу можно переписать в виде

$$B\dot{\tilde{x}}=A\tilde{x}+f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t)$$

или [3, 4] в сверточном виде

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\tilde{x}=f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t).$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1, то рассматриваемая задача Коши (1) имеет в классе $K'_+(E_1)$ единственное решение вида*

$$\tilde{x}(t)=\mathcal{E}(t)*(f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t)).$$

В развернутом виде представление для $\tilde{x}(t)$ выглядит следующим образом

$$\tilde{x}(t)=\Big[\mathcal{U}(t)Px_0+\int_0^t\mathcal{U}(t-s)B_1^{-1}Qf(s)ds(t)-$$

$$
-\sum_{q=0}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)f^{(q)}(t)\Big]\theta(t)-\sum_{q=0}(A_0^{-1}B_0)^{q+1}\omega\delta^{(q)}(t), \qquad (2)
$$

где

$$
\omega=(I-P)x_0+\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)f^{(q)}(0).
$$

Единственность решения в классе $K'_+(E_1)$ доказывается исходя из тех же соображений что и доказательство соответствующей теоремы в [2] (см. стр.194-195).

Отметим также, что в силу нильпотентности оператора $A_0^{-1}B_0$ порядок сингулярности полученного обобщенного решения не превышает $(p-1)$.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 2 и $\omega=0$, то обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ окажется классическим (непрерывным) построенным в работах [6] и [7].*

Утверждения аналогичные теоремам 1 и 2 можно получить для дифференциально-разностных операторов соответствующих уравнениям вида

$$
B\frac{\partial^N u}{\partial t^N}=A(u(t,\bar{x}-\bar{\mu})-u(t,\bar{x}))+f(t,\bar{x}),
$$

$f(t,\bar{x})$ - быстро убывающая [4] по $\bar{x}\in R^n$ при $\mid\bar{x}\mid\to+\infty$ в R^n.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциально-разностный оператор $(B\delta'(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x})))$ имеет на классе $K'(R_+^1\otimes R^n;E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$
\mathcal{E}_1(t,\bar{x})=B_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1}t)^k}{k!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k+
$$

$$
+\sum_{q=0}^{p}(-A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\bar{x}),
$$

здесь введены обозначения:

$$
(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k=\underbrace{(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))*\ldots*(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))}_{k}=
$$

$$
=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu C_k^\nu\delta(\bar{x}-\nu\bar{\mu}),
$$

$$
\mathcal{B}_{q+1}(\bar{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{q+\nu}^{q}\delta(\bar{x}-\nu\bar{\mu}),\ \ (\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^0=\mathcal{B}_0(\bar{x})=\delta(\bar{x}).
$$

Доказательство. Обобщенные функции $\mathcal{B}_{q+1}(\bar{x})$ удовлетворяют следующим равенствам

$$
(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))*\mathcal{B}_{q+1}(\bar{x})=-\mathcal{B}_q(\bar{x}),\ \ \forall q\in N\cup\{0\},
$$

которые проверяются непосредственно, поэтому если $k>l$, то

$$
(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k*\mathcal{B}_q(\bar{x})=(-1)^q(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^{k-q}.
$$

Проверим справедливость равенства

$$
[B\delta'(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))]*\mathcal{E}_1(t,\bar{x})*u(t,\bar{x})=u(t,\bar{x}).
$$

Действительно

$$[B\delta'(t)\cdot\delta(\bar{x}) - A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))] * \mathcal{E}_1(t,\bar{x}) * u(t,\bar{x}) =$$

$$= \Bigg[BB_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1})^k t^{k-1}}{(k-1)!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k +$$

$$+BB_1^{-1}Q\delta(t)\cdot\delta(\bar{x})+$$

$$+B\sum_{q=0}^{p}(-A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\bar{x})-$$

$$-AB_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1}t)^k}{k!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^{k+1}+$$

$$+A\sum_{q=1}^{p}(-A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q)}(t)\cdot\mathcal{B}_q(\bar{x})+$$

$$+\,AA_0^{-1}(I-Q)\delta(t)\cdot\delta(\bar{x})\Bigg] * u(t,\bar{x}) =$$

$$= \Bigg[A_1B_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1})^k t^k}{k!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^{k+1}+$$

$$+Q\delta(t)\cdot\delta(\bar{x})+B_0\sum_{q=0}^{p-1}(-A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\bar{x})-$$

$$-A_1B_1^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(A_1B_1^{-1}t)^k}{k!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^{k+1}-$$

$$-\,B_0\sum_{q=0}^{p-1}(-A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q+1)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\bar{x})+$$

$$+(I-Q)\delta(t)\cdot\delta(\bar{x})\Bigg] * u(t,\bar{x}) =$$

$$= \Big[Q\delta(t)\cdot\delta(\bar{x})+(I-Q)\delta(t)\cdot\delta(\bar{x})\Big] * u(t,\bar{x}) =$$

$$= I\delta(t)\cdot\delta(\bar{x}) * u(t,\bar{x}) = u(t,\bar{x}).$$

Теорема 3 доказана.

Эта теорема допускает обобщение на дифференциально-разностные операторы высокого порядка.

Теорема 4. *Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциально-разностный оператор* $(B\delta^{(N)}(t)\cdot\delta(\bar{x}) - A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x})))$ *имеет на классе* $K'(R_+^1\otimes R^n;E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(t,\bar{x}) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\frac{t^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}Q\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^{k-1}+$$

$$+\sum_{q=0}^{p}(-A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(q\cdot N)}(t)\cdot\mathcal{B}_{q+1}(\bar{x}).$$

Если для пары операторов A и B выполнены условия теоремы 1, то обобщенное решение задачи Коши

$$B\frac{\partial u}{\partial t} = A(u(t,\bar{x}-\bar{\mu}) - u(t,\bar{x})) + f(t,\bar{x}),$$

$$u(0,\bar{x}) = u_0(\bar{x}),$$

где $u_0(\bar{x})$ и $f(t,\bar{x})$ быстро убывающие [4] по $\bar{x} \in R^n$ при $\mid \bar{x} \mid \to +\infty$, $u_0(\bar{x}) \in D(B)$, представимо в виде

$$\tilde{u}(t,\bar{x}) = \mathcal{E}_1(t,\bar{x}) * (Bu_0(\bar{x})\delta(t) + f(t,\bar{x})\theta(t)).$$

Из этого представления можно получить утверждения о непрерывных решениях такой задачи Коши.

Еще одним типом уравнений, к которым может быть применена предлагаемая здесь методология, является дифференциальное уравнение в частных производных следующего вида

$$B\frac{\partial^{2N}u}{\partial^N x \partial^N y} = Au + f(x,y).$$

Теорема 5. *Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциальный оператор* $(B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y))$ *имеет на классе* $K'_+(R^2;E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_N(x,y) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\cdot\frac{x^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}\cdot\frac{y^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}Q\theta(x,y) -$$

$$-\sum_{q=0}^{\infty}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(qN)}(x)\cdot\delta^{(qN)}(y).$$

Доказательство. Проверим справедливость равенства $\forall u(x,y) \in K'(R^2_+;E_2)$

$$\Big[B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y)\Big] * \mathcal{E}_N(x,y) * u(x,y) = u(x,y).$$

Действительно

$$\Big[B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y)\Big] * \mathcal{E}_N(x,y) * u(x,y) =$$

$$= \Bigg[BB_1^{-1}\sum_{k=2}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\cdot\frac{x^{N\cdot(k-1)-1}}{(N\cdot(k-1)-1)!}\cdot\frac{y^{N\cdot(k-1)-1}}{(N\cdot(k-1)-1)!}Q\theta(x,y) +$$

$$+BB_1^{-1}Q\delta(x,y) -$$

$$-B\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{((q+1)N)}(x)\cdot\delta^{((q+1)N)}(y) -$$

$$-AB_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\cdot\frac{x^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}\cdot\frac{y^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}Q\theta(x,y) +$$

$$+A\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{(qN)}(x)\cdot\delta^{(qN)}(y)\Bigg] * u(x,y) =$$

$$= \left[Q\delta(x,y) + \sum_{q=0}(AA_0^{-1}B_0 - B)(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)\delta^{((q+1)N)}(x)\cdot\delta^{((q+1)N)}(y) + \right.$$

$$\left. +(I-Q)\delta(x,y)\right] * u(x,y) = I\delta(x,y) * u(x,y) = u(x,y).$$

Теорема 5 доказана.

Естественным обобщением теоремы 5 является следующая теорема 6, доказательство которой дословно повторяет все проведенные только что рассуждения, поэтому ограничимся лишь формулировкой

Теорема 6. *Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциальный оператор* $(BD^\alpha\delta(\bar{x}) - A\delta(\bar{x}))$ *имеет на классе* $K'(R_+^m; E_2)$ *фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_\alpha(\bar{x}) = B_1^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}(A_1B_1^{-1})^{k-1}\prod_{i=1}^{m}\frac{x_i^{\alpha_i\cdot k-1}}{(\alpha_i\cdot k-1)!}Q\theta(\bar{x}) -$$

$$-\sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I-Q)D^{q\cdot\alpha}\delta(\bar{x}),$$

здесь

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+\cdots+\alpha_m}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_m^{\alpha_m}}, \quad D^{q\cdot\alpha}\delta(\bar{x}) = \delta^{q\cdot\alpha_1}(x_1)\cdot\ldots\cdot\delta^{q\cdot\alpha_m}(x_m).$$

Если выполнены условия теоремы 1, функция $f(x,y)\in C(R_+^2)$ и принимает значения в E_2, то краевая задача

$$B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = Au + f(x,y), \quad u|_{x=0} = \alpha(y),\ u|_{y=0} = \beta(x),$$

имеет обобщенное решение вида

$$u = \mathcal{E}_1(x,y) * (f(x,y)\theta(x,y) + B\alpha'(y)\delta(x)\cdot\theta(y) +$$

$$+B\beta'(x)\theta(x)\cdot\delta(y) + B\beta(0)\delta(x)\cdot\delta(y)).$$

Отсюда, при необходимости, можно получить условия разрешимости этой начально-краевой задачи в классе $C^2(R_+^2)$.

Фундаментальные оператор-функции для радиально ограниченных операторных пучков. Как и в предыдущем пункте, изложению своих результатов предпошлем ряд нужных в дальнейшем сведений из [7].

Пусть $E_1,\ E_2$ - банаховы пространства, $B\in\mathcal{L}(E_1,E_2)$ - необратим, $A\in\mathcal{C}l(E_1,E_2)$.

Оператор A называется p-радиальным относительно B [7] с числом $p\in\{0\}\cup N$ (или короче (B,p)-радиальным), если

а) $\exists a\in R\ \ \forall\mu>a\ \ \mu\in\rho^B(A)$,

б) $\exists K\in R_+\ \ \forall\mu>a\ \ \forall n\in N$

$$\max\left\{\| R^B_{(\mu,p)}(A)\|^n_{\mathcal{L}(E_1)}, \| L^B_{(\mu,p)}(A)\|^n_{\mathcal{L}(E_2)}\right\} \le \frac{K}{\prod_{q=0}^{p}(\mu_q-a)^n}.$$

Как и в случае секториальности без ограничения общности [7] можно считать $a=0$.

Соответственно (B,p)-радиальный оператор A называется [7] сильно (B,p)-радиальным справа (слева), если $\forall \lambda,\ \mu_0,\ \mu_1,\ \dots,\mu_p \in R$

$$\| R^B_{(\mu,p)}(A)(\lambda B - A)^{-1}Ax \|_{E_1} \le \frac{Const(x)}{\lambda \prod_{q=0}^p \mu_q}$$

$$\Bigg(\| A(\lambda B - A)^{-1}L^B_{(\mu,p)}(A)y \|_{E_2} \le \frac{Const(y)}{\lambda \prod_{q=0}^p \mu_q}\Bigg),$$

Оператор A называется просто сильно (B,p)-радиальным [7], если он сильно (B,p)-радиален слева и

$$\| R^B_{(\mu,p)}(A)(\lambda B - A)^{-1} \|_{\mathcal{L}(E_2)} \le \frac{C}{\lambda \prod_{q=0}^p \mu_q}.$$

Как и для секториальных операторов из сильной (B,p)-радиальности оператора A следует его правая сильная (B,p)-радиальность [7]. В [7] приведен и доказан следующий блок утверждений.

Теорема. [7] *а) Если оператор A (B,p)-радиален, то оператор-функции*

$$\mathcal{U}_1(t) = \exp\Big(\frac{\mu t}{p+1}((\mu R^B_\mu(A))^{p+1} - I)\Big),\ \mu \in R_+,\ t \ge 0,$$

$$\Bigg(\mathcal{F}_1(t) = \exp\Big(\frac{\mu t}{p+1}((\mu L^B_\mu(A))^{p+1} - I)\Big)\Bigg)$$

являются равномерно ограниченными и сильно непрерывными.

б) Если оператор A сильно (B,p)-радиален справа (слева), тогда в сильной топологии существуют предельные операторы

$$P_1 = \lim_{\mu \to +\infty} (\mu R^B_\mu(A))^{p+1} \in \mathcal{L}(E_1),\ \ Q_1 = \lim_{\mu \to +\infty} (\mu L^B_\mu(A))^{p+1} \in \mathcal{L}(E_2)$$

являющиеся проекторами в E_1 и E_2 соответственно, причем $BP = QB$, $AP = QA$.

в) Проекторы P_1 и Q_1 порождают разложения пространств E_1 и E_2 в прямые суммы $E_1 = E_1^0 \oplus E_1^1 = kerP_1 \oplus imP_1$, $E_2 = E_2^0 \oplus E_2^1 = kerQ_1 \oplus imQ_1$, действия операторов B, A расщепляются, $A_0 : E_1^0 \to E_2^0$ имеет ограниченный обратный. Если A сильно (B,p)-радиален, то $B_1 : E_1^1 \to E_2^1$ непрерывно обратим и оператор $A_0^{-1}B_0 \in \mathcal{L}(E_1^0)$ нильпотентен степени не выше p.

Также, как и в первом пункте заметки, доказываются следующие утверждения.

Теорема 7. *Если оператор A сильно (B,p)-радиален, то дифференциальный оператор $(B\delta'(t) - A\delta(t))$ имеет на классе $K'_+(E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида*

$$\mathcal{E}_1(t) = \mathcal{U}_1(t)B_1^{-1}Q_1\theta(t) - \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I - Q_1)\delta^{(q)}(t).$$

Теорема 8. *Если выполнены условия теоремы 7, то задача Коши (1) имеет в классе $K'_+(E_1)$ единственное решение вида*

$$\tilde{x}_1(t) = \mathcal{E}_1(t) * (f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t)).$$

В развернутом виде представление для $\tilde{x}_1(t)$ имеет вид (2), необходимо лишь заменить $\mathcal{U}(t)$ на $\mathcal{U}_1(t)$, P на P_1 и Q на Q_1.

Следствие. *Если выполнены условия теоремы 7 и*

$$\omega_1 = (I - P_1)x_0 + \sum_{q=0}^{p}(A_0^{-1}B_0)^q A_0^{-1}(I - Q_1)f^{(q)}(0) = 0,$$

то обобщенное решение $\tilde{x}_1(t)$ окажется классическим (непрерывным) построенным в работе [7].

Теоремы о дифференциально-разностных операторах и дифференциальных операторах в частных производных для радиального случая формулируются и доказываются аналогично теоремам 3, 4, 5 и 6 с соответствующими этому случаю модификациями.

Список литературы

[1] Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения. - 1987. - Т. 23. - № 4. - С. 726–728.

[2] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.

[3] Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // СМЖ. - 2000. - Т. 41. - № 5. - С. 1167–1182.

[4] Sidorov N., Loginov B., Sinithin A. and Falaleev M. Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. - Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. - 548 p.

[5] Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов и полугруппы операторов с ядрами в банаховых пространствах // Материалы конф. "Ляпуновские чтения и презентация информационных технологий", Иркутск, ИДСТУ СО РАН, 2004, - С. 41.

[6] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. - 1994. - Т. 49. - № 4. - С. 47–74.

[7] Свиридюк Г.А., Федоров В.Е. Линейные уравнения соболевского типа: Учеб. пособие. - Челябинск: Челяб. гос. ун-т., 2002. - 179 с.

Иркутский государственный университет

25 июня 2005 года

e-mail: mihail@ic.isu.ru