Итерационный метод решения операторного уравнения с возмущением малым нелинейным слагаемым

Д.Ю.Марканова (dianamar@icc.ru)
Институт динамики систем и теории управления СО РАН

Аннотация. В работе с использованием особенности структуры уравнения разветвления - квазилинейной главной части - доказана теорема существования решения операторного уравнения с возмущением малым нелинейным слагаемым, построены итерационные формулы для нахождения решения, определено начальное приближение.

Keywords: уравнение разветвления с квазилинейной главной частью, разветвляющиеся решения, возмущение малым слагаемым, ограниченные решения, итерационный метод.

Введение В результате многочисленных прикладных исследований возникает задача решения систем нелинейных уравнений, зависящих от параметров. Вблизи сингулярных решений для таких уравнений теорема о неявной функции неприменима и для анализа этих решений для отдельных задач было предложено несколько способов их разрешения.

В 1906 - 1908 гг. были опубликованы работы А.М. Ляпунова и Э. Шмидта, в которых были заложены основы локальной теории ветвления решений функциональных уравнений. В них использовалось сведение задачи о ветвлении решений нелинейных уравнений к аналогичной задаче для систем неявных аналитических функций.

Современное состояние теории ветвления решений нелинейных уравнений изложено в монографии М.М. Вайнберга и В.А. Треногина.

В работе Н.А. Сидорова рассматривались общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Здесь были разработаны приближенные методы вычисления разветвляющихся решений нелинейных уравнений, удовлетворяющих требованиям равномерной аппроксимации относительно малого параметра λ.

К теории ветвления тесно примыкает большая группа задач теории возмущений, где изучается задача о возмущении линейного уравнения малым нелинейным слагаемым. К ее решению М.М. Вайнберг и В.А. Треногин применили методы теории ветвления, развитые для нелинейных задач .

В настоящей работе рассматривается задача теории возмущения линейного уравнения малым нелинейным слагаемым, когда при выполнении некоторых условий на исходное уравнение, соответствующее ему уравнение разветвления содержит квазилинейную главную часть. Это позволяет доказать существование решения исходного уравнения, построить итерационные формулы для его нахождения и выбрать начальное приближение.

1. Существование решений

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства. Рассмотрим уравнение

$$Bx = b + \varepsilon R(x), \tag{1.1}$$

где - замкнутый фредгольмов оператор, действующий из E_1 в E_2 с плотной в E_1 областью определения, $\{\varphi_i\}_1^n$ - базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_1^n$ - базис в $N(B^*)$, $\dim\ N(B) = n > 1$; $R(x) =$

$\sum R_i(x)$, где R_i - i-степенные операторы. Правая часть (1.1) определена в окрестности

$$\Omega = \{x \in E_1, \varepsilon \in R^1 : \|x\| < r, |\varepsilon| < \rho\}.$$

Рассматривается задача отыскания решений уравнения (1.1).

Введем биортотогональные к φ_i и ψ_i системы функционалов $\{\gamma_i\}$ из E_1^* и элементов $\{z_i\}$ из E_2. Тогда $\Gamma = \left(B + \sum\limits_1^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i\right)^{-1}$ - ограниченный оператор, проекторы

$$P = \sum_1^n \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i; \quad Q = \sum_1^n \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$$

порождают прямые разложения пространств

$$E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty - n}; \quad E_2 = E_2^n \oplus E_2^{\infty - n}$$

Введем матрицу K размерности $(n \times (n+1))$, где

$$k_{ij} = \begin{cases} \langle R'(x^0)\varphi_j, \psi_i \rangle, & i, j = \overline{1, n} \\ \langle R'(x^0)\Gamma R(x^0), \psi_i \rangle & i = \overline{1, n}; \quad j = n+1 \end{cases}$$

и вектор $\eta = (\eta_1, \cdots, \eta_n, \eta_{n+1}), \quad \eta \in R^n \times R^1$, удовлетворяющий уравнению

$$K\eta = 0.$$

Введем следующее

Определение 1. *Уравнение разветвления вида*

$$L(\eta, \varepsilon) \stackrel{def}{=} [K\eta + o(\eta)] \cdot l(\eta) = 0,$$

где $l(0) = 0, \ l(\eta) \neq 0, \ 0 < |\eta| < \rho$, *назовем квазилинейным уравнением разветвления.*

Рассмотрим уравнение, "предельное"для (1.1) при $\varepsilon = 0$

$$Bx = b, \tag{1.2}$$

Решение такого уравнения представим в виде

$$x^0 = \sum_{i=1}^n c_i \varphi_i + \Gamma b \equiv c\varphi + \Gamma b, \tag{1.3}$$

если выполнено условие разрешимости

$$\langle b, \psi_i \rangle = 0, \ i = \overline{1, n}. \tag{1.4}$$

Тогда решение уравнения (1.1) представим в виде

$$x = x^0 + u(\varepsilon). \tag{1.5}$$

Подставляя решение вида (1.5) в исходное уравнение, получаем уравнение

$$Bu = \varepsilon R(x^0 + u(\varepsilon)). \tag{1.6}$$

Теперь ставится задача отыскания малых решения уравнения (1.6) $u(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Такое решение представимо в виде

$$u = \xi\varphi + \varepsilon\Gamma v, \tag{1.7}$$

где $v \in E_2^{\infty - n}$, то есть выполнено условие

$$\langle v, \psi_i \rangle = 0,\ i = \overline{1, n}. \tag{1.8}$$

Подставив решение вида (1.7) в уравнение (1.6), получаем систему для определения v, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$.

$$\begin{cases} v = R(x^0 + \xi\varphi + \varepsilon\Gamma v), \\ \langle v, \psi_i \rangle = 0,\ i = \overline{1, n}. \end{cases} \tag{1.9}$$

Заметим, что в силу аналитичности оператора $R(x)$ справедливо представление

$$R(x^0 + \xi\varphi + \varepsilon\Gamma v) = R(x^0 + \xi\varphi) + R'(x^0 + \xi\varphi)\varepsilon\Gamma v + o(\varepsilon). \tag{1.10}$$

Используя метод простой итерации с учетом разложения (1.10) и полагая $v_0 = 0$, выпишем первые итерации для v:

$$\begin{aligned} &v_1 = R(x^0 + \xi\varphi), \\ &v_2 = R(x^0 + \xi\varphi + \varepsilon\Gamma R(x^0 + \xi\varphi)) = R(x^0 + \xi\varphi) + R'(x^0 + \xi\varphi)\varepsilon\Gamma R(x^0 + \xi\varphi) + o(\varepsilon), \\ &\cdots, \end{aligned}$$

поэтому в пределе при $n \to \infty$ получаем представление для v

$$v = R(x^0 + \xi\varphi) + R'(x^0 + \xi\varphi)\varepsilon\Gamma R(x^0 + \xi\varphi) + o(\varepsilon), \tag{1.11}$$

и условие разрешимости для (1.6) принимает вид

$$\langle R(x^0 + \xi\varphi), \psi_i \rangle + \langle R'(x^0 + \xi\varphi)\varepsilon\Gamma R(x^0 + \xi\varphi), \psi_i \rangle + o(\varepsilon) = 0. \tag{1.12}$$

Используя аналитичность $R(x)$ аналогично (1.10 запишем представление

$$R(x^0 + \xi\varphi) = R(x^0) + R'(x^0)\xi\varphi + o(\xi).$$

С учетом этого разложения система (1.12) может быть переписана в виде

$$\langle R(x^0), \Psi \rangle + \langle R'(x^0)\xi\varphi, \Psi \rangle + \varepsilon\langle R'(x^0)\Gamma R(x^0), \Psi \rangle + o(|\xi| + |\varepsilon|) = 0. \tag{1.13}$$

Пусть система

$$\langle R(x^0), \psi_i \rangle = 0,\ i = \overline{1, n} \tag{1.14}$$

определяет $c = (c_1, \ldots, c_n)$ - коэффициент, входящий в x^0. Заметим, что если $c^* = (c_1^*, \ldots, c_n^*)$ - простой корень этой системы, то при $c = c^*$ выполнено условие

$$\det \| \langle R'(x^0)\varphi_j, \psi_i \rangle \|_{i,j=\overline{1,n}} \neq 0. \tag{1.15}$$

Теперь получаем следующую систему для определения $\xi_i,\ i = \overline{1, n}$

$$\langle R'(x^0)\varphi, \psi_i \rangle \xi + \varepsilon\langle R'(x^0)\Gamma R(x^0), \psi_i \rangle + o(|\xi| + |\varepsilon|) = 0. \tag{1.16}$$

Таким образом, может быть сформулирована следующая

ЛЕММА 1. *Пусть для уравнения (1.1) выполнено условие (1.4) и коэффициенты* $c = ({}_1, \ldots, c_n)$ *решения* x^0 *определяются из системы (1.14). Тогда уравнение разветвления для (1.6) принимает вид (1.16).*

Введем вектор $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n, 1)$. Будем искать $\xi_i,\ i = \overline{1,n}$ в виде

$$\xi_i = \varepsilon\eta_i + o(\varepsilon),\ i = \overline{1,n}. \tag{1.17}$$

Подставим это представление в уравнение (1.16) и после сокращения на ε получим систему для определения $\eta_i,\ i = \overline{1,n}$

$$\langle R'(x^0)\varphi, \psi_i\rangle\eta_i + \langle R'(x^0)\Gamma R(x^0), \psi_i\rangle + o(1) = 0. \tag{1.18}$$

Такая система при выполнениии условия (1.15) разрешима и однозначно определяет η_i^0. Теперь может быть сформулирована

ЛЕММА 2. *Пусть выполнено условие (1.4) и система (1.14) имеет простой корень* c^*. *Тогда справедливо представление (1.17) и уравнение (1.6) обладает квазилинейным уравнением разветвления вида*

$$L(\eta, \varepsilon) = \varepsilon K\eta + o(\varepsilon) = 0, \tag{1.19}$$

где η^0 *определяется из системы*

$$K\eta^0 = 0. \tag{1.20}$$

2. Построение итерационных формул нахождения решения.

Будем искать решение уравнения (1.6) в виде

$$u = \varepsilon\eta\varphi + \varepsilon\Gamma v,\ v \in E_2^{\infty - n}. \tag{2.1}$$

Подставляя такое решение в уравнение (1.6), получаем систему для определения v, η

$$\begin{cases} v = R(x^0 + \varepsilon\eta\varphi + \varepsilon\Gamma v), \\ \varepsilon^{-1}\langle v, \psi_i\rangle = 0,\ i = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Введем в рассмотрение пространство

$$U = E_2 \oplus R^n$$

и вектор $u = (y, \eta_1, \ldots, \eta_n) \in U$.

Перепишем систему (2.2) в виде одного операторного уравнения

$$A(u, \varepsilon) = 0,$$

действующего из $U \times R^1$ в U. Здесь $A = (A_1, A_2)'$;
$A_1 : U \to E_2$;
$A_2 : U \to R^n$,

$$\begin{cases} A_1 \equiv v - R(x^0 + \varepsilon\eta\varphi + \varepsilon\Gamma v), \\ A_2 \equiv \varepsilon^{-1}\langle v, \psi_i\rangle,\ i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{2.3}$$

Оператор имеет непрерывную производную Фреше по переменной u в окрестности точки $u_0 = (0, \eta_1(0), \dots, \eta_n(0))$. Обозначив $\nu = (\eta_1, \dots, \eta_n)$, запишем блочную матрицу

$$A_u(u,\varepsilon) = \begin{pmatrix} A'_{1v} & A'_{1\nu} \\ A'_{2v} & A'_{2\nu} \end{pmatrix}$$

Здесь
$A'_{1v} : E_2 \to E_2$,
$A'_{1\nu} : R^n \to E_2$,
$A'_{2v} : E_2 \to R^n$,
$A'_{2\nu} : R^n \to R^n$.

Определим теперь блоки

$$\begin{array}{l} A'_{1v}(u_0,0) = I, \\ A'_{1\nu}(u_0,0) = 0. \\ A'_{2v}(u_0,0) = \langle R'(x^0)\Gamma, \psi_i\rangle,\ i = \overline{1,n}, \\ A'_{2\nu}(u_0,0) = \langle R'(x^0)\varphi, \psi_i\rangle, i = \overline{1,n}. \end{array}$$

Введем матрицу K_1 размерности $(n \times n))$, где $K_1 = [k_{ij}]_{i,j=\overline{1,n}}$. Запишем

$$A_u(u_0,0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ \langle R'(x^0)\Gamma, \bar\Psi\rangle & K_1 \end{pmatrix}$$

В силу выполнения условия (1.15) существует

$$A_u^{-1}(u_0,0) = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -K_1^{-1}\langle R'(x^0)\Gamma, \bar\Psi\rangle & K_1^{-1} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Таким образом, для уравнения $A(u,\varepsilon) = 0$ выполнена теорема о неявном операторе и в силу этого данное уравнение определяет в шаре $S_r(u_0)$ при $\varepsilon = 0$ единственную неявную функцию $u = u(\varepsilon)$, причем $u(0) = (0, \eta_1(0), \dots, \eta_n(0))$, $u(\varepsilon)$ аналитична в точке 0, и к этому решению сходится последовательность

$$u^m = u^{m-1} - A_u^{-1}(u_0,0)A(u^{m-1},\varepsilon). \tag{2.5}$$

Учитывая представления (2.2) - (2.5), справедлива следующая

ТЕОРЕМА 1. *Пусть выполнены условия (11.4), (1.15). Тогда уравнение (1.1) обладает непрерывным решением $x = x(\varepsilon)$ в окрестности точки $\varepsilon = 0$. Последовательность $\{x^m\}$, определяемая формулами*

$$x^m = c^*\varphi + \Gamma b + \varepsilon\sum_1^n \eta_i^m\varphi_i + \varepsilon\Gamma v^m, \tag{2.6}$$

где

$$\begin{cases} v^m = R(c^*\varphi + \Gamma b + \varepsilon\eta^{m-1}\varphi + \varepsilon\Gamma v^{m-1}), \\ \eta^m = \eta_i^{m-1} + \langle R'(x^0)\Gamma(v^{m-1} - v^m), \psi_i\rangle K_1^{-1} - \varepsilon^{-1}\langle v^m, \psi_i\rangle K_1^{-1},\ i = \overline{1,n} \\ m = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{2.7}$$

с начальными условиями $v^0 = 0$, η_i^0 определены из **??**, *сходится к решению уравнения (1.1) при достаточно малом ε.*

Автор благодарит Сидорова Н.А. за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

Вайнберг М.М, Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. —М.: Наука, 1969.

Ермилова Н.В, Марканова Д.Ю. Итерационные методы построения разветвляющихся решений в случае квазилинейной главной части уравнения разветвления // В кн.: Приближенные методы анализа.—Иркутск, ИГПИ, 1997.—С.54–63.

Сидоров Н.А. Общие вопросы регуляризации в задачах теории ветвления. Изд-во Иркутского ун-та. 1982, 312 с.

Сидоров Н.А. О неявной параметризации решений системы разветвления Ляпунова- Шмидта // Известия ВУЗов. Математика,—1998.—N 11. Деп. ВИНИТИ N 2475-13-98.

Сидоров Н.А. Параметризация простых разветвляющихся решений и итерации в нелинейном анализе // Известия ВУЗов. Математика.—2001.—N 9.—С.156-164.

Треногин В.А. Глобальная обратимость нелинейных операторов и метод продолжения по параметру // Докл. АН России.—1996..—Т. 350.—N 4.—С.452-455.