УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИФФУЗИИ ПЛАЗМЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЕЕ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ [1].

Г.А. Рудых, А.В. Синицын

1. Введение. Диффузия плазмы через магнитное поле изучалась в работах [1]–[5] и описывается, в общем случае, нелинейными вырождающимися параболическими уравнениями второго порядка [6], построение строгой математической теории которых было начато в публикациях [7]–[10]. В этих исследованиях был введен в рассмотрение физически обоснованный класс обобщенных решений, доказаны теоремы существования и единственности решений для первой и второй краевых задач в ограниченных и неограниченных областях, различные варианты принципа максимума, а также теоремы о наличии конечной скорости изменения носителей решений уравнений типа нестационарной фильтрации. С другой стороны, в работах [11], [12] при изучении первой краевой задачи для уравнения быстрой диффузии был открыт эффект стабилизации (полного остывания) за конечное время. Эти два фундаментальных результата являются основополагающими при математическом моделировании как медленной, так и быстрой диффузии ограниченной плазмы поперек магнитного поля, а также ее равновесных конфигураций. В настоящее время имеется значительное число публикаций [6], [13]–[18], посвященных исследованию параболических уравнений с неявным вырождением вида

$$u_t = \triangle g(u) + f(\lambda, u), \quad (t,x) \in \Re^+ \times \Omega, \tag{1.1}$$

$$u = 0, \quad (t,x) \in \Re^+ \times \partial\Omega,$$

$$u = u_0, \quad (t,x) \in \{0\} \times \Omega,$$

где $\Re^+ = (0,\infty); \Omega \subset \Re^n$- открытое ограниченное подмножество с границей $\partial\Omega$ класса $C^{2+\alpha}$; $\alpha \in (0,1)$; $g : \bar{\Re}^+ \to \bar{\Re}^+$- непрерывная возрастающая функция; $g(0) = 0$; g^{-1}- непрерывна по Гёльдеру; g или g^{-1}- локально непрерывна по Липшицу; $f : \Re \times \bar{\Re}^+ \to \Re$- непрерывная функция; $f(\lambda,\cdot)$- локально непрерывна по Липшицу; $f(\lambda, 0) = 0$ для $\lambda \in \Re$; $u_0 \in L^\infty_+(\Omega) = \{u \in L^\infty(\Omega) : u(x) \geq 0$ для почти всех $x \in \Omega\}$.

Определение 1. Под решением задачи (1.1) на $[0,T], T > 0$, понимается функция $u \in C([0,T]; L_1(\Omega)) \bigcap L^\infty(Q_T)$, $Q_T = \Omega \times (0,T]$ такая, что

$$\int\limits_{\Omega} u(t)\varphi(t)dx - \iint\limits_{Q_t} (u\varphi_t + g(u)\triangle\varphi)dxdt =$$

[1] Работа выполнена при частичной финансовой поддержке фонда INTAS, грант INTAS-OPEN N2000-0015.

$$= \int\limits_{\Omega} u_0\varphi(0)dx + \iint\limits_{Q_t} f(\lambda,u)\varphi dxdt, \tag{1.2}$$

для всех $\varphi \in C^2(\bar{Q}_t)$, $\varphi \geq 0$, $\varphi = 0$ на $\sum_T = \partial\Omega \times (0,T]$, $t \in [0,T]$.

Под решением задачи (1.1) на $[0,\infty)$ понимается решение последней на $[0,T]$ для любого $T > 0$. Верхнее(соответственно нижнее) решение начально - краевой задачи (1.1) определяется аналогично, посредством замены в соотношении (1.2) знака равенства на знак неравенства $\geq$ (соответственно $\leq$). Под решением стационарной задачи

$$-\triangle g(u) = f(\lambda,u), \quad x \in \Omega, \tag{1.3}$$
$$u = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

понимается функция $u \in L^\infty(\Omega)$ такая, что

$$-\int\limits_{\Omega} g(u)\triangle\varphi dx = \int\limits_{\Omega} f(\lambda,u)\varphi dx, \quad \lambda \in \Re,$$

для любой функции $\varphi \in C^2(\bar{\Omega})$, $\varphi \geq 0$ в Ω, $\varphi = 0$ на $\partial\Omega$. Аналогично, как и для (1.1) определяются верхнее и нижнее решения краевой задачи (1.3). Так как g^{-1} непрерывна по Гёльдеру, то любое решение задачи (1.3) является классическим в том смысле, что $v = g(u) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$- классическое решение краевой задачи

$$-\triangle v = h(\lambda,v), \quad x \in \Omega, \tag{1.4}$$
$$v = 0, \quad x \in \partial\Omega,$$

где $h : \Re \times \bar{\Re}^+ \to \Re$; $h(\lambda,v) = f(\lambda,g^{-1}(v)) = f(\lambda,\cdot)\circ g^{-1}(v)$.

Вопросы стабилизации неотрицательных решений задачи (1.1) изучались многими авторами (см., например, [17], [18], а также [6], [14] и имеющиеся там ссылки).

Теорема A [17]. *Начально краевая задача (1.1) имеет единственное для $t \in [0,T]$ решение $u(u_0,t)$. Кроме того $u(u_0,t) \geq 0$ для $t \in [0,T]$.*

Теорема B [17]. *Пусть $u_1 \in L^\infty_+(\Omega)(u_2 \in L^\infty_+(\Omega))$- нижнее (верхнее) решение стационарной задачи (1.3), $0 \leq u_1 \leq u_2$. Тогда соответствующее решение $u(u_1,t)$, $(u(u_2,t))$ нестационарной задачи (1.1) является неубывающей (невозрастающей) функцией t почти всюду в Ω, имеет место цепочка неравенств*

$$u_1 \leq u(u_1,t) \leq u(u_2,t) \leq u_2, \quad t \in \bar{\Re}^+,$$

и $u(u_1,t)$, $u(u_2,t)$ сходятся при $t \to +\infty$ (в $C(\bar{\Omega})$, если $dim\Omega = 1$ или в $L^p(\Omega)$, $p \geq 1$, если $dim\Omega \geq 2$) монотонно соответственно к пределам u_*, u^*, которые являются минимальным, максимальным стационарными решениями задачи (1.3) на множестве $K = \{u \in L^\infty_+(\Omega) : 0 \leq u_1 \leq u \leq u_2\}$.

В публикации [18], предшествовавшей работе [17], исследовались вопросы существования, сравнения и стабилизации решений начально-краевой задачи для одномерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = (u^p)_{xx} + f(\lambda,u), \quad (t,x) \in \Re^+ \times \Omega,$$

$$u = 0, \quad (t, x) \in \Re^+ \times \partial\Omega, \tag{1.1$'$}$$
$$u = u_0, \quad (t, x) \in \{0\} \times \Omega,$$

где $\Omega = (-e, e)$; $u_0 \in L^\infty(\Omega); 0 \leq u_0 \leq 1; p > 1$; $f(\lambda, u) = u(1-u)(u-\lambda); 0 < \lambda < (p+1)/(p+3)$.

Теорема C [18]. *Начально-краевая задача (1.1)$'$ имеет единственное на* $\overline{\Re}^+$ *решение* $u(u_0, t)$, *причем* $0 \leq u(u_0, t) \leq 1$.

Итак, асимптотическое поведение решений начально-краевой задачи (1.1) определяется множеством ее стационарных решений и сводится к изучению его структуры. В работах [19]-[21], а также [17], [18], для обобщенных решений начально-краевых задач (1.1), (1.1)$'$ была построена качественная теория, аналогичная той, что развита в исследованиях [22], [23] для равномерно параболических уравнений. В частности, в [18] на основе принципа сравнения решений задачи (1.1)$'$, получен результат о стабилизации нестационарных решений к изолированным стационарным решениям, множество которых анализировалось явным интегрированием. Результаты, касающиеся регулярности решений, обеспечивали относительную компактность траекторий задачи (1.1)$'$ в соответствующем функциональном пространстве, на котором определен подходящий обобщенный функционал Ляпунова, не обязательно определенно-положительный (см., например, [24]). В работе [17] главным условием для доказательства сходимости траекторий начально-краевой задачи (1.1) к сответствующим стационарным решениям задачи (1.3) являлось требование монотонности траекторий по времени. Это позволило преодолеть трудности, связанные с доказательством относительной компактности траекторий исследуемой задачи в подходящем метрическом пространстве, на котором определен функционал Ляпунова.

Тем самым, задача об устойчивости стационарных решений сводится к исследованию структуры множества этих решений. В случае, когда удается доказать единственность стационарного решения, тогда верхнее и нижнее решения задают область притяжения в пространстве начальных данных. Однако, в настоящее время, как известно [25]-[27], не существует достаточно общих критериев единственности неотрицательных решений задач вида (1.4). Единственность можно гарантировать, если отображение $f(\lambda, \cdot) \circ g^{-1}(v)$ монотонно.

Наконец, отметим, что основными методами иследования уравнений вида (1.4) являются [28]–[30]: метод обыкновенных дифференциальных уравнений, вариационные методы, метод верхних и нижних решений, метод априорных оценок и, так называемый, метод теорем типа Лиувилля.

В этой работе исследуется разрешимость нелинейного операторного уравнения

$$Lu = F(x, u, z), \quad u \in D(L), \tag{1.5}$$

с граничными условиями общего вида, входящими в оператор L, где L- непрерывно обратимый дифференциальный оператор; $F : \Omega \times \Re^1 \times \Re^1 \to \Re$- непрерывная функция своих аргументов; $\Omega \subset \Re^1$; $z = Tu$; T- непрерывный нелинейный оператор (возможно, что T- интегральный оператор типа Вольтерра или

Фредгольма), действующий из $C(\bar{\Omega})$ в $C(\bar{\Omega})$; $F(x, \cdot, z)$- локально непрерывна по Липшицу; $F(x, u, T(\cdot))$- монотонный оператор.

В качестве L можно рассматривать, например, либо равномерно эллиптический, либо обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка. Однако, предложенный нами подход применим и к параболическим операторам. При этих предположениях доказывается существование классического решения задачи (1.5). Помимо этого, получены достаточные условия, обеспечивающие единственность ее решения.

При получении этих результатов мы используем модификацию классических методов теории монотонных операторов в частично упорядоченных пространствах [25], [26] для случая парных неподвижных точек [27] в сочетании с техникой верхних и нижних решений [17], [28].

2. Теорема существования решения краевой задачи. Рассмотрим краевую задачу (1.5), где L- непрерывно обратимый дифференциальный оператор. Как отмечалось выше, в качестве L можно взять равномерно эллиптический оператор, определенный на ограниченной выпуклой области $\Omega \subset \Re^n$, граница которой $\partial\Omega$ принадлежит классу $C^{2+\alpha}$ для некоторого $\alpha \in (0, 1)$, то есть

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u, \tag{2.1}$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \mu|\xi|^2, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x) \leq \nu,$$

для всех $x \in \Omega$, где $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Re^n$; $\mu, \nu \in \Re^+$- константы эллиптичности; $a_{ij}(x), b_i(x), c(x) \in C^\alpha(\bar{\Omega})$; $c(x) \geq 0$. Краевая задача (1.5), (2.1) является базовой при математическом моделировании равновесных конфигураций ограниченной плазмы в установках типа токамак [31], [32].

В этом разделе изучается разрешимость двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального оператора

$$Lu \stackrel{\triangle}{=} -(a(x)u')' + b(x)u = F(x, u, z), \tag{2.2}$$

$$x \in (0, 1), \quad a(x) \geq 0, \quad b(x) \geq 0,$$

с граничными условиями

$$L_i u \stackrel{\triangle}{=} \alpha_i u(i) + (-1)^{i+1}\beta_i u'(i) = \gamma_i, \tag{2.3}$$

где $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in \Re$; $i = 0, 1$. Пусть F- непрерывная функция, $z = Tu$- непрерывный, возможно, нелинейный оператор, действующий из $C[0, 1]$ в $C[0, 1]$. Ниже предполагается, что T- монотонный оператор, то есть для любых $\varphi(x), \psi(x) \in C[0, 1]$ таких, что $0 \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$, имеем $T\varphi \leq T\psi$, если T- возрастающий оператор, либо $T\varphi \geq T\psi$, если T- убывающий оператор. Для определенности будем считать, что T- убывающий оператор. Наконец, отметим, что предлагаемый ниже метод решения краевой задачи применим также, если $z = z(T_1 u, \ldots, T_k u)$, $z : \Re^k \to \Re$, где операторы T_i обладают приведенными выше свойствами, причем тип монотонности (возрастание, или убывание), может быть различным для различных $i = 1, 2, \ldots, k$.

Пусть заданы функции $v_0(x), w_0(x) \in C[0,1]$ такие, что $0 \leq v_0(x) \leq w_0(x)$. Посредством $[v_0, w_0]$ будем обозначать множество $\{u(x) \in C[0,1] : v_0(x) \leq u(x) \leq w_0(x)\}$ и называть его порядковым интервалом [33].

Предположим, что функция $F(x,u,z)$ для всех $u \in [v_0, w_0]$, $z \in [Tw_0, Tv_0]$, $x \in (0,1)$ обладает следующими свойствами: **(1).** F не убывает по z; **(2).** $F(x,u,z)$ непрерывно дифференцируема по u на порядковом интервале $[v_0, w_0]$; **(3).** для любого $\tau \in (0,1)$ имеет место неравенство

$$\tau F(x, u, T(\tau u)) < F(x, \tau u, Tu).$$

Отметим, что в силу условия **(2)** существует $M(v_0, w_0) \geq 0$, такое, что $\frac{\partial}{\partial u} F \geq -M$, $F + Mu \geq 0$. Причем, если F убывает по u, то M можно положить равной нулю.

Определение 2. Решением задачи (2.2), (2.3) назовем функцию $u(x) \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$, удовлетворяющую уравнению (2.2) и граничным условиям (2.3).

Пусть оператор L непрерывно обратим, тогда этим же свойством, в силу неотрицательности M, обладает оператор $L + M$. Далее, предположим, что помимо **(1)**, **(2)**, **(3)** выполнено условие: **(4).** оператор $(L+M)^{-1}$ является u_0-положительным [25], [26], то есть найдется такой ненулевой элемент $u_0 \in C[0,1]$, $u_0 > 0$, что для любого ненулевого элемента $u \in C[0,1]$, $u > 0$ можно указать числа $\alpha(u) > 0$, $\beta(u) > 0$, при которых выполняется цепочка неравенств

$$\alpha(u) u_0 \leq (L+M)^{-1} u \leq \beta(u) u_0.$$

Определение 3. Функции $v_0, w_0 \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$, удовлетворяющие соотношениям

$$\begin{gathered} Lv_0 \leq F(x, v_0, Tw_0), \quad L_i v_0 = 0, \\ Lw_0 \geq F(x, w_0, Tv_0), \quad L_i w_0 \geq 0, \end{gathered} \tag{2.4}$$

назовем, соответственно, нижним и верхним квазирешениями задачи (2.2), (2.3), где $i = 0, 1$.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* **(1).** *Тогда краевая задача (2.2), (2.3) имеет, по крайней мере, одно решение $u(x)$, принадлежащее порядковому интервалу $[v_0, w_0]$.*

Доказательство. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию

$$H(x, u, Tu) \overset{\triangle}{=} F(x, p(u), Tp(u)) + q(u), \quad x \in (0,1),$$

$$p(u) = max\{v_0(x), min\{u(x), w_0(x)\}\}, \tag{2.5}$$

$$q(u) = \begin{cases} (w_0 - u)/(1 + u^2), & u \geq w_0, \\ 0, & v_0 \leq u \leq w_0, \\ (v_0 - u)/(1 + u^2), & u \leq v_0. \end{cases}$$

Из соотношений (2.5) следует справедливость включений

$$p(u) \in [v_0, w_0], \quad Tp(u) \in [Tw_0, Tv_0]. \tag{2.6}$$

Далее, ясно, что функция $H(x, u, Tu)$ непрерывна и ограничена на множестве $(0, 1) \times \Re^2$. Тем самым, по известному следствию теоремы Шаудера [33], краевая задача

$$Lu = H(x, u, Tu), \quad L_i u = 0,$$

имеет решение. Покажем, что при этом $u \in [v_0, w_0]$. С этой целью, предположим, что найдутся $\epsilon > 0$, $x_0 \in (0, 1)$ такие, что $v_0(x_0) = u(x_0) + \epsilon$, $v_0'(x_0) = u'(x_0)$, $v_0''(x_0) \leq u''(x_0)$. Тогда $p(u(x_0)) = v_0(x_0)$ и имеет место цепочка неравенств

$$F(x, v_0, Tw_0) \mid_{x=x_0} \geq -a(x_0) v_0''(x_0) \geq -a(x_0) u''(x_0)$$

$$= F(x, v_0, Tp(u)) \mid_{x=x_0} + \frac{\epsilon}{(1 + u^2(x_0))}$$

$$\geq F(x, v_0, Tw_0) \mid_{x=x_0} + \frac{\epsilon}{(1 + u^2(x_0))}.$$

Тем самым, в силу условия **(1)** и формул (2.6), приходим к противоречию. Следовательно, $u(x) \geq v_0(x),\ x \in (0, 1)$. Аналогично доказывается справедливость неравенства: $u(x) \leq w_0(x)$. Теорема доказана.

Замечание 1. При изучении эллиптической краевой задачи с оператором L, определяемым согласно (2.1), необходимо заботиться о гладкости решения. Рассмотрим уравнение (1.5) с граничным условием Дирихле: $u = 0$, $x \in \partial\Omega$ и покажем, что в этом случае $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$, где $0 < \alpha < 1$. Поскольку функция $H(x, u, Tu)$ непрерывна на $\bar{\Omega}$ и ограничена, тогда $u(x) = L^{-1}H(x, u, Tu)$ принадлежит $C^{1+\delta}(\bar{\Omega})$, $0 < \delta < 1$ и, следовательно, $F(x, u, Tu) \in C^{\alpha}(\bar{\Omega})$. Тем самым, из классического результата [34] следует, что $u(x) \in C^{2+\alpha}(\bar{\Omega})$.

3. Теорема единственности решения краевой задачи. Для доказательства единственности решения исследуемой краевой задачи (2.2), (2.3), введем в рассмотрение линейное уравнение

$$Lu + Mu = F(x, \eta, T\mu) + M\eta \stackrel{\triangle}{=} G(x, \eta, \mu), \tag{3.1}$$

где $\eta, \mu \in C[0, 1]$. Далее, определим отображение $A : C[0, 1] \times C[0, 1] \to C[0, 1]$, которое ставит в соответствие каждой паре $(\eta, \mu) \in [v_0, w_0] \times [v_0, w_0]$ единственное решение

$$u = A(\eta, \mu); \quad \eta, \mu \in C[0, 1], \tag{3.2}$$

краевой задачи (3.1), (2.3).

Утверждение 1. *Пусть A- отображение, определяемое формулой (3.2). Пусть выполнены условия* **(2)**, **(4)**. *Тогда справедливы следующие свойства:* **(a).** $v_0 \leq A(v_0, w_0), \;\; w_0 \geq A(w_0, v_0)$; **(b).** *$A(\eta, \mu)$ не убывает по η и не возрастает по μ;* **(c).** *A является u_0- положительным.*

Доказательство. **(a).** Пусть $A(v_0, w_0) = v_1$. Покажем, что $v_0 \leq v_1$. Действительно, если это неравенство не выполняется, тогда существуют $\epsilon > 0$, $x_0 \in (0,1)$ такие, что для функции $z = v_0 - v_1$, $z(x_0) = \epsilon$, $z'(x_0) = 0$, $z''(x_0) \leq 0$. Тем самым, мы приходим к противоречию: $0 \leq -a(x_0)z''(x_0) \leq M(v_1 - v_0)(x_0) = -M\epsilon$. Свойство **(b)** доказывается аналогичными рассуждениями с использованием условия **(2)**. Наконец, свойство **(c)** непосредственно следует из условия **(4)**. Утверждение доказано.

Теорема 2. *Пусть для $F : (0,1) \times \Re^2 \to \Re$ выполнены условия* **(1)**, **(2)**, **(3)**, **(4)**. *Тогда краевая задача (2.2), (2.3) имеет единственное решение $u(x)$, принадлежащее порядковому интервалу $[v_0, w_0]$.*

Доказательство. В первую очередь, определим следующим образом:

$$(L+M)v_n = G(x, v_{n-1}, w_{n-1}), \;\; L_i v_n = 0,$$
$$(L+M)w_n = G(x, w_{n-1}, v_{n-1}), \;\; L_i w_n = 0, \tag{3.3}$$

последовательные приближения v_n, w_n, где $n = 1, 2, \ldots$. Тогда имеет место цепочка неравенств

$$v_0 \leq v_1 \leq \ldots \leq v_n \leq \ldots \leq w_n \leq \ldots \leq w_1 \leq w_0, \tag{3.4}$$

причем $v_n \to u$, $w_n \to u$ равномерно при $n \to \infty$.

Действительно, легко видеть, что оператор A, определяемый согласно (3.2), является вполне непрерывным. Далее, введем в рассмотрение последовательность

$$v_n = A(v_{n-1}, w_{n-1}), \;\; w_n = A(w_{n-1}, v_{n-1}).$$

Тем самым, из утверждения 1 следует, что $v_0 \leq v_1 \leq w_1 \leq w_0$. Теперь, предположим, что выполняется цепочка неравенств: $v_{n-1} \leq v_n \leq w_n \leq w_{n-1}$. Тогда, из свойства **(b)** получим, что

$$v_n = A(v_{n-1}, w_{n-1}) \leq A(v_n, w_{n-1}) \leq A(v_n, w_n) = v_{n+1},$$
$$w_n = A(w_{n-1}, v_{n-1}) \geq A(w_n, v_{n-1}) \geq A(w_n, v_n) = w_{n+1}.$$

и

$$v_{n+1} = A(v_n, w_n) \leq A(w_n, w_n) \leq A(w_n, v_n) = w_{n+1}.$$

Итак, по индукции следует справедливость (3.4).

Далее, в силу полной непрерывности оператора A множество $\{v_0, v_1, v_2, \ldots\}$ является относительно компактным (предкомпактным). Тем самым, найдется подпоследовательность $\{v_{n_k}\} \subset \{v_n\}$ такая, что $v_{n_k} \to v^*$. Ясно, что $v_n \leq v^* \leq w_n$, $(n = 1, 2, \ldots)$, $0 \leq v^* - v_m \leq v^* - v_{n_k}$ для $m > n_k$. Теперь, учитывая, что конус неотрицательных функций в $C[0,1]$ является нормальным [25], [26], тогда $\| v^* - v_m \| \leq \| v^* - v_{n_k} \| \to 0$. Итак, $v_n \to v^*$, $v^* \in [v_0, w_0]$. Совершенно аналогично, можно доказать, что $w_n \to w^*$, $w^* \in [v_0, w_0]$. Далее, поскольку, A- деминепрерывный оператор, тогда $A(v_n, w_n)$ слабо сходится к $A(v^*, w^*)$, то есть $A(v_n, w_n) \rightharpoonup A(v^*, w^*)$. Также, очевидно, что $A(w_n, v_n) \rightharpoonup A(w^*, v^*)$. Таким образом, $v^* = A(v^*, w^*)$ и $w^* = A(w^*, v^*)$, то есть (v^*, w^*)- парная неподвижная точка [27], [35].

Допустим, что $(\bar{v}, \bar{w})$- другая парная неподвижная точка. Так как $v_0 \leq \bar{v} \leq w_0$, $v_0 \leq \bar{w} \leq w_0$,

$$v_1 = A(v_0, w_0) \leq A(\bar{v}, \bar{w}) = \bar{v} \leq A(w_0, v_0) = w_1,$$

$$v_1 = A(v_0, w_0) \leq A(\bar{w}, \bar{v}) = \bar{w} \leq A(w_0, v_0) = w_1,$$

тогда, аналогично, по индукции, можно доказать, что выполняются неравенства

$$v_n \leq \bar{v} \leq w_n, \;\; v_n \leq \bar{w} \leq w_n, \;\; n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{3.5}$$

Из (3.5), взяв предел, следует, что $v^* \leq \bar{v} \leq w^*$, $v^* \leq \bar{w} \leq w^*$. Тем самым, парная неподвижная точка (v^*, w^*) обладает свойством максимальности и минимальности в том смысле, что для любой другой парной неподвижной точки $(\bar{v}, \bar{w})$ выполняются выписанные выше неравенства. Далее, из условия **(3)** и свойства **(c)** имеем, что для всех $\tau \in (0, 1)$ справедлива цепочка неравенств

$$A(\tau u, v) - \tau A(u, \tau v) \geq \alpha u_0 \geq \frac{\alpha}{\beta} A(\tau u, v). \tag{3.6}$$

Теперь, определим $\tau_0 = \inf\{\tau > 0 : v^* \geq \tau w^*\}$. Очевидно, что $\tau_0 \leq 1$, $v^* \geq \tau_0 w^*$. Пусть $\tau_0 < 1$, тогда с учетом формулы (3.6) и свойства **(b)** получим

$$\tau_0 w^* = \tau_0 A(w^*, v^*) \leq \tau_0 A(w^*, \tau_0 w^*) \leq (1 - \frac{\alpha}{\beta}) \times$$

$$A(\tau_0 w^*, w^*) \leq (1 - \frac{\alpha}{\beta}) A(v^*, w^*) = (1 - \frac{\alpha}{\beta}) v^*,$$

что противоречит определению τ_0. Тем самым, $\tau_0 = 1$. Поскольку по построению $v^* \leq w^*$, тогда $v^* = w^* = u$, $u = A(u, u)$. Наконец, из максимального и минимального свойств парной неподвижной точки (v^*, w^*) следует единственность u. Теорема доказана.

Замечание 2. При изучении эллиптической краевой задачи полная непрерывность оператора A следует из оценки функции Грина оператора (2.1):

$$0 \leq G(x, y) \leq \begin{cases} k|x - y|^{2-n}, & n > 2, \\ k|\ln|x - y||, & n = 2, \end{cases}$$

полученной в работе [25], где $x \in \bar{\Omega}$; $y \in \Omega$; $x \neq y$; $|x-y|$- расстояние между точками x, y. В этой же работе доказана u_0- положительность (свойство **(4)**).

4. Математическая модель баланса плотностей плазмы в установке типа токамак и свойства ее стационарных решений. В общем случае, математическая модель, описывающая эволюционный процесс в тороидальной плазме, обладающей аксиальной симметрией представляет собой двумерную задачу. Однако благодаря существенному различию (на несколько порядков) характерных времен переноса вдоль и поперек магнитных поверхностей ее удается достаточно хорошо описать в рамках одномерных моделей, получивших название транспортных [36]. Их основу составляет система диффузионных уравнений [37], выражающих баланс частиц и энергии на каждой магнитной поверхности. Причем снижение размерности изучаемой задачи достигается за счет усреднения, рассматриваемых величин и потоков по магнитным поверхностям, отражающего высокую скорость продольного перемещения. Наконец, отметим, что диффузионные модели идеально приспособлены для изучения эволюции плазмы и полоидального магнитного поля в аксиально-симметричных тороидальных замкнутых конфигурациях типа токамак.

Рассмотрим простейшую транспортную модель баланса плотностей плазмы в установке типа токамак

$$n_t = \frac{\alpha}{x}(xnn_x)_x + \gamma\rho n - n, \tag{4.1}$$

$$(x\rho_k)_x = (-1)^k x\rho_k n, \quad \rho = \rho_0 + \rho_1, \ k = 0, 1, \tag{4.2}$$

с начальным $n|_{t=0} = n_0(x) \geq 0$ и граничными условиями

$$xn_x|_{x=0} = n|_{x=1} = 0, \tag{4.3}$$

$$x(\rho_0 - \rho_1)|_{x=0} = 0, \quad \rho_0|_{x=1} = 1. \tag{4.4}$$

Здесь $n-$ плотность плазмы; ρ_0 и ρ_1 - плотность летящих со стенок к оси и встречных, соответственно, инжектируемых нейтральных частиц; x - радиус магнитной поверхности; $\alpha > 0$ - коэффициент диффузии плазмы поперек магнитного поля; $\gamma > 0$ - мощность инжекции.

Исследуемая нелинейная краевая задача (4.1) - (4.4) содержит одну пространственную переменную x и соответствует цилиндру с трансляционной и круговой симметриями. Причем трансляционная симметрия отражает аксиальную симметрию исходного тора, а круговая - процедуру усреднения в перпендикулярном сечении. Кроме того, предполагается, что на поверхности, с которой просходит инжекция, задан поток нейтралов, а плотность плазмы равна нулю.

Исключая из системы (4.1), (4.2), с учетом граничных условий (4.4), функцию ρ приходим к уравнению

$$n_t = \frac{\alpha}{x}(xnn_x)_x + \left[\frac{2\gamma}{x} e^{-\int_0^1 n(s,t)ds} ch \int_0^x n(s,t)ds - 1\right] n. \tag{4.5}$$

Стационарный аналог уравнения (4.5)

$$-\frac{\alpha}{x}(xnn')' = \left[\frac{2\gamma}{x}e^{-\int_0^1 nds}ch\int_0^x nds - 1\right]n, \tag{4.6}$$

нагруженного граничными условиями (4.3) является предметом исследования настоящего раздела, где $n' = \frac{d}{dx}n(x)$.

Итак, рассмотрим краевую задачу (4.6), (4.3)

$$-(xu')' = \lambda(\xi Tu - x)u^{1/2} = \lambda F(x, u, Tu), \tag{4.7}$$

$$xu'|_{x=0} = u|_{x=1} = 0,$$

где $u = n^2; \xi = 2\gamma; \lambda = 2/\alpha$;

$$Tu = \exp(-\int_0^1 u^{1/2}ds)ch(\int_0^x u^{1/2}ds). \tag{4.8}$$

С использованием теоремы 2 покажем разрешимость исследуемой интегродифференциальной краевой задачи (4.7), (4.8).

Другими словами, построим нижнее и верхнее квазирешения $v_0, w_0 \in C^2(0,1] \cap C^1[0,1]$ такие, чтобы выполнялись условия **(1) - (4)**.

Непосредственными вычислениями, несложно проверить, что оператор Tu, определяемый согласно (4.8) является монотонно убывающим, то есть для любых $\varphi(x), \psi(x) \in C[0,1]$, удовлетворяющих условию $0 \le \varphi(x) \le \psi(x)$ справедливо неравенство $T\varphi(x) \ge T\psi(x)$. Помимо этого $0 \le Tu(x) \le 1$ для всех $u(x) \in C[0,1]$. Итак условие (1) выполнено. Далее, так как $F(x,u,z)/u \to 0$ при $u \to \infty$ равномерно по x и z, тогда существует постоянная $a^2 > 0$ такая, что

$$F(x, a^2, z)/a^2 \le \xi/a \le 1/\lambda, \tag{4.9}$$

где $z = Tu$. Полагая $w_0 = a^2$ имеем

$$A(w_0, v_0) = \lambda\int_0^1 G(x,s)F(s, w_0, Tv_0)ds \le$$

$$\le a^2\int_0^1 G(x,s)ds \le a^2 = w_0, \tag{4.10}$$

где $G(x,s)$ - функция Грина, соответствующего дифференциального оператора, определяемая формулой

$$G(x,s) = \begin{cases} -\ln x, & s \le x, \\ -\ln s, & x \le s. \end{cases} \tag{4.11}$$

Очевидно, что $w_0 = a^2$ будет искомым верхним квазирешением если $a \ge \xi\lambda$.

Теперь рассмотрим вспомогательную краевую задачу на собственные значения

$$Lz \equiv -(xz')' = \eta xz, \ \ 0 < x < 1, \tag{4.12}$$

$$xz'|_{x=0} = z|_{x=1} = 0.$$

Хорошо известно [38], что решение $z(x)$ задачи Штурма-Лиувилля (4.12) имеет вид $z(x) = J_0(\eta_0^{1/2}x)$, где $J_0(\eta_0^{1/2}x)$ - функция Бесселя; $\max J_0 = 1, J_0 > 0$ при $x \in [0,1)$; η_0 - главное собственное значение. Далее, предположим, что $v_0 = \nu^2 z$, где ν - некоторая постоянная. Тогда учитывая (4.12) приходим к справедливости цепочки неравенств

$$-(xv_0')' - \lambda(\xi T w_0 - x)v_0^{1/2} \leq \eta_0\nu\left(\nu - \frac{\lambda}{\eta_0}(\xi e^{-a} - 1)\right) \leq 0,$$

при условии, что

$$\nu \leq \lambda(\xi e^{-a} - 1)/\eta_0, \quad a \leq \ln \xi. \tag{4.13}$$

Итак, если постоянная ν является достаточно малой, тогда
$v_0 = \nu^2 J_0(\eta_0^{1/2}x)$ - нижнее квазирешение.

Так как $F(x,u,Tu) = (\xi Tu - x)u^{1/2}$, то условие **(3)** будет выполнено, если мы покажем, что имеет соотношение

$$\tau F(x,u,T(\tau u)) - F(x,\tau u,Tu) = (\tau u)^{1/2} f(x,y,z,t) < 0, \tag{4.14}$$

где

$$f(x,y,z,t) = t(\xi e^{-ty}ch(tz) - x) - (\xi e^{-y}ch(z) - x); \tag{4.15}$$

$$y = \int_0^1 u^{1/2}ds; \quad z = \int_0^x u^{1/2}ds; \quad t = \tau^{1/2}; \quad y \leq a.$$

С этой целью докажем вспомогательное

Утверждение 2. *Пусть $\xi_1 = \xi, \xi_2 = \xi/(2-\xi)$ и x_i - вещественный корень уравнения*

$$\exp x_i = \xi_i(1 - x_i), \quad i = 1,2. \tag{4.16}$$

Пусть выполнено одно из условий:
(5). *если $1 < \xi \leq 2/(1-e^{-2})$, то $a \leq \min\{x_1, x_2/2\}$. (при $\xi > 2, x_2$ - наименьший из корней уравнения (4.16) для $i = 2$);*
(6). *если $\xi > 2/(1-e^{-2})$, то $a \leq x_1$.*

Тогда $f(x,y,z,t) < 0$ для всех $t \in (0,1), x \in [0,1), 0 \leq z \leq y \leq a$.

Доказательство. Проведем исследование на экстремум функции (4.15). Несложно проверить, что $f_x > 0; f_y = f_z = 0$ лишь при $t = 1; f(x,y,z,t) \to 0^-$ при $t \to 1^-$. Причем $0 \leq z \leq y \leq a$. В связи с этим $\max f(x,y,z,t) = \max\{f_1(t) = f(1,0,0,t),\ f_2(t) = f(1,a,a,t),\ f_3(t) = f(1,0,0,t)\}$. Сразу же отметим, что $f_3'(t) < 0$ при $\xi > 1$. Далее, уравнение $f_1'(t) = 0$, запишется $e^{at} = \xi(1-at)$, совпадает с (4.16) для $i = 1$ и имеет единственное решение $x_1 = at_1$ при всех $\xi > 1$. Помимо этого, $f_1''(t_1) < 0$. Аналогично, уравнение $f_2'(t) = 0$ запишется $(2-\xi)e^{2at} = \xi(1-2at)$, совпадает с (4.16) для $i = 2$ и при $1 < \xi \leq 2$ обладает единственным решением $x_2 = 2at_2$; при $2 < \xi \leq 2/(1-e^{-2})$ - двумя решениями $1 < x_2 = 2at_2 < 2 < x_3$ и, наконец, при $\xi > 2/(1-e^{-2})$ не имеет решений. Кроме того, $f_2''(t_2) < 0$. Тем самым, из условий **(5)**, **(6)** следует, что $t_1 \geq 1, t_2 \geq 1$. Итак, для всех $t \in (0,1), x \in [0,1]$ и $0 \leq z \leq y \leq a$ имеем $f(x,y,z,t) < 0$. Утверждение доказано.

Замечание 3. Более того, можно показать, что условия **(5)**, **(6)**, входящие в утверждение 2 являются также и необходимыми для выполнения неравенства $f(x,y,z,t) < 0$ при всех $t \in (0,1), x \in [0,1], 0 \leq z \leq y \leq a$.

Тем самым, с учетом утверждения 2 следует справедливость неравенства (4.14). Отсюда заключаем, что условие **(3)** выполнено.

Далее, поскольку $x_1 = at_1, a \leq \ln \xi$, тогда из (4.16) для $i = 1$ получаем, что $x_1 \leq \ln \xi$, где $\xi > 1$. В итоге, используя утверждение 2, приходим к справедливости цепочки неравенств

$$0 < \xi \exp(-a) - 1 \leq \xi Tu - x. \tag{4.17}$$

Так как $F(x,u,Tu) = (\xi Tu - x)u^{1/2}$, то в силу (4.17) непосредственно следует, что свойство **(2)** имеет место при $M = 0$.

Наконец, покажем, что условие **(4)** также выполняется. В связи с этим докажем

Утверждение 3. *Пусть $y(x) \geq 0$ для $x \in [0,1)$ и $y(x) \neq 0$. Тогда существуют $\alpha, \beta \in \Re^+$ такие, что выполняется неравенство*

$$\alpha(1-x) \leq \int_0^1 G(x,s)y(s)ds \leq \beta(1-x), \tag{4.18}$$

где $G(x,s)$- функция Грина, определяемая согласно (4.11).

Доказательство. Справедливость этого утверждения будет следовать из леммы 7.1 [25], если мы покажем, что найдется такое $\epsilon > 0$, что при любых x_1, x_2, удовлетворяющих включению $[x_1, x_2] \subset [0,1]$ имеет место неравенство

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,s)ds \geq \epsilon \int_0^1 G(x,s)ds. \tag{4.19}$$

С одной стороны, пусть $0 \leq x \leq (x_1+x_2)/2$, тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,s)ds \geq \int_{(x_1+x_2)/2}^{x_2} G(x,s)ds = -\int_{(x_1+x_2)/2}^{x_2} \ln s ds =$$

$$= -(s \ln s - s)|_{(x_1+x_2)/2}^{x_2} = a.$$

С другой стороны, пусть $(x_1+x_2)/2 \leq x \leq 1$, тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,s)ds \geq \int_{x_1}^{(x_1+x_2)/2} G(x,s)ds = -\ln x \int_{x_1}^{(x_1+x_2)/2} ds =$$

$$= -b \ln x \geq b(1-x).$$

Итак, для всех $x \in [0,1], a > b$ выполняется следующая оценка

$$\int_{x_1}^{x_2} G(x,s)ds \geq \min\{a, b(1-x)\} = b(1-x) = b\int_0^1 G(x,s)ds,$$

а следовательно и неравенство (4.19). Тем самым, приходим к справедливости соотношения (4.18). Утверждение доказано.

Ясно, что утверждение 3 означает выполнение условия **(4)**.

В итоге, суммируя полученные результаты, заключаем, что имеет место

Теорема 3. *Пусть* $v_0 = \nu^2 J_0(\eta_0^{1/2}x), w_0 = a^2$*- нижнее и, соответственно, верхнее квазирешения,* $0 \leq v_0 \leq w_0$*. Пусть* $a \geq \xi\lambda$*, выполняются неравенства (4.13) и постоянная a удовлетворяет условия утверждения 2. Тогда краевая задача (4.7), (4.8) обладает единственным решением* $u(x) \in [v_0, w_0]$*, монотонно убывающим по* x*.*
Пусть $n(n_0(x), t)$ *- решение задачи (4.5), (4.3) с начальным условием* $n(n_0(x), 0) = n_0(x), n_0(x) \in [\nu J_0^{1/2}(\eta_0^{1/2}x), a], n_0(x) \in L_+^\infty(0,1)$*. Тогда* $|x^{1/2}(n(n_0(x),t) - u^{1/2}(x))| \to 0$ *равномерно по* x *при* $t \to +\infty$*.*

Доказательство следует из теорем B и 2. При этом в теореме B мы считаем, что $x(u^2)_x \in L_+^\infty(0,1)$. Монотонность стационарного решения $u(x), \nu J_0^{1/2}(\eta_0^{1/2}x) \leq u(x) \leq a$, следует из оценки (4.17) и принципа максимума.

References

[1] Hyman J., Rosenau P. Analysis of nonlinear parabolic equations modelling plasma diffusion across a magnetic field// Lectures in Applied Mathematics. 1986. V.23. P.219-245.

[2] Rosenau P., Hyman J. Plasma diffusion across a magnetic field// Phys. D. 1986. V.20. P.444-446.

[3] Rosenau P., Turkel E. Long time asymptotics of a system for plasma diffusion// Transp. Theory and Statist. Phys. 1987. V.16, N 2-3. P.377-391.

[4] Kwong Y. Interior and boundary regularity of solutions to a plasma type equation// Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V.104, N 2. P.472-478.

[5] Bertsch M., Kamin S. A system of degenerate parabolic equations// SIAM J. Math. Anal. 1990. V.21, N 4. P.905-916.

[6] Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка// УМН. 1987. Т.42, N 2. С.135-176.

[7] Олейник О.А. Об уравнениях типа уравнений нестационарной фильтрации// Докл. АН СССР. 1957. Т.113, N 6. С.1210-1213.

[8] Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу-Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации// Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1958. Т.22, N 5. С.667-704.

[9] Калашников А.С. О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации// ЖВиМФ. 1967. Т.7, N 2.С.440-443.

[10] Калашников А.С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений// Вестн. МГУ. Сер. мат. мех. 1972. N 6. С.45-49.

[11] Сабинина Е.С. Об одном классе нелинейных вырождающихся параболических уравнений// Докл. АН СССР. 1962. Т.143, N 4. С.794-797.

[12] Сабинина Е.С. Об одном классе квазилинейных параболических уравнений, не разрешимых относительно производной по времени// Сиб. матем. журн. 1965. Т.6, N 5. С.1074-1100.

[13] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры// Соврем. пробл. матем. Новейшие достижения. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ АН СССР. 1987. Т.28. С.95-205.

[14] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

[15] Антонцев С.Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986.

[16] Aronson D.G. Regularity of flows in porous media: a survey// Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. V.1.N.Y.: Springer, 1988. P.35-49.

[17] De Mottoni, Schiaffino A., Tesei A. Attractivity properties of nonnegative solutions for a class of nonlinear degenerate parabolic problems// Ann. Math. Pura Appl. 1984. V.136. P.35-48.

[18] Aronson D.G., Crandall M.G., Peletier L.A. Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem// Nonlinear Anal., TMA. 1982. V.6, N 10. P.1001-1022.

[19] Peletier L.A. Asymptotic behavior of solutions of the porous media equation// SIAM J. Appl. Math. 1971. V.21. P.542-551.

[20] Aronson D.G., Peletier L.A. Large time behavior of solutions of the porous medium equation in bounded domains// J. Differ. Equat. 1981. V.39, N 3. P.378-412.

[21] Bertsch M. Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear diffusion equation// SIAM J. Appl. Math. 1982. V.42, N 1. P.66-76.

[22] Белоносов В.С., Зеленяк Т.И. Нелокальные проблемы в теории квазилинейных параболических уравнений. Новосибирск: НГУ, 1975.

[23] Зеленяк Т.И. О качественных свойствах решений квазилинейных смешанных задач для уравнений параболического типа// Матем. сборник. 1977. Т.104, N 3. С.486-510.

[24] Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука. 1990.

[25] Красносельский М.А. Положительные решения операторных уравнений. М.: Физматгиз, 1962.

[26] Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я. Приближенное решение операторных уравнений. М.: Наука, 1969.

[27] Guo D., Laksmikantham V. Nonlinear problems in abstract cones. London: Academic Press. 1988.

[28] Похожаев С.И. Об уравнениях вида $\triangle u = f(x, u, Du)$// Матем. сборник. 1980. Т.113, N 2. С.324-338.

[29] Похожаев С.И. Об эллиптических задачах в R^n с суперкритическим показателем нелинейности// Матем. сборник. 1991. Т.182, N 4. С.467-489.

[30] Митидиери Э., Похожаев С.И. Отсутствие глобальных положительных решений квазилинейных эллиптических неравенств// Докл. РАН. 1998. Т.359, N 4. С. 456-460.

[31] Bandle C. A priori estimates and the boundary value of solutions for a problem arising in plasma physics// Nonl. Anal. TMA. 1983. V.7, N 4. P.439-451.

[32] Rakotoson J. Un modéle non local en physique des plasmas: résolution par une méthode de degré topologique// Acta Appl. Math. 1985. V.4, N 1. P.1-14.

[33] Хатсон В., Пим Дж. Приложения функционального анализа и теории операторов. М.: Мир, 1983.

[34] Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

[35] Guo D., Laksmikantham V. Coupled fixed points of nonlinear operator with applications//Nonlinear Anal., TMA, 1987. V.11, N 5, P.623-632.

[36] Днестровский Ю.Н., Костамаров Д.П. Математическое моделирование плазмы. М.: Наука, 1982.

[37] Хоган Дж.Т. Многокомпонентные модели переноса в токамаке// Вычислительные методы ф физике. Управлямый термоядерный синтез. М.: Мир, 1980. С.142-177.

[38] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

УДК 517.946

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ДИФФУЗИИ ПЛАЗМЫ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ И ЕЕ РАВНОВЕСНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ

Г.А. Рудых, А.В. Синицын

Изучается простейшая одномерная модель баланса плотностей плазмы в установке типа токамак, сводящаяся к начально-краевой задаче для параболического уравнения второго порядка с неявным вырождением, содержащего нелокальные (интегральные) операторы. Задача о стабилизации нестационарных решений к стационарным сведена к исследованию разрешимости нелинейной интегродифференциальной краевой задачи. Получены достаточные условия на параметры изучаемой краевой задачи, обеспечивающие существование и единственность классического стационарного решения, для которого конструктивно построена область притяжения.
Библ. 38 наименований.

Краткая аннотация

Методами нелинейного анализа изучается разрешимость краевой задачи с нелокальными (интегральными) нелинейностями, возникающей при математическом моделировании ограниченной плазмы в установке типа токамак.