УДК 517.956+517.958

Г.А.Рудых, Э.И.Семенов

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ.I

1.Введение. Рассмотрим многомерное уравнение нелинейной теплопроводности

$$u_t = \nabla \cdot (K(u)\nabla u) \equiv \Delta(u), u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n, \qquad (1.1)$$

где $\Omega \subset \Re^n$ - ограниченная область; $\Re^+ = (0, \infty); \overline{\Re}^+ = \{t : 0 \leq t < +\infty\}; u(\mathbf{x}, t) \geq 0$ -температура среды; $K(u)$ - функция, определенная при всех $u \in \Re^+; K(u) > 0$ при $u > 0; K(0) \geq 0; K(u)$ - коэффициент нелинейной теплопроводности среды; $(u) = \int_0^t K(\xi)d\xi$. Далее, относительно функции (u) будем предполагать, что $(u) \in C^\infty(\Re^+) \bigcap C^1(\overline{\Re}^+), '(u) > 0$ для $u \neq 0, (0) = 0, ' \geq 0$, или $(u) \in C^\infty(\Re^+) \bigcap C(\overline{\Re}^+), (0) = 0, '(u) > 0$ для $u \neq 0, '(+0) = +\infty$. Уравнения вида (1.1) возникают во многих моделях математической физики, его исследование является актуальным для современной теории нелинейных уравнений с частными производными и ее приложений. Помимо этого, уравнение (1.1) принадлежат к классу, так называемых, вырождающихся параболических уравнений, строгая математическая теория которых берет свое начало в сравнительно недавних исследованиях. Укажем, например, работы [1-7] в которых обсуждаются некоторые особые свойства решений уравнения (1.1), связанные с его вырождением. Таким образом, нелинейное уравнение (1.1) является параболическим при $u > 0$, а при $u = 0$ вырождается в нелинейное эволюционное уравнение первого порядка.

Построению точных неотрицательных решений уравнения (1.1) посвящено большое число публикаций [1,5,6,8-26], в которых отмечается актуальность данного направления исследований.

В настоящей работе, которая примыкает к публикациям [8-11,14-16,19,20, 27-35], получены новые точные, неавтомодельные, анизотропные по пространственным переменным, явные неотрицательные решения уравнения (1.1) при

$K(u)=u^{\lambda},\lambda\in\Re$. В зависимости от параметра $\lambda\in\Re$ будут рассмотрены случаи, когда интеграл $\int\limits_0^1 K(u)u^{-1}du$ конечен, или равен $+\infty$, то есть

$$\int\limits_0^1 u^{\lambda-1}du\leq+\infty. \tag{1.2}$$

Ниже предлагается и исследуется оригинальная конструкция [33-35] решения многомерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t=\nabla\cdot(u^{\lambda}\nabla u), u\stackrel{\triangle}{=}u(\mathbf{x},t):\Omega\times\overline{\Re}^{+}\to\Re^{+},\mathbf{x}\in\Re^{n}, \tag{1.3}$$

где $\lambda\in\Re$ - параметр нелинейной среды, значения которого различны для различных процессов переноса тепла [3]. Показано, что при определенных предположениях предъявленная конструкция позволяет получить точные неотрицательные решения как класса уравнений пористой среды (нестационарной фильтрации) $\lambda>0$, так и класса уравнений (1.3) с отрицательным показателем λ в коэффициенте нелинейной теплопроводности. В частности, в этот класс укладываются, так называемые, уравнения быстрой $(-1<\lambda<0)$ и предельной $(\lambda=-1,n=2)$ диффузии. В основном, полученные в этой работе точные неотрицательные решения отмеченных выше уравнений не являются инвариантными с точки зрения групп точечных преобразований и групп Ли-Беклунда [36-37].

Наиболее близкие результаты к изложенным в настоящей работе получены в [8-10,12-16,18-20]. В частности в исследовании [19] предложен метод построения n - параметрического семейства точных неотрицательных решений $u(\mathbf{x},t)$ задачи Коши для уравнения нелинейной диффузии

$$u_t=\Delta u^{m},\ u(\mathbf{x},0)=u_0(\mathbf{x}),\mathbf{x}\in\Re^{n},t>0,$$

с начальными данными в виде конечной либо бесконечной меры, где $m\in\Re;m>0;n\in N;n\geq2$. Если $0<m<1$, то носитель меры есть гиперповерхность в $\Re^{n}$, а при $m>1$ начальная мера сосредоточена в области, ограниченной поверхностью второго порядка в $\Re^{k},k<n$. Помимо этого, в отмеченной работе получены новые точные неавтомодельные, анизотропные по

пространственным переменным, явные неотрицательные решения уравнения $u_t = \Delta \ln u, u = u(\mathbf{x}, t), \mathbf{x} \in \Re^n$, являющегося предельным случаем уравнения быстрой диффузии. Рассмотрены случаи, когда $n = 2$ (уравнение предельной диффузии) и $n = 3$. Хорошо известным свойством уравнений типа нестационарной фильтрации является конечность скорости изменения носителей их решений. Первые общие результаты о конечности скорости изменения носителей решений уравнений типа нестационарной фильтрации были установлены в работах [38-40]. Кроме того, в этих работах было доказано, что сходимость интеграла (1.2) является необходимым и достаточным условием конечной скорости распространения возмущений в процессах, описываемых уравнением (1.3). Другими словами, если интеграл (1.2) расходится, то $u(\mathbf{x}, t) > 0$ в $\Re^n$ при всех $t \in \Re^+$.

2. Вывод разрешающей системы для многомерного уравнения нелинейной диффузии. Введем в рассмотрение функции

$$Z_k(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_k(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_k(t)) + C_k(t), \tag{2.1}$$

где $\mathbf{x} \in \Re^n; A_k(t) = [a_{kij}(t)]$ -матрицы $n \times n; \mathbf{B}_k(t) = (b_{k1}(t), ..., b_{kn}(t))'$ -вектор-столбцы; $C_k(t)$- скалярные функции; $a_{kij}(t), b_{ki}(t), C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ - вещественные функции; $k = 1, 2; i, j = 1, 2, ..., n; (\cdot, \cdot)$ - скалярное произведение в $\Re^n$. Решения уравнения (1.3) будем отыскивать в следующем виде

$$u(\mathbf{x}, t) = [\lambda[Z_1(\mathbf{x}, t)]_+^p + \lambda[Z_2(\mathbf{x}, t)]_+^q]_+^{1/\lambda}, \tag{2.2}$$

где $\lambda, p, q \in \Re; \lambda \neq 0; [\cdot]_+ = \max\{[\cdot], 0\}$. Подставляя функцию (2.2) в уравнение (1.3),после несложных преобразований приходим к соотношению

$$\begin{gathered} pZ_1^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_1 + qZ_2^{q-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_2 = \\ = \left(\lambda p Z_1^{2p-1}\Delta Z_1 + p[p(\lambda+1)-\lambda]Z_1^{2p-2}|\nabla Z_1|^2\right) + \\ + \left\{\lambda q Z_2^{2q-1}\Delta Z_2 + q[q(\lambda+1)-\lambda]Z_2^{2q-2}|\nabla Z_2|^2\right\} + \\ +[\lambda p Z_1^{p-1}Z_2^q\Delta Z_1 + \lambda p(p-1)Z_1^{p-2}Z_2^q|\nabla Z_1|^2 + \end{gathered} \tag{2.3}$$

$$+\lambda q Z_1^p Z_2^{q-1}\Delta Z_2 + \lambda q(q-1)Z_1^p Z_2^{q-2}|\nabla Z_2|^2 + 2pqZ_1^{p-1}Z_2^{q-1}(\nabla Z_1, \nabla Z_2)].$$

Для разделения выражения (2.3) относительно функций Z_1, Z_2, определяемых формулой (2.1), воспользуемся следующим рассуждением, основанным на порядке однородности [48, с.178] каждого из слагаемых уравнения (2.3). Предварительно отметим, что $\Delta Z_k(\mathbf{x}, t) = trA_k(t)$ и введем в рассмотрение скалярные функции $Z_3 = |\nabla Z_1|^2, Z_4 = |\nabla Z_2|^2, Z_5 = (\nabla Z_1, \nabla Z_2)$. Тогда нетрудно убедиться, что функции $Z_k(\mathbf{x}, t), (k = 1, 2, \ldots, 5)$, входящие в соотношение (2.3) имеют одинаковую структуру. Действительно, каждая из них состоит из трех слагаемых: квадратичной $\sum\limits_{i,j=1}^{n} r_{ij}(t)x_i x_j$, линейной $\sum\limits_{i}^{n} s_i(t)x_i$ форм и скалярной функции $h(t)$. Рассмотрим порядок однородности каждого из слагаемых уравнения (2.3). Итак, имеем: первое слагаемое в левой части уравнения (2.3) имеет порядок однородности p, второе - q, каждое из слагаемых, стоящих в круглых скобках - $(2p-1)$, в фигурных скобках - $(2q-1)$, и, наконец, в квадратных скобках - $(p+q-1)$. Исследуя полученные порядки однородностей легко видеть, что функции Z_1, Z_2, входящие в уравнение (2.3) разделяются, например, при $q = 1$. В этом случае формула (2.2) принимает вид

$$u(\mathbf{x}, t) = \Big[\lambda [Z_1(\mathbf{x}, t)]_+^p + \lambda Z_2(\mathbf{x}, t)\Big]_+^{1/\lambda}, \tag{2.4}$$

а соотношение (2.3) запишется

$$\begin{gathered} pZ_1^{p-1}\frac{\partial}{\partial t}Z_1 + \frac{\partial}{\partial t}Z_2 = \Big(\lambda p Z_1^{2p-1}\Delta Z_1 + p[p(\lambda+1)-\lambda]Z_1^{2p-2}|\nabla Z_1|^2\Big) + \\ + \Big\{\lambda Z_2\Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2\Big\} + [\lambda p Z_1^{p-1}Z_2\Delta Z_1 + \lambda p(p-1)Z_1^{p-2}Z_2|\nabla Z_1|^2 + \\ + \lambda Z_1^p\Delta Z_2 + 2pZ_1^{p-1}(\nabla Z_1, \nabla Z_2)]. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Тем самым, приравнивая в (2.5) слагаемые с одинаковыми порядками однородности приходим к системе трех уравнений на функции Z_1, Z_2. Итак, имеет место

Теорема 1. *Многомерное уравнение нелинейной диффузии (1.3) имеет точное неотрицательное решение вида*

$$u(\mathbf{x}, t) = \Big[\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)]_+^p + \tag{2.6}$$

$$+\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)]\Big]_+^{1/\lambda},$$

если матрицы $A_k(t)$ *с элементами* $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$, *вектор-столбцы* $\mathbf{B}_k(t)$ *с компонентами* $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ *и скалярные функции* $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+), (i, j = 1, 2, \ldots, n, k = 1, 2)$ *связаны соотношениями*

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_2 = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2, \tag{2.7}$$

$$pZ_1 \frac{\partial}{\partial t} Z_1 = p\lambda Z_1 Z_2 \Delta Z_1 + \lambda Z_1^2 \Delta Z_2 +$$

$$+\lambda p(p-1) Z_2 |\nabla Z_1|^2 + 2pZ_1(\nabla Z_1, \nabla Z_2),$$

$$\lambda Z_1 \Delta Z_1 + [p(\lambda + 1) - \lambda] |\nabla Z_1|^2 = 0,$$

где Z_1, Z_2 *- функции, определяемые согласно (2.1);* $\lambda, p \in \Re; \lambda \neq 0$.

Соотношения (2.7) будем называть разрешающей системой для уравнения нелинейной диффузии (1.3). Причем с учетом введенных выше функций Z_3, Z_4, Z_5 первое и третье уравнения разрешающей системы (2.7) имеют порядок однородности один, а второе - два.

Наконец отметим, что уравнения, подобные (2.3) все слагаемые которых имеют одинаковый порядок однородности возникают и расщепляются методом Хироты [49], являющимся эффективным инструментом построения точных решений одномерных нелинейных эволюционных уравнений. В частности, этим методом (с незначительными модификациями и с использованием Паде-апроксимации), в работе [48, с.177-209] строятся точные одно и двухфазные решения широкого класса одномерных полулинейных параболических уравнений.

Решение (2.6) уравнения (1.3) можно назвать решением в виде "конечных сумм". Отметим, что в работе [12] предложен метод обобщенного разделения переменных, позволяющий строить частные точные решения

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{k} a_i(t) f_i(x), \tag{S}$$

широкого класса нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными вида

$$T^p(v) = X^q(v), \tag{E}$$

где $T^p(v)$ - многочлен степени p от функции $v(x,t)$ и ее производных по $t \in \Re^1$; $X^q(v)$ - многочлен степени q от функции $v(x,t)$ и ее производных по $x \in \Re^1$; $a_i(t), f_i(x)$ - некоторые достаточно гладкие функции, подлежащие определению. В конечном итоге, конструкции (S), (E) приводят к необходимости исследования совместности двух систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), одна из которых содержит только функции от t , а вторая - только функции от x. Другими словами, системы ОДУ, получаемые после подстановки конструкции (S) в исследуемое уравнение (E) являются переопределенными [47] (число уравнений превосходит число искомых функций, подлежащих определению). Представление частных точных решений в виде "конечных сумм" использовалось рядом авторов [1,8-12,14,22,25,41-43] для анализа различных классов нелинейных уравнений.

3. Исследование разрешающей системы уравнений. В общем случае, исследование разрешающей системы уравнений (2.7) связано с большими трудностями. Поэтому рассмотрим частный случай, когда (2.7) сводится к переопределенной (число уравнений больше числа искомых функций) системе алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ), разрешимой при определенных предположениях.

Итак, пусть $\xi = p(\lambda+1) - \lambda$,$\xi \neq 0$, тогда разрешающая система уравнений (2.7) запишется

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_2 = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_1 = \sigma Z_2 \Delta Z_1 + \tau Z_1 \Delta Z_2 + 2(\nabla Z_1, \nabla Z_2), \tag{3.2}$$

$$\lambda Z_1 \Delta Z_1 + \xi |\nabla Z_1|^2 = 0, \tag{3.3}$$

где $\sigma = p\lambda/\xi; \tau = \lambda/p; p, \lambda \in \Re; \lambda \neq 0; p \neq 0.$

Теорема 2. *Пусть* $A_k(t)$ *-симметричные матрицы с элементами* $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$, $\mathbf{B}_k(t)$ *- вектор-столбцы с компонентами* $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ *и* $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ *- скалярные функции. Тогда для того, чтобы функции* Z_1, Z_2, *определяемые соотношением (2.1) удовлетворяли разрешающей системе (3.1)-(3.3) необходимо и достаточно, чтобы* $A_k(t), \mathbf{B}_k(t), C_k(t)$ *удовлетворяли системе АДУ*

$$\dot{A}_2 = 2A_2^2 + \lambda(trA_2)A_2, \tag{3.4.1}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_2 = 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(trA_2)\mathbf{B}_2, \tag{3.4.2}$$

$$\dot{C}_2 = |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(trA_2)C_2, \tag{3.4.3}$$

$$\dot{A}_1 = 4A_1A_2 + \tau(trA_2)A_1 + \sigma(trA_1)A_2, \tag{3.4.4}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_1 = 2(A_1\mathbf{B}_2 + A_2\mathbf{B}_1) + \tau(trA_2)\mathbf{B}_1 + \sigma(trA_1)\mathbf{B}_2, \tag{3.4.5}$$

$$\dot{C}_1 = 2(\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2) + \tau(trA_2)C_1 + \sigma(trA_1)C_2, \tag{3.4.6}$$

$$\lambda(trA_1)A_1 + 2\xi A_1^2 = 0, \tag{3.4.7}$$

$$\lambda(trA_1)\mathbf{B}_1 + 2\xi A_1\mathbf{B}_1 = 0, \tag{3.4.8}$$

$$\lambda(trA_1)C_1 + \xi|\mathbf{B}_1|^2 = 0, \tag{3.4.9}$$

где $\sigma = p\lambda/\xi; \tau = \lambda/p; p, \lambda \in \Re; \lambda \neq 0; p \neq 0; \xi = p(\lambda+1) - \lambda; \xi \neq 0; trA_k = \sum_{i=1}^{n} a_{kii}(t)$ *- след матрицы* $_k(t); k = 1, 2.$

Доказательство. Пусть функции Z_1, Z_2 определяемые согласно (2.1) удовлетворяют разрешающей системе (3.1)-(3.3). Тогда в силу симметричности матриц $_k(t)$ имеем

$$|\nabla Z_k|^2 = (\mathbf{x}, A_k^2\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, A_k\mathbf{B}_k) + |\mathbf{B}_k|^2, \tag{3.5}$$

$$(\nabla Z_1, \nabla Z_2) = (\mathbf{x}, A_1A_2\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, A_1\mathbf{B}_2 + A_2\mathbf{B}_1) + (\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2),$$

причем

$$\nabla Z_k = A_k\mathbf{x} + \mathbf{B}_k, \Delta Z_k = \nabla \cdot (\nabla Z_k) = trA_k, \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_k = \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}, \dot{A}_k\mathbf{x}\right) + \left(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{B}}_k\right) + \dot{C}_k; \mathbf{x} \in \Re^n; k = 1, 2. \tag{3.7}$$

Легко видеть, что с учетом соотношений (3.5)-(3.7) из (3.1)-(3.3) следует система АДУ (3.4).

Покажем, что из уравнений (3.4.1)-(3.4.3) системы АДУ (3.4) следует справедливость соотношения (3.1). В самом деле, пусть $k = 2$, тогда исходя из (3.7) и принимая во внимание формулы (3.5), (3.6) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} Z_2 = \frac{1}{2}\Big(\mathbf{x}, [2A_2^2 + \lambda(trA_2)A_2]\mathbf{x}\Big) + (\mathbf{x}, 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(trA_2)\mathbf{B}_2) +$$

$$+|\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(trA_2)C_2 = \lambda(trA_2)\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2) + C_2\right] +$$

$$+\left[(\mathbf{x}, A_2^2\mathbf{x}) + 2(\mathbf{x}, A_2\mathbf{B}_2) + |\mathbf{B}_2|^2\right] = \lambda Z_2 \Delta Z_2 + |\nabla Z_2|^2.$$

Аналогично доказывается, что уравнений (3.4.4)-(3.4.6) системы АДУ (3.4) следует соотношение (3.2), а из (3.4.7)-(3.4.9) - (3.3). Теорема доказана.

Теоремы 1, 2 приводят к следующему результату

Утверждение 1. *Если симметричные матрицы $A_k(t)$ с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ и скалярные функции $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ удовлетворяют переопределенной системе уравнений (3.4), тогда функция (2.6) является точным неотрицательным решением многомерного уравнения нелинейной диффузии (1.3).*

Рассмотрим решение $u(\mathbf{x}, t)$ уравнения (1.3) вида (2.4) при $Z_1(\mathbf{x}, t) \equiv 0$, то есть

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\lambda\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]\right]_+^{1/\lambda}. \tag{3.8}$$

В этом случае в системе АДУ (3.4) $A_1(t) \equiv 0, \mathbf{B}_1(t) \equiv 0, C_1(t) \equiv 0$ и она сводится к системе ОДУ

$$\dot{A}_2 = 2A_2^2 + \lambda(trA_2)A_2, \dot{\mathbf{B}}_2 = 2A_2\mathbf{B}_2 + \lambda(trA_2)\mathbf{B}_2, \dot{C}_2 = |\mathbf{B}_2|^2 + \lambda(trA_2)C_2, \tag{3.9}$$

полученной и частично исследованной в работе [30]. Предположим, что при $t = 0$ заданы вещественная симметричная матрица $A_2(0) \in M_n(\Re)$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\Re)$ и скаляр $C_2(0) \in \Re$, где $M_n(\Re)$ - множество $n \times n$ матриц с элементами из $\Re; M_{n,k}(\Re)$ - множество $n \times k$ матриц с элементами из $\Re$ [44].Представим матрицу $A_2(0)$ в виде $A_2(0) = SD(0)S'$, где $S \in M_n(\Re)$ - ортогональная матрица, то есть $SS' = S'S = I; I$ - единичная матрица; $D(0) = diag[d_1(0), \dots, d_n(0)]$ - диагональная матрица; $d_l(0) \in \Re$ - собственные значения матрицы $A_2(0); l = 1, 2, \dots n$. Представимость любой вещественной симметричной матрицы в таком виде хорошо известна [44]. Покажем, что если функции $A_2(0), \mathbf{B}_2(0), C_2(0)$ определены, то решение задачи Коши для системы ОДУ (3.9) сводится к решению задачи Коши для некоторого скалярного нелинейного ОДУ. Более точно, справедлив один из основополагающих результатов этой работы.

Теорема 3. *Пусть заданы вещественные симметричные матрицы* $A_2(0), S \in M_n(\Re)$, *вектор-столбец* $\mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\Re)$ *и скаляр* $C_2(0) \in \Re$. *Пусть, помимо этого,* $z(t)$ *- вещественное решение задачи Коши*

$$\dot{z}(t) = \prod_{l=1}^{n}[1 - 2d_l(0)z(t)]^{-\lambda/2}, z(0) = 0, \dot{z}(t) = \frac{d}{dt}z(t). \tag{3.10}$$

Тогда решение задачи Коши

$$\dot{A}_2(t) = 2A_2^2(t) + \lambda[trA_2(t)]A_2(t),\ A_2(t)|_{t=0} = A_2(0), \tag{3.11}$$

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t) = 2A_2(t)\mathbf{B}_2(t) + \lambda[trA_2(t)]\mathbf{B}_2(t),\ \mathbf{B}_2(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_2(0), \tag{3.12}$$

$$\dot{C}_2(t) = |\mathbf{B}_2(t)|^2 + \lambda[trA_2(t)]C_2(t),\ C_2(t)|_{t=0} = C_2(0), \tag{3.13}$$

имеет вид

$$A_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0), \tag{3.14}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), \tag{3.15}$$

$$C_2(t) = \dot{z}(t)[C_2(0) + z(t)(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0))]. \tag{3.16}$$

Причем $A_2(t)$ *- симметричная матрица для всех* t *из области ее определения, где*

$$Q(t) = diag\Big[[1 - 2d_1(0)z(t)]^{-1}, \dots, [1 - 2d_n(0)z(t)]^{-1}\Big]; \tag{3.17}$$

$$A_2(0) = SD(0)S'; \lambda, d_l(0) \in \Re; \lambda \neq 0, d_l(0) \neq 0; l = 1, 2, \dots, n.$$

Доказательство. Пусть $A_2(t), \mathbf{B}_2(t), C_2(t)$ определяются формулами (3.14)-(3.17). Покажем, что эти функции являются решением задачи Коши (3.11)-(3.13). Для удобства записи, введем обозначение $v(t) = trA_2(t)$ и вычислим след матрицы $A_2(t)$. Исходя из (3.14) легко видеть, что справедлива цепочка равенств

$$v(t) = trA_2(t) = tr(\dot z(t)SQ(t)S'A_2(0)) = tr\,(\dot z(t)SQ(t)D(0)S') =$$
$$= \dot z(t)tr\,(Q(t)D(0)) = \dot z(t)\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(0)}{1-2d_k(0)z(t)}, \tag{3.18}$$

где $Q(t)$ - диагональная матрица вида (3.17). С другой стороны, так как $1-2d_l(0)z(t)\neq 0$ для $l = 1, 2, \ldots, n$ в силу условия $z(0) = 0$, то дифференцируя (3.10) по t, получим

$$\ddot z(t) = \lambda\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(0)}{1-2d_k(0)z(t)}\right]\dot z^2(t) = \lambda v(t)\dot z(t), \tag{3.19}$$

причем $\dot z(0) = 1, z(0) = 0$. Кроме того, непосредственным дифференцированием (3.17) нетрудно показать, что матрица $Q(t)$ удовлетворяет задаче Коши

$$\dot Q(t) = 2\dot z(t)D(0)Q^2(t) = 2\dot z(t)Q^2(t)D(0),\ Q(t)|_{t=0} = I. \tag{3.20}$$

Установим, что матрица $A_2(t)$ вида (3.14) удовлетворяет уравнению (3.11). Действительно, дифференцируя (3.14) и учитывая формулы (3.18)-(3.20) имеем

$$\dot A_2(t) = \ddot z(t)SQ(t)S'A_2(0) + \dot z(t)S\dot Q(t)S'A_2(0) =$$
$$= \lambda v(t)\dot z(t)SQ(t)S'A_2(0) + 2\dot z^2(t)SQ^2(t)D(0)S'A_2(0) =$$
$$= \lambda v(t)A_2(t) + 2\dot z^2(t)SQ(t)D(0)S'SQ(t)S'A_2(0) =$$
$$= \lambda v(t)A_2(t) + 2\dot z^2(t)\,(SQ(t)D(0)S')\,(SQ(t)D(0)S') =$$
$$= \lambda\,(trA_2(t))\,A_2(t) + 2A_2^2(t).$$

Убедимся, что вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ вида (3.15) является решением уравнения (3.12). Дифференцируя (3.15) и используя (3.18)-(3.20) получим

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t) = \ddot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) + \dot z(t)S\dot Q(t)S'\mathbf{B}_2(0) =$$

$$= \lambda v(t)\dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) + 2\dot z^2(t)SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0) =$$

$$= \lambda v(t)\mathbf{B}_2(t) + 2(\dot z(t)SQ(t)D(0)S')\left(\dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right) =$$

$$= \lambda\left(trA_2(t)\right)\mathbf{B}_2(t) + 2A_2(t)\mathbf{B}_2(t).$$

Помимо этого, из (3.17) следует, что $Q(t) = (I - 2z(t)D(0))^{-1}$, то есть $(I - 2z(t)D(0))\,Q(t) = I$ или, что тоже самое

$$Q(t) = I + 2z(t)Q(t)D(0). \tag{3.21}$$

Наконец, с учетом формул (3.18)-(3.21) нетрудно убедиться, что скалярная функция $C_2(t)$, определяемая согласно (3.16) удовлетворяет уравнению (3.13). В самом деле, дифференцируя (3.16) и принимая во внимание соотношения (3.18)-(3.21) приходим к справедливости цепочки равенств

$$\dot C_2(t) = \ddot z(t)C_2(0) + \dot z(t)\left(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)\right) + z(t)\left(\mathbf{B}_2(0), \dot{\mathbf{B}}_2(t)\right) =$$

$$= \lambda v(t)\dot z(t)C_2(0) + \dot z(t)\left(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)\right) + z(t)\Bigg(\mathbf{B}_2(0), 2A_2(t)\mathbf{B}_2(t) + \lambda v(t)\mathbf{B}_2(t)\Bigg) =$$

$$= \lambda v(t)\Bigg[\dot z(t)C_2(0) + z(t)\left(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)\right)\Bigg] + \Bigg(\mathbf{B}_2(0), [\dot z(t)I + 2z(t)A_2(t)]\mathbf{B}_2(t)\Bigg) =$$

$$= \lambda v(t)C_2(t) + \Bigg(\mathbf{B}_2(0), \dot z(t)S[I + 2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_2(t)\Bigg) =$$

$$= \lambda v(t)C_2(t) + \Bigg(\mathbf{B}_2(0), \dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(t)\Bigg) =$$

$$= \lambda v(t)C_2(t) + \Bigg(\dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)\Bigg) = \lambda\left(trA_2(t)\right)C_2(t) + |\mathbf{B}_2(t)|^2.$$

Окончательно, покажем, что $A_2(t)$ - симметричная матрица для всех t из области ее определения. Пусть $G(t) = SQ(t)S'$, где $Q(t)$ определяется согласно (3.17). Ясно, что $G(t)$ - невырожденная симметричная матрица. Тогда $A_2(t) = \dot z(t)G(t)A_2(0)$, где $A_2(0)$ - вещественная симметричная матрица. В первую очередь, убедимся, что матрицы $A_2(0)$ и $G(t)$ коммутируют. Действительно, так как справедлива цепочка равенств

$$A_2(0)G^{-1}(t) = A_2(0)[SQ(t)S']^{-1} = A_2(0)SQ^{-1}(t)S' =$$

$$= A_2(0)S[I - 2z(t)D(0)]S' = A_2(0)[SS' - 2z(t)SD(0)S'] =$$

$$= A_2(0)[I - 2z(t)A_2(0)] = A_2(0) - 2z(t)A_2^2(0) =$$

$$= [I - 2z(t)A_2(0)]A_2(0) = G^{-1}(t)A_2(0),$$

то $G(t)A_2(0) = A_2(0)G(t)$. Кроме того, $[G(t)A_2(0)]' = A_2'(0)G'(t) = A_2(0)G(t)$, то есть $G(t)A_2(0)$ - симметричная матрица. Поэтому таковой является и матрица $A_2(t)$. Теорема доказана.

Пример 1. Пусть $n = 3, d_l = d_l(0) \in \Re, l = 1,2,3$. Тогда, при $\lambda = -1$ решение задачи Коши (3.10) выражается в эллиптических функциях Якоби [45]. Рассмотрим случай, когда $d_1d_2d_3 < 0$. Если $z(t) > \frac{1}{2d_1} > \frac{1}{2d_2} > \frac{1}{2d_3}$, то решение задачи Коши (3.10) имеет вид

$$z(t) = \frac{d_2 - d_1 \operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1-d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{d_2/d_1}, k), k)}{2d_1d_2 \operatorname{cn}^2(\sqrt{d_2(d_1-d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{d_2/d_1}, k), k)}, \tag{1}$$

причем в этом случае $k = \sqrt{\dfrac{d_1(d_3-d_2)}{d_2(d_3-d_1)}}$. При выполнении цепочки неравенств $z(t) \geq \frac{1}{2d_1} > \frac{1}{2d_2} > \frac{1}{2d_3}$ получим

$$z(t) = \frac{d_3 - d_1 \operatorname{cn}^2(\sqrt{d_2(d_1-d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{(d_1-d_3)/d_1}, k), k)}{2d_1d_3 \operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1-d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{(d_1-d_3)/d_1}, k), k)}. \tag{2}$$

Если $\frac{1}{2d_1} > \frac{1}{2d_2} \geq z(t) > \frac{1}{2d_3}$, то

$$z(t) = \frac{1}{2d_3} + \frac{d_3 - d_2}{2d_2d_3} \operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1-d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{d_2/(d_2-d_3)}, k), k). \tag{3}$$

Окончательно, при $\frac{1}{2d_1} > \frac{1}{2d_2} > z(t) \geq \frac{1}{2d_3}$ находим

$$z(t) = \frac{1}{2}(d_1 - d_3 + (d_3-d_2)\operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1-d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{(d_3-d_1)/(d_3-d_2)}, k), k))\times$$

$$\times \frac{1}{d_2(d_1-d_3) + d_1(d_3-d_2)\operatorname{sn}^2(\sqrt{d_2(d_1-d_3)}t + \operatorname{sn}^{-1}(\sqrt{(d_3-d_1)/(d_3-d_2)}, k), k)}.$$

Исследуем случаи вырождения эллиптических функций. Так, при $d_2 = d_3$ из формул (1), (2) получим решения с тригонометрическими функциями

$$z(t) = \frac{d_2 - d_1 \sin^2(\sqrt{d_2(d_1-d_2)}t + \arcsin(\sqrt{d_2/d_1}))}{2d_1d_2 \cos^2(\sqrt{d_2(d_1-d_2)}t + \arcsin(\sqrt{d_2/d_1}))},$$

$$z(t) = \frac{d_2 - d_1 \cos^2(\sqrt{d_2(d_1-d_2)}t + \arcsin(\sqrt{(d_1-d_2)/d_1}))}{2d_1 d_2 \sin^2(\sqrt{d_2(d_1-d_2)}t + \arcsin(\sqrt{(d_1-d_2)/d_1}))}.$$

Если $d_1 = d_2$, тогда двумерная задача имеет решения в гиперболических функциях, вытекающие из выражений (2), (3)

$$z(t) = \frac{d_3 - d_1 \operatorname{sech}^2(\sqrt{d_1(d_1-d_3)}t + \operatorname{arth}(\sqrt{(d_1-d_3)/d_1}))}{2d_1 d_3 \operatorname{th}^2(\sqrt{d_1(d_1-d_3)}t + \operatorname{arth}(\sqrt{(d_1-d_3)/d_1}))},$$

$$z(t) = \frac{1}{2d_3} + \frac{d_3 - d_1}{2d_1 d_3} \operatorname{th}^2(\sqrt{d_1(d_1-d_3)}t + \operatorname{arth}(\sqrt{d_1/(d_1-d_3)})).$$

Итак, суммируя результаты теоремы 3 и примера 1, нетрудно получить точные, неавтомодельные, анизотропные по пространственным переменным, явные неотрицательные решения уравнения

$$u_t = \Delta \ln u, u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n,$$

для $n = 2$ и $n = 3$.

Замечание 1. Если ввести в рассмотрение матрицу

$$D(t) = diag[d_1(t), \ldots, d_n(t)], d_l(t) = \frac{d_l(0)}{1 - 2d_l(0)z(t)} \dot{z}(t), \tag{3.22}$$

связанную с матрицей $Q(t)$, определяемой согласно (3.17), соотношением

$$D(t) = \dot{z}(t)Q(t)D(0), D(0) = S'A_2(0)S, \tag{3.23}$$

то решение (3.14)-(3.16) задачи Коши (3.11)-(3.13) запишется

$$A_2(t) = SD(t)S', \tag{3.24}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = SD^{-1}(0)D(t)S'\mathbf{B}_2(0), \tag{3.25}$$

$$C_2(t) = \dot{z}(t)C_2(0) + z(t)\left(\mathbf{B}_2(0), SD^{-1}(0)D(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right), \tag{3.26}$$

где $d_l(t)$ - вещественные собственные значения матрицы $A_2(t); l = 1, 2, \ldots, n$.

Замечание 2. Из теоремы 3 и теоремы об единственности решения [46] следует, что формулами (3.14)-(3.16) определяются все решения задачи Коши (3.11)-(3.13) с вещественной симметричной начальной матрицей $A_2(0)$. В самом деле, в исследуемой задаче Коши (3.11)-(3.13) нелинейным является лишь уравнение (3.11). Единственность решения матричного уравнения (3.11) следует из того факта, что в любом ограниченном подмножестве $\Re^{n\times n}$ правая часть этого уравнения удовлетворяет условию Липшица, и значит, применима классическая теорема единственности решения для нормальной системы ОДУ.

Из утверждения 1 и теоремы 3 следует, что справедливо

Утверждение 2. *Если симметричная матрица $A_2(t)$, вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ и скалярная функция $C_2(t)$ имеют соответственно вид (3.14), (3.15), (3.16), тогда уравнение нелинейной диффузии (1.3) обладает точным, неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением (3.8).*

Так как функции $A_2(t), \mathbf{B}_2(t), C_2(t)$ нами определены (см. формулы (3.14)-(3.16) или (3.24)-(3.26)), то перейдем к исследованию системы ОДУ (3.4.4)-(3.4.6).

4. Существование решений задачи Коши для системы ОДУ (3.4.4)-(3.4.6).

Утверждение 3. *Пусть матрица $A_2(t)$ имеет вид*

$$A_2(t) = \dot{z}(t) SQ(t) S' A_2(0), \tag{4.1}$$

$u(t) = trA_1(t), v(t) = trA_2(t); A_1(0), A_2(0) \in M_n(\Re)$ - вещественные симметричные матрицы. Тогда задача Коши

$$\dot{A}_1(t) = 4A_1(t)A_2(t) + \tau v(t)A_1(t) + \sigma u(t)A_2(t), A_1(t)|_{t=0} = A_1(0), \tag{4.2}$$

имеет следующее решение

$$A_1(t) = [\dot{z}(t)]^{\tau/\lambda}\left[\sigma\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{\tau}{\lambda}} u(\eta) G^{-1}(\eta) A_2(0) d\eta + A_1(0)\right] G^2(t), \tag{4.3}$$

где $G(t) = SQ(t)S'; u(t)$ - функция, удовлетворяющая линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u(t) = \sigma\int_0^t K(t,\eta)u(\eta)d\eta + f(t), \tag{4.4}$$

с ядром

$$K(t,\eta) = \left[\frac{\dot z(t)}{\dot z(\eta)}\right]^{\tau/\lambda} \dot z(\eta) tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)], \qquad (4.5)$$

и свободным членом

$$f(t) = [\dot z(t)]^{\tau/\lambda} tr[A_1(0)G^2(t)], \qquad (4.6)$$

$\tau = \lambda/p; \sigma = \lambda p/\xi; \xi = p(\lambda+1)-\lambda$. *Кроме того, для симметричности $A_1(t)$ при всех t из области ее определения необходимо и достаточно, чтобы матрицы $A_1(0), A_2(0)$ коммутировали*

$$A_1(0)A_2(0) = A_2(0)A_1(0). \qquad (4.7)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что из уравнения (3.20), в силу (3.17) и соотношения $A_2(0) = SD(0)S'$, следует справедливость задачи Коши

$$\dot G(t) = 2\dot z(t)G^2(t)A_2(0), G(t)|_{t=0} = I. \qquad (4.8)$$

Легко видеть, что $G(t)A_2(0) = A_2(0)G(t)$ и $G(t)\dot G(t) = \dot G(t)G(t)$. Наконец, напомним, что функция $z(t)$ удовлетворяет помимо (3.10) ОДУ (3.19). С учетом этого покажем, что матрица $A_1(t)$ является решением задачи Коши (4.2). В самом деле, дифференцируя (4.3), принимая во внимание формулы (4.1), (4.2), (4.8) и учитывая, что $\tau/\lambda = 1/p, p \in \Re, p \neq 0$ имеем

$$\dot A_1(t) = \frac{1}{p}[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}-1}\ddot z(t)\left[\sigma \int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G^2(t) +$$

$$+\sigma \dot z(t)u(t)G^{-1}(t)A_2(0)G^2(t) +$$

$$+2[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma \int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G(t)\dot G(t) =$$

$$= \tau v(t)[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma \int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G^2(t) +$$

$$+\sigma u(t)\dot z(t)G(t)A_2(0) +$$

$$+4[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma \int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)d\eta + A_1(0)\right]G^2(t)\dot z(t)G(t)A_2(0) =$$

$$= \tau v(t)A_1(t) + \sigma u(t)A_2(t) + 4A_1(t)A_2(t).$$

Теперь, исходя из (4.3) вычислим след $u(t)$ матрицы $A_1(t)$. Итак, справедлива цепочка равенств

$$u(t) = trA_1(t) = tr\Bigg[\sigma\int_0^t [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)G^{-1}(\eta)A_2(0)G^2(t)d\eta +$$

$$+[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}A_1(0)G^2(t)\Bigg] =$$

$$= \sigma\int_0^t \left[\frac{\dot z(t)}{\dot z(\eta)}\right]^{\frac{1}{p}}\dot z(\eta)tr[G^{-1}(\eta)A_2(0)G^2(t)]u(\eta)d\eta + [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}tr[A_1(0)G^2(t)] =$$

$$= \sigma\int_0^t \left[\frac{\dot z(t)}{\dot z(\eta)}\right]^{\frac{1}{p}}\dot z(\eta)tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)]u(\eta)d\eta + f(t) =$$

$$= \sigma\int_0^t K(t,\eta)u(\eta)d\eta + f(t).$$

Откуда следует, что функция $u(t)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом (4.6). Тем самым мы показали, что матрица $A_1(t)$ является решением задачи Коши (4.2). Для завершения доказательства осталось установить тот факт, что соотношение (4.7) является необходимым и достаточным условием симметричности матрицы $A_1(t)$ для всех t из области определения последней.

Пусть равенство (4.7) выполняется. Отметим, что $A_2(0) = SD(0)S'$ и $G(t) = SQ(t)S'$ - невырожденная симметричная матрица. Учитывая сказанное, нетрудно убедиться, что матрицы $A_1(0)$ и $G^{-1}(t)$ коммутируют. Действительно, в этом случае имеет место цепочка равенств

$$A_1(0)G^{-1}(t) = A_1(0)[SQ(t)S']^{-1} = A_1(0)SQ^{-1}(t)S' =$$

$$= A_1(0)S[I - 2z(t)D(0)]S' = A_1(0)[SS' - 2z(t)SD(0)S'] =$$

$$= A_1(0)[I - 2z(t)A_2(0)] = A_1(0) - 2z(t)A_1(0)A_2(0) =$$

$$= A_1(0) - 2z(t)A_2(0)A_1(0) = [I - 2z(t)A_2(0)]A_1(0) = G^{-1}(t)A_1(0).$$

Следовательно $A_1(0)G(t) = G(t)A_1(0), A_1(0)G^2(t) = G^2(t)A_1(0)$. Заметим, что поскольку $[A_1(0)G^2(t)]' = [G^2(t)]'[A_1(0)]' = [G'(t)]^2[A_1(0)]' = G^2(t)A_1(0) = A_1(0)G^2(t)$, то матрица $A_1(0)G^2(t)$ является симметричной. Выше мы показали справедливость соотношения $A_2(0)G(t) = G(t)A_2(0)$. Тем самым $A_2(0)G^2(t) = G^2(t)A_2(0)$. Отсюда сразу следует симметричность матрицы $A_2(0)G^2(t)$. В самом деле, имеем $[A_2(0)G^2(t)]' = [G^2(t)]'[A_2(0)]' = [G'(t)]^2[A_2(0)]' = G^2(t)A_2(0) = A_2(0)G^2(t)$. Учитывая полученные результаты и переписывая матрицу $A_1(t)$ в форме

$$A_1(t) = \sigma[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\int_0^t [\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta\right]A_2(0)G^2(t) + [\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}A_1(0)G^2(t), \quad (4.9)$$

легко видеть, что она симметричная для всех t из области ее определения.

Докажем обратное. Пусть матрица $A_1(t)$, определяемая формулой (4.9) является симметричной. Поскольку $A_2(0)G^2(t)$ - симметричная матрица, то и матрица $A_1(0)G^2(t)$ должна быть симметричной, что эквивалентно, в силу симметричности $A_1(0), G^2(t)$ их коммутации $A_1(0)G^2(t) = G^2(t)A_1(0)$. Значит имеет место соотношение $G^{-2}(t)A_1(0) = A_1(0)G^{-2}(t)$, то есть матрицы $G^{-2}(t)$ и $A_1(0)$ коммутируют. Напомним, что $G^{-1}(t) = SQ^{-1}(t)S' = I - 2z(t)A_2(0)$. Отсюда следует, что $G^{-2}(t) = I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)$. В итоге, имеет место соотношение

$$[I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)]A_1(0) = A_1(0)[I - 4z(t)A_2(0) + 4z^2(t)A_2^2(0)].$$

Расписывая это равенство и учитывая, что $z(t) \neq 0$ получим

$$A_2(0)A_1(0) - z(t)A_2^2(0)A_1(0) = A_1(0)A_2(0) - z(t)A_1(0)A_2^2(0).$$

Поскольку $z(0) = 0$, то полагая $t = 0$, из последнего соотношения следует формула (4.7). Утверждение доказано.

Покажем, что из теоремы 3 и утверждения 3 следует

Теорема 4. *Пусть $A_2(t), A_1(t)$ - вещественные симметричные матрицы вида (4.1), (4.3), удовлетворяющие уравнениям (3.4.1), (3.4.4) и определенные при $t = 0$, то есть $A_2(t)|_{t=0} = A_2(0) \in M_n(\Re), A_1(t)|_{t=0} = A_1(0) \in M_n(\Re)$. Тогда существуют вещественные диагональные $D(0) = diag[d_1(0), \ldots, d_n(0)], \Lambda(0) = diag[\lambda_1(0), \ldots, \lambda_n(0)]$ и ортогональная $S \in M_n(\Re)$ матрицы такие, что*

$$A_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S', \quad (4.10)$$

$$A_1(t) = [\dot z(t)]_+^{\frac{1}{p}} S\left[\sigma \int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta) D(0) d\eta + \Lambda(0)\right] Q^2(t) S', \tag{4.11}$$

где $u(t)$ - решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом

$$f(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} tr[\Lambda(0) Q^2(t)]; \tag{4.12}$$

$Q(t)$ - диагональная матрица, определяемая согласно (3.17).

Доказательство. Ясно, что вещественные, симметричные матрицы $A_2(t)$, $A_1(t)$, определяемые посредством формул (4.1), (4.3) удовлетворяют задачам Коши (3.11), (4.2). Причем матрицы $A_2(0), A_1(0)$ коммутируют, то есть выполняется соотношение (4.7). С другой стороны, при определенных предположениях две вещественные, симметричные, коммутирующие матрицы $A_2(0), A_1(0)$ могут быть одновременно приведены к диагональному виду. В самом деле [44], необходимым и достаточным условием существования вещественной ортогональной матрицы S такой, что $S'A_1(0)S = \Lambda(0), S'A_2(0)S = D(0)$, является коммутация матриц $A_1(0), A_2(0)$. Отсюда имеем $A_1(0) = S\Lambda(0)S', A_2(0) = SD(0)S'$. Подставляя эти выражения в (4.1), (4.3) приходим к формулам (4.10), (4.11). Помимо этого, из (4.6) следует справедливость соотношения (4.12). Теорема доказана.

Теперь, поскольку функции $\mathbf{B}_2(t), A_2(t), A_1(t), v(t) = trA_2(t), u(t) = trA_1(t)$ нами определены, то покажем, что имеет место

Утверждение 4. *Пусть вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ и матрицы $A_2(t), A_1(t)$ определяются соответственно формулами (3.15) и (4.10), (4.11). Пусть, кроме того, функция $v(t)$ имеет вид (3.18), а $u(t)$ - решение линейного интегрального уравнения Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом (4.12). Тогда задача Коши*

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = [2A_2(t) + \tau v(t) I]\mathbf{B}_1(t) + [2A_1(t) + \sigma u(t) I]\mathbf{B}_2(t), \mathbf{B}_1(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_1(0), \tag{4.13}$$

обладает следующим решением

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} S Q(t) \left[\sigma \left(\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta) Q^{-1}(\eta) d\eta\right) Q(t) S' \mathbf{B}_2(0) + \right. \tag{4.14}$$

$$+2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0)+S'\mathbf{B}_1(0)\Big].$$

Доказательство. Введем в рассмотрение вектор-столбец

$$\mathbb{B}_1(t)=\sigma\left(\int_0^t[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta\right)Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)+ \tag{4.15}$$

$$+2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0)+S'\mathbf{B}_1(0).$$

Тогда формула (4.14) запишется

$$\mathbf{B}_1(t)=[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}SQ(t)\mathbb{B}_1(t). \tag{4.16}$$

Дифференцируя (4.16) по времени, приходим к соотношению

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t)=\frac{1}{p}[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}-1}\ddot z(t)SQ(t)\mathbb{B}_1(t)+[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left(S\dot Q(t)\mathbb{B}_1(t)+SQ(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t)\right).$$

Теперь, используя (3.19), (3.20), имеем

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t)=[2A_2(t)+\tau v(t)I]\mathbf{B}_1(t)+[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}SQ(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t). \tag{4.17}$$

Исходя из (4.15) вычислим $\dot{\mathbb{B}}_1(t)$. В результате получим

$$\dot{\mathbb{B}}_1(t)=\sigma[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)S'\mathbf{B}_2(0)+$$

$$+2\sigma\left(\int_0^t[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta\right)\dot z(t)Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)+$$

$$+2\dot z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0)+4z(t)\dot z(t)Q^2(t)D(0)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0).$$

Поскольку справедливо равенство (3.21), то

$$\dot{\mathbb{B}}_1(t)=\sigma[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)S'\mathbf{B}_2(0)+2\dot z(t)Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0)+$$

$$+2\sigma\left(\int_0^t[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta\right)\dot z(t)Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)+$$

После этого, нетрудно убедиться, что имеет место цепочка равенств

$$[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}SQ(t)\dot{\mathbb{B}}_1(t)=\sigma u(t)\dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)+$$

$$+2[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}S\left(\sigma\int_0^t[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta\right)Q^2(t)S'\times\dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)+$$

$$+2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}S\Lambda(0)Q^2(t)S'\times\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)=\sigma u(t)\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)+$$

$$+2[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}S\left[\sigma\int_0^t[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta+\Lambda(0)\right]Q^2(t)S'\times\dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)=$$

$$=\sigma u(t)I\mathbf{B}_2(t)+2A_1(t)\mathbf{B}_2(t)=[2A_1(t)+\sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t).$$

Таким образом, с учетом этого соотношения уравнение (4.17) принимает вид

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t)=[2A_2(t)+\tau v(t)I]\mathbf{B}_1(t)+[2A_1(t)+\sigma u(t)I]\mathbf{B}_2(t).$$

Тем самым, мы показали, что функция $\mathbf{B}_1(t)$ определяемая согласно (4.14) является решением этого уравнения. Наконец, учитывая, что $z(0)=0,\dot{z}(0)=1,Q(0)=I$, легко проверить, что предъявленное решение (4.14) удовлетворяет начальному условию. Итак, функция $\mathbf{B}_1(t)$ является решением задачи Коши (4.13). Утверждение доказано.

Тем самым, все подготовлено для того, чтобы перейти к исследованию разрешимости задачи Коши для ОДУ (3.4.6). Покажем, что в этом случае справедливо

Утверждение 5. *Пусть вектор-столбцы $\mathbf{B}_2(t),\mathbf{B}_1(t)$ и скалярная функция $C_2(t)$ определяются согласно (3.15), (4.14) и (3.16). Пусть помимо этого функция $v(t)=trA_2(t)$ имеет вид (3.18), а $u(t)=trA_1(t)$ - решение линейного уравнения Вольтерра второго рода (4.4) с ядром (4.5) и свободным членом (4.12). Тогда задача Коши*

$$\dot{C}_1(t)=\tau v(t)C_1(t)+\sigma u(t)C_2(t)+2\left(\mathbf{B}_1(t),\mathbf{B}_2(t)\right),C_1(t)|_{t=0}=C_1(0),\qquad(4.18)$$

имеет следующее решение

$$C_1(t)=[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{p}}\Bigg[C_1(0)+2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+2z^2(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+\sigma\left(\int_0^t[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\times\qquad(4.19)$$

$$\times\left[C_2(0)+z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\right]-$$

$$-\sigma\left(\int_0^t z(\eta)[\dot{z}(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\Bigg],$$

где функция $z(t)$ определяется из (3.10) и удовлетворяет соотношению (3.19).

Доказательство. Для упрощения записи формулы (4.19) введем обозначение

$$
\begin{gathered}
\mathbb{C}_1(t) = C_1(0) + 2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\
+2z^2(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \sigma\left(\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)d\eta\right)\times \\
\times\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\right] - \\
-\sigma\left(\int_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2.
\end{gathered}
\tag{4.20}
$$

Тем самым, формула (4.19) принимает вид

$$
C_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\mathbb{C}_1(t). \tag{4.21}
$$

Прежде всего отметим, что $z(0) = 0, \dot z(t) = 1$. Таким образом, легко видеть, что предъявленная функция (4.19) удовлетворяет начальному условию $C_1(t)|_{t=0} = C_1(0)$. Дифференцируя (4.21) по времени и принимая во внимание соотношения (3.19), (4.20) имеем

$$
\dot C_1(t) = \tau v(t)C_1(t) + [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\dot{\mathbb{C}}_1(t). \tag{4.22}
$$

Теперь, исходя из (4.20), нужно вычислить $\dot{\mathbb{C}}_1(t)$. Итак, учитывая формулу (3.20) получим

$$
\begin{gathered}
\dot{\mathbb{C}}_1(t) = 2\dot z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + 4z(t)\dot z(t)\left(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\
+4z(t)\dot z(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\
+8z^2(t)\dot z(t)\left(Q^3(t)\Lambda(0)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\
+\sigma[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)\left[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\right] + \sigma\left(\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)d\eta\right)\times \\
\times\Bigg\{\dot z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + 2z(t)\dot z(t)\left(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) + \\
+\dot z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2 + 4z(t)\dot z(t)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\Bigg\} -
\end{gathered}
$$

$$-4\sigma\dot z(t)\left(\int_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right).$$

Выражение, стоящее в фигурных скобках можно упростить. В самом деле, используя (3.21), нетрудно убедиться, что имеет место соотношение

$$\dot z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+2z(t)\dot z(t)\left(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+\dot z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2+4z(t)\dot z(t)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)=$$

$$=2\dot z(t)\left(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right).$$

Таким образом, заключаем, что

$$\dot{\mathbb{C}}_1(t)=2\dot z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+4z(t)\dot z(t)\left(Q^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+4z(t)\dot z(t)\left(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+8z^2(t)\dot z(t)\left(Q^3(t)\Lambda(0)D(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+\sigma[\dot z(t)]^{1-\frac{1}{p}}u(t)\left[C_2(0)+z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)\right]+$$

$$+2\sigma\dot z(t)\left(\int_0^t[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)-$$

$$-4\sigma\dot z(t)\left(\int_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right).$$

Умножая последнее соотношение на $[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}$ и принимая во внимание формулу (3.21), несложно проверить, что справедлива цепочка равенств

$$[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\dot{\mathbb{C}}_1(t)=2[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(Q(t)[I+2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+4z(t)[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(Q^2(t)\Lambda(0)[I+2z(t)Q(t)D(0)]S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+\sigma u(t)C_2(t)+2\sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int_0^t[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)-$$

$$-4\sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta\right)\left(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)=$$

$$=\sigma u(t)C_2(t)+2[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(Q^2(t)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+4z(t)[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(Q^3(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+2\sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)d\eta\right)\Big(Q^3(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\Big)-$$

$$-4\sigma[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}+1}\left(\int_0^t z(\eta)[\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}} u(\eta)d\eta\right)\Big(Q^3(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\Big)=$$

$$=\sigma u(t)C_2(t)+2(\mathbf{B}_1(t),\mathbf{B}_2(t)).$$

Подставляя это выражение в формулу (4.22) приходим к ОДУ

$$\dot C_1(t)=\tau v(t)C_1(t)+\sigma u(t)C_2(t)+2(\mathbf{B}_1(t),\mathbf{B}_2(t)).$$

Таким образом, заключаем, что скалярная функция $C_1(t)$, определяемая посредством формулы (4.19) является решением задачи Коши (4.18). Утверждение доказано.

Замечание 3.Нетрудно проверить, что если вместо $u(t)$ ввести в рассмотрение функцию

$$u_0(t)=u(t)[\dot z(t)]^{-\frac{1}{p}}, \tag{4.23}$$

тогда $u_0(t)$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$u_0(t)=\sigma\int_0^t K_0(t,\eta)u_0(\eta)d\eta+f_0(t), \tag{4.24}$$

с ядром

$$K_0(t,\eta)=\dot z(\eta)tr[Q^2(t)Q^{-1}(\eta)D(0)], \tag{4.25}$$

и свободным членом

$$f_0(t)=tr[Q^2(t)\Lambda(0)]. \tag{4.26}$$

При этом матрицы $A_k(t)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ и скалярные функции $C_k(t)$, $(k=1,2)$ принимают вид

$$A_2(t)=\dot z(t)SQ(t)D(0)S', \tag{4.27}$$

$$\mathbf{B}_2(t)=\dot z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0), \tag{4.28}$$

$$C_2(t)=\dot z(t)\left[C_2(0)+z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)\right], \tag{4.29}$$

$$A_1(t)=[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}S\left[\sigma\int_0^t \dot z(\eta)u_0(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta+\Lambda(0)\right]Q^2(t)S', \tag{4.30}$$

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}} SQ(t)\Bigg[\sigma\left(\int_0^t \dot z(\eta)u_0(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta\right)Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)+$$

$$+2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0)+S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg], \tag{4.31}$$

$$C_1(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\Bigg[C_1(0)+2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+2z^2(t)\Big(Q^2(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\Big)+ \tag{4.32}$$

$$+\sigma\left(\int_0^t \dot z(\eta)u_0(\eta)d\eta\right)[C_2(0)+z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0),S'\mathbf{B}_2(0)\right)+$$

$$+z(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2]-\sigma\left(\int_0^t z(\eta)\dot z(\eta)u_0(\eta)d\eta\right)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2\Bigg].$$

Замечание 4. Очевидно, что если ввести в расмотрение матрицу $\Lambda(t) = diag[\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t)]$ с вещественными собственными значениями вида

$$\lambda_k(t) = \left[\sigma d_k(t)\int_0^t [1-2d_k(0)z(\eta)][\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)d\eta+\lambda_k(0)\right]\times$$

$$\times[1-2d_k(0)z(t)]^{-2}[\dot z(t)]^{\frac{1}{p}},(k=1,2,\ldots,n),$$

то формула (4.30) запишется

$$A_1(t) = S\Lambda(t)S', \tag*{(4.30)$'$}$$

$$\Lambda(t) = [\dot z(t)]^{\frac{1}{p}}\left[\sigma\int_0^t [\dot z(\eta)]^{1-\frac{1}{p}}u(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta+\Lambda(0)\right]Q^2(t),$$

Наконец, отметим, что вопросу диагонализации квадратных матриц $A(\chi) = [a_{ij}(\chi)],(i,j=1,2,\ldots,n)$, элементы которых суть голоморфные функции комплексного переменного χ, посвящен §2, гл. II работы [50].

5. О свойствах решений системы алгебраических уравнений (3.4.7)-(3.4.9). Полученные в п.3, 4 результаты позволяют продолжить исследование разрешимости переопределенной системы уравнений (3.4).Это весьма сложная задача. Поэтому, подчиним исследование системы АДУ (3.4) изучению разрешимости уравнений (3.4.1)-(3.4.9), рассматриваемых в определенной последовательности. Известно [47], что переопределенные системы уравнений могут вообще не иметь решений. В связи с этим покажем, что система АДУ (3.4), которая является переопределенной имеет решения отличные от тривиального: $A_k(t)=0, \mathbf{B}_k(t)=\mathbf{0}, C_k(t)=0, (k=1,2)$.

Теперь, наша ближайшая задача заключается в исследовании разрешимости алгебраического уравнения (3.4.7) в классе диагональных матриц вида $(4.30)'$. Итак, из (3.4.7), $(4.30)'$ следует, что $\lambda_k(t)[\lambda u(t)+2\xi\lambda_k(t)]=0$, где $u(t)=trA_1(t)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)$; $\xi=p(\lambda+1)-\lambda; \xi\neq 0; \lambda\neq 0$. Тем самым, для любого $k=1,2,\ldots,n$ либо $\lambda_k(t)=0$, либо $\lambda_k(t)=-\frac{\lambda}{2\xi}u(t)$. Следовательно, все ненулевые $\lambda_k(t)$ равны между собой. Пусть $\mathcal{K}=\{k:\lambda_k(t)\neq 0\}=m\leq n$. Тогда из соотношения $\lambda u(t)+2\xi u(t)=0$ следует зависимость

$$\lambda m\cdot\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)+2\xi\sum_{\mathcal{K}}\lambda_k(t)=0.$$

Так как $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(t)=\sum_{\mathcal{K}}\lambda_k(t)=trA_1(t)\neq 0$ и $m=rankA_1(t)$, то $\lambda\cdot rankA_1(t)+2\xi=0$. Если ввести в рассмотрение функцию

$$\varphi(t)=-\frac{\lambda}{2\xi}u(t)=\frac{trA_1(t)}{rankA_1(t)},$$

тогда ясно, что $\Lambda(t)=\varphi(t)E_m, A_1(t)=\varphi(t)SE_mS'$, где $E_m=diag[e_1,\ldots,e_n]$; $e_k\in\{0,1\}$.

Итак, имеет место следующий результат

Утверждение 6. *Пусть* $A_1(t)=\varphi(t)SE_mS'\neq 0, E_m=diag[e_1,\ldots,e_n]$, $e_k\in\{0,1\},(k=1,2,\ldots,n), rankE_m=m\in\{1,2,\ldots,n\},\varphi(t)$ *- произвольная вещественная функция, обладающая тем свойством, что* $\varphi(t)\neq 0$ *для всех* t *из области определения* $A_1(t), S\in M_n(\Re)$ *- вещественная ортогональная матрица. Тогда, если* $m=-2\xi/\lambda$, *то* $A_1(t)$ *является решением матричного уравнения (3.4.7) и выполняется соотношение*

$$rankE_m=rankA_1(t)=-\frac{2\xi}{\lambda}, \tag{5.1}$$

где $\xi=p(\lambda+1)-\lambda;\xi\neq 0;\lambda,p\in\Re;\lambda\neq 0,p\neq 0$.

Доказательство. Очевидно, что каждая из матриц E_m эквивалентна [44] матрице $diag[1,\ldots,1,0,\ldots,0]$ в которой $e_k=1$ для $k=1,2,\ldots,m$ и $e_k=0$

для $k = m+1, \dots, n$. Тем самым, ниже не теряя общности будем предполагать, что $E_m = diag[1, \dots, 1, 0, \dots, 0]$. Легко видеть, что $E_m = E_m^2$, то есть матрица E_m является идемпотентной. Так как $A_1(t)$ и E_m связаны соотношением $A_1(t) = \varphi(t) S E_m S'$, причем $A_1(t) \neq 0, \varphi(t) \neq 0$, то матрицы $A_1(t)$ и E_m также эквивалентны. С другой стороны, известно, что для эквивалентности двух вещественных $n \times n$ матриц необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковый ранг. Из сказанного, в силу того, что $rank E_m = m$ и $m = -\frac{2\xi}{\lambda}$ следует справедливость цепочки равенств (5.1). Наконец, с учетом того, что $m = -\frac{2\xi}{\lambda}, E_m = E_m^2, \varphi(t) \neq 0$, нетрудно убедиться, что матрица $A_1(t) = \varphi(t) S E_m S'$ удовлетворяет уравнению (3.4.7). В самом деле, имеем

$$\lambda(trA_1)A_1 + 2\xi A_1^2 = \lambda m \varphi^2(t) S E_m S' + 2\xi \varphi^2(t) S E_m^2 S' =$$

$$= \lambda m \varphi^2(t) S (E_m - E_m^2) S' \equiv 0,$$

где $\lambda \in \Re; \lambda \neq 0; m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Причем, ясно, что $A_1(t) \in M_n(\Re)$ - вещественная симметричная матрица. Утверждение доказано.

Так как с одной стороны $\xi = -\frac{\lambda m}{2}$, а с другой $\xi = p(\lambda+1) - \lambda$, то параметры исследуемой системы АДУ (3.4) связаны соотношением $2p(\lambda+1) = \lambda(2-m)$. В этом случае $\tau = \frac{\lambda}{p}, \sigma = -\frac{2p}{m}, \lambda \neq 0, p \neq 0$.

Замечание 5. Если $\lambda = -\frac{2}{m}$, то из зависимости $2p(\lambda+1) = \lambda(2-m)$ следует, что либо $m = 2$, либо $p = 1$, где $m \in \{1, 2, \dots, n\}$. Итак, если $m = 2$, то $\lambda = -1, \tau = -\frac{1}{p}, \sigma = -p, \xi = 1$, если $p = 1$, то $\lambda = \tau = \sigma = -\frac{2}{m}, \xi = 1$.

В силу зависимости $m = -\frac{2\xi}{\lambda}$ и с учетом вида матрицы $A_1(t)$ уравнения (3.4.8), (3.4.9) соответственно запишутся

$$(I - E_m) S' \mathbf{B}_1(t) = 0, \tag{5.2}$$

$$|\mathbf{B}_1(t)|^2 = 2\varphi(t) C_1(t). \tag{5.3}$$

К исследованию выполнимости алгебраических уравнений (5.2), (5.3) мы вернемся ниже, после того, как будут найдены вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ и скалярная функция $C_1(t)$.

Всюду ниже, при фиксированном $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ будем отыскивать решения системы АДУ (3.4) при условии, что $A_1(t) = \varphi(t) S E_m S'$. Дальнейшее исследование системы АДУ (3.4) распадается на два независимых случая: $p = 2$ и $p \neq 2$.

Прежде чем, перейти к рассмотрению случая $p \neq 2$ сформулируем утверждение, которое нам понадобится в дальнейшем

Утверждение 7. *Пусть $p \neq 2$, тогда для того, чтобы матрицы*

$$A_1(t) = \varphi(t) S E_m S', \tag{5.4}$$

$$A_2(t) = \psi(t) S E_m S', \tag{5.5}$$

являлись решением переопределенной системы уравнений (3.4.1), (3.4.4), (3.4.7) достаточно, чтобы функции $\varphi(t), \psi(t)$ удовлетворяли системе ОДУ

$$\dot{\varphi}(t) = (\tau m + \sigma m + 4) \varphi(t) \psi(t), \tag{5.6}$$

$$\dot{\psi}(t) = (\lambda m + 2) \psi^2(t), \tag{5.7}$$

где $\varphi(t) \neq 0$ для всех t из области определения $A_1(t); \psi(t) \neq 0$ для всех t из области определения $A_2(t); \tau = \frac{\lambda}{p}; \sigma = -\frac{2p}{m}; \lambda \in \Re; m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Доказательство. Из утверждения 6 следует, что матрица $A_1(t)$ вида (5.4) является решением уравнения (3.4.7). Подставляя функцию $A_1(t)$ в матричное уравнение (3.4.4) и учитывая формулу (3.24), после несложных преобразований, приходим к равенству

$$\left[\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} - \tau tr A_2(t)\right] E_m = \left[4 E_m + \sigma m I\right] D(t),$$

где $D(t)$ - матрица, определяемая согласно (3.22). Это соотношение, в силу вида матрицы E_m, распадается на два равенства

$$\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} - \tau tr A_2(t) = (\sigma m + 4) d_k(t); k = 1, 2, \dots, m;$$

$$0 = \sigma m d_k(t); k = m + 1, \dots, n,$$

причем $\sigma m + 4 = 2(2 - p) \neq 0$. Так как $\sigma m = -2p \neq 0$, то $d_k(t) \equiv 0$ для $k = m + 1, \dots, n$. Тем самым, если $k = 1, 2, \dots, m$, то собственные значения $d_k(t)$

матрицы $A_2(t)$ не зависят от k и имеют вид

$$d_k(t) = \frac{1}{\sigma m + 4}\left[\frac{\dot{\varphi}(t)}{\varphi(t)} - \tau tr A_2(t)\right] \triangleq \psi(t), \tag{5.8}$$

то есть $D(t) = \psi(t)E_m$. Итак, если матрица $A_2(t)$ определяется согласно (5.5), то $trA_2(t) = m\psi(t)$. Формула (5.8) позволяет получить ОДУ (5.6). С другой стороны, несложно убедиться, что из (3.4.1) с учетом (5.5) следует ОДУ (5.7). Утверждение доказано.

Следствие 1. Если матрица $A_2(t)$ определяется формулой (5.5), тогда

$$A_2(t) = \frac{d(0)\dot{z}(t)}{1 - 2d(0)z(t)} S E_m S', \tag{5.9}$$

причем

$$\psi(t) = \psi(0)[1 - 2\psi(0)z(t)]_+^{-(\lambda m+2)/2}, \tag{5.10}$$

где $\lambda \in \Re; \lambda \neq 0; m \in \{1, 2, \ldots, n\}; \psi(0) \neq 0; d(0) \neq 0$.

Доказательство. Вводя обозначение $q_k(t) = [1 - 2d_k(0)z(t)]^{-1}$, перепишем матрицу (3.17) в виде $Q(t) = diag[q_1(t), \ldots, q_n(t)]$. Из утверждения 7 следует, что $d_k(0) \equiv 0$ для $k = m+1, \ldots, n$ и $d_k(0) = \psi(0) \triangleq d(0)$ для $k = 1, 2, \ldots, m$. Поэтому $q_k(t) = [1 - 2d(0)z(t)]^{-1}$, при $k = 1, 2, \ldots, m$ и $q_k(t) = 1$, при $k = m + 1, \ldots, n$. При этом мы учли, что $z(0) = 0$. Тем самым,

$$Q(t) = [1 - 2d(0)z(t)]^{-1}E_m + (I - E_m). \tag{5.11}$$

С другой стороны, из (5.8) в силу (3.22) получим, что

$$\psi(t) = d(0)[1 - 2d(0)z(t)]^{-1}\dot{z}(t), \tag{5.12}$$

где функция $\dot{z}(t)$ определяется согласно (3.10) и в рассматриваемом случае принимает вид

$$\dot{z}(t) = [1 - 2d(0)z(t)]^{-\lambda m/2}, z(0) = 0. \tag{5.13}$$

Итак, из (5.5) с учетом (5.12) следует, что имеет место формула (5.9). Кроме того, соотношения (5.12), (5.13) приводят к справедливости (5.10). Следствие доказано.

Замечание 6. Если $\lambda m+2 \neq 0, p \neq 2$, то задача Коши (5.13) имеет решение

$$z(t)=\frac{1}{2d(0)}-\frac{1}{2d(0)}[1-(\lambda m+2)d(0)t]_{+}^{2/(\lambda m+2)}, \tag{5.14}$$

причем

$$\psi(t)=\psi(0)[1-(\lambda m+2)\psi(0)t]^{-1}. \tag{5.15}$$

Если $\lambda=-\frac{2}{m}, p \neq 2$, то решение задачи Коши (5.13) определяется формулой

$$z(t)=\frac{1}{2d(0)}[1-\exp(-2d(0)t)], \tag{5.16}$$

причем $\psi(t)=\psi(0)$. Здесь $\lambda \in \Re; \lambda \neq 0; \psi(0)=d(0) \neq 0; m \in \{1,2,\ldots,n\}$.

References

[1] Кершнер Р. О некоторых свойствах обобщенных решений квазилинейных вырождающихся параболических уравнений// Acta Math.Acad.Sci. Hungaricae.1978. Т.32, N3-4.С.301-330.

[2] Антонцев С.Н. Локализация решений вырождающихся уравнений механики сплошной среды. Новосибирск: Институт гидродинамики СО АН СССР, 1986.

[3] Мартинсон Л.К. Исследование математической модели процесса нелинейной теплопроводности в средах с объемным поглощением// Математическое моделирование. Процессы в нелинейных средах. М.:Наука, 1986. С.279-309.

[4] Калашников А.С. Некоторые вопросы качественной теории нелинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка// УМН. 1987. Т.42, N.2 (254). С.135-176.

[5] Галактионов В.А., Дородницын В.А., Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Самарский А.А. Квазилинейное уравнение теплопроводности : обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры //Соврем.пробл.матем. Новешие достижения. Итоги науки и техники. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1987. Т.28. С.95-205.

[6] Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

[7] Aronson D.G. Regularity of flows in porous media: a syrvey//Nonlinear Diffusion Equations and Their Equilibrium States. V.1.N.Y.:Springer, 1988.P.35-49.

[8] Галактионов В.А., Посашков С.А. Неограниченное точное решение уравнения нелинейной теплопроводности с источником// Препринт. ИММ АН СССР N42. Москва 1988.

[9] Галактионов В.А., Посашков С.А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями //Журн.вычис.матем. и матем.физики.1989. Т.29, N 4. С.497-506.

[10] Галактионов В.А., Посашков С.А. Примеры несимметричного полного остывания и режимов с обострением для квазилинейных уравнений теплопроводности //Препринт. Инс-т прикл. матем. РАН N 21. Москва. 1994. 24 с.

[11] Галактионов В.А., Посашков С.А. Точные решения и инвариантные пространства для нелинейных уравнений градиентной диффузии //Журн.вычис.матем. и матем.физики.1994. Т.34, N 3. С.373-383.

[12] Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Обобщенное разделение переменных для дифференциальных уравнений с полиномиальными нелинейностями //Дифференц.уравнения. 1995. Т.31, N 2. С.253-261.

[13] Galaktionov V.A. On new exact blow-up solutions for nonlinear heat conduction equations with source and applications //J.Differential and Integral Equations. 1990. V.3, N 5. P.863-874.

[14] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit so lution to evolution equations with quadratic nonlinearities //School of Mathematics. Univ.Bristol.1991. Report N AM-91-11, 39 p.

[15] Galaktionov V.A. Invariant subspaces and new explicit so lution to evolution equations with quadratic nonlinearities //Proceedings of the Royal Society of Edinburgh. 1995. V.125A. P.225-246.

[16] King J.R. Exact multidimensional solutions to some nonlinear diffusion equations //Quart.J.Mech.Appl.Math. 1993. V. 46, N 3. P.419-436.

[17] Пухначев В.В. Преобразование эквивалентности и скрытая симметрия эволюционных уравнений //Докл. АН СССР.Т.294.N3.С.535-538.

[18] Пухначев В.В. Преобразования взаимности радиальных уравнений нелинейной теплопроводности //Записки научных семинаров ПОМИ. 1994. Т.213. С.151-163.

[19] Пухначев В.В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии //Прикл.механика и технич.физика. 1995. Т.36, N 2. С.23-31.

[20] Meirmanov A.M., Pukhnachev V.V., Shmarev S.I. Evolution equations and Lagrangian coordinates. Berlin, New York: Walter de Gruyter. 1997.

[21] Косыгина Е.Р. Об анизотропных точных решениях многомерного уравнения нестационарной фильтрации//Журн.вычис.матем. и матем. физики.1995. Т.35, N 2. С.241-259.

[22] Olver P.J. Symmetry and explicit solutions of partial differential equations//Preprint University of Minnesota. 1991.

[23] Olver P.J. Direct reduction and differential constrains// Proceedings Roy. Soc. London. A.1994.V.444, N.1922.P.509-523.

[24] Сидоров А.Ф. Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации// Докл. АН СССР. 1985. Т.280, N1. С.47-51.

[25] Титов С.С. О движении фронта нелинейной диффузии// Прикл. механика и технич. физика. 1996. Т.37, N4. С.113-118.

[26] Bersch M., Kersner R., Peletier L.A. Positivity versus localization in degenerate diffusion equations// Nonlinear Anal. Theory, Meth. Appl. 1985.V.9, N10. P.987-1008.

[27] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Коммутационные представления и преобразования Беклунда для нелинейных эволюционных уравнений с одной пространственной переменной. Иркутск, 1990. 74 с. (Препринт N 7/ИрВЦ СО АН СССР).

[28] Rudykh G.A.,Semenov E.I. Application of Liouville's equation to construction of special exact solutions for the quasilinear heat equation //IMACS Ann.Comput. and Appl. Math. 1990. V.8. P.193-196.

[29] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Об одном подходе построения частных точных решений квазилинейного уравнения теплопроводности с N-пространственными переменными. Иркутск, 1991. 21 с. (Препринт N 6/ИрВЦ СО АН СССР).

[30] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Построение точных решений многомерного квазилинейного уравнения теплопроводности //Журн. вычис. матем. и матем. физики.1993. Т.33, N 8. С.1228-1239.

[31] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Новые точные решения одномерного уравнения нелинейной диффузии //Сиб. матем.журн. 1997. Т.38, N 5.С.1130-1139.

[32] Рудых Г.А., Семенов Э.И. О новых точных решениях одномерного уравнения нелинейной диффузии с источником (стоком) //Журн. вычис. матем. и матем. физики. 1998. Т.38, N 6.С.971-977.

[33] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Точные неотрицательные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии //Сиб. матем. журн.1998. Т.39, N 5.С.1129-1138.

[34] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Точные неавтомодельные решения уравнения $u_t = \Delta \ln u$ //Матем. заметки (принята к публикации).

[35] Рудых Г.А. Точные неавтомодельные решения многомерного уравнения нелинейной диффузии//Докл. РАН. 1998. Т.358, N3. С.323-324.

[36] Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

[37] Ибрагимов Н.Х. Группы преобразований в математической физике. М.: Наука, 1983.

[38] Олейник О.А., Калашников А.С., Чжоу-Юй-Линь. Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации //Изв. АН СССР. Сер.мат. 1958. Т.22. N 5. С.667-704.

[39] Калашников А.С. О возникновении особенностей у решений уравнения нестационарной фильтрации //Журн. вычис. матем. и матем. физики.1967. Т.7, N 2. С.440-443.

[40] Калашников А.С. Об уравнениях типа нестационарной фильтрации с бесконечной скоростью распространения возмущений//Вестн. МГУ.Сер.мат.мех. 1972. N 6.С.45-49.

[41] Титов С.С. Метод конечномерных колец для решения нелинейных уравнений математической физики//Аэродинамика. Саратов: Саратов.универ. 1988, вып.11. С.104-110.

[42] Похожаев С.И. Об одной задаче Л.В.Овсянникова// Прикл. механика и технич. физика. 1989. N2. С.5-10.

[43] Галактионов В.А., Посашков С.А., Свирщевский С.Р. Об инвариантных множествах и точных решениях нелинейных эволюционных уравнений с квадратичными нелинейностями// Препринт. ИПМ РАН N22. Москва 1994.

[44] Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.

[45] Ахиезер Н.И. Элементы теории эллиптических функций. М.:Гостехиздат, 1948.

[46] Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.:Мир, 1970.

[47] Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений. М.:Наука, 1978.

[48] Маслов В.П., Данилов В.Г., Волосов К.А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. М.: Наука, 1987.

[49] Хирота Р. Прямые методы в теории солитонов// В кн. Солитоны. Под ред. Р.Буллафа, Ф.Кодри. М.: Мир, 1983.

[50] Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.

Рудых Г.А., Семенов Э.И.
Россия, 664033, г.Иркутск, ул. Лермонтова, 134,
Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН,
отдел динамики систем,
(395-2) 31-14-09,
E-mail: rudykh@icc.ru., semenov@icc.ru.

УДК 517.956+517.958

Рудых Г.А., Семенов Э.И.**Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии. I.**

Для многомерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n,$$

предложена оригинальная форма решений

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\lambda [\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)]_+^p + \lambda [\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)] \right]_+^{1/\lambda},$$

с помощью которой исследование исходного уравнения сведено к изучению конечномерной переопределенной (число уравнений больше числа искомых функций), системе алгебро-дифференциальных уравнений. Здесь $A_k(t)$ - вещественные симметричные матрицы с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+), \mathbf{B}_k(t)$ -вектор-столбцы с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ и $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ - скалярные функции; $\Omega \subset \Re^n$ - ограниченная область; $\Re^+ = (0, \infty); \lambda, p \in \Re; \lambda, p \neq 0; k = 1, 2.$

Получено явное решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений и изучены свойства алгебраических уравнений. Найдено многопараметрическое семейство новых точных, неавтомодельных, анизотропных по пространственным переменным, явных неотрицательных решений исследуемого уравнения при $A_1(t) \equiv 0, \mathbf{B}_1(t) \equiv 0, C_1(t) \equiv 0.$
Библиография: 50 наименований.

Рудых Геннадий Алексеевич
Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН,
664033, г.Иркутск, ул. Лермонтова, 134
тел.раб. (395-2) 31-14-09
тел.дом. (395-2) 46-76-65
E-mail: rudykh@icc.ru.

Семенов Эдуард Иванович
Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН,
664033, г.Иркутск, ул. Лермонтова, 134
тел.раб. (395-2) 31-14-09
тел.дом. (395-2) 33-51-17
E-mail: semenov@icc.ru.

Переписку вести с Рудых Г.А.

Rudykh G.A., Semenov E.I. **Existence and construction of anisotropic solutions of multi-dimensional nonlinear diffusion equation.I.**

The original form of solutions

$$u(\mathbf{x},t) = \left[\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)]_+^p + \lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)]\right]_+^{1/\lambda},$$

for multi-dimensional nonlinear diffusion equation

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x},t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n,$$

is given. The investigation of initial equation is reduced to the finite-dimensional overdeterminate (the number of equations is more than the number of required functions) system of algebro-differential equations using this form. Here $A_k(t)$ are real symmetrical matrixes with elements $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+), \mathbf{B}_k(t)$ are vector-columns with components $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ and $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ are scalar functions; $\Omega \subset \Re^n$ is bounded domain; $\Re^+ = (0, \infty); \lambda, p \in \Re; \lambda, p \neq 0; k = 1, 2$. The explicit solution of Cauchy problem for the system of ordinary differential equations is obtained and the properties of algebraic equations are studied. The multi-parametrical family of new exact, non-self-similar, anisotropic on space variables, explicit non-negative solutions of the studied equation is constructed.
References: 50.