Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО "ИРКУТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА В ПАКЕТЕ MAPLE

Методические указания к практическим занятиям

Иркутск
Издательство ИГУ
2009

УДК 519.3

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ ИГУ
Рецензент: д-р физ.мат. наук М.В. Фалалеев

Геометрические приложения определенного интеграла в пакете Maple: Метод. указания к практ. занятиям/сост.: О.А. Романова О.А., Е.Л. Зимирева. – Иркутск: Изд-во Иркут. гос. ун-та, 2009. - 31 с.

Изложены основные понятия из теории определенного интеграла, показана возможность применения системы символьных исчислений Maple при решении задач из раздела по геометрическим приложениям определенного интеграла, приведены примеры решений задач в среде Maple.

Предназначены для студентов 1-2-го курсов университета, обучающихся по специальностям "Математические методы в экономике" и "Математика".

Библиогр. 4 назв.

# Оглавление

# 1 Площадь криволинейной трапеции и криволинейного сектора

Рассмотрим задачу о вычислении площади криволинейной трапеции (рис. 1).

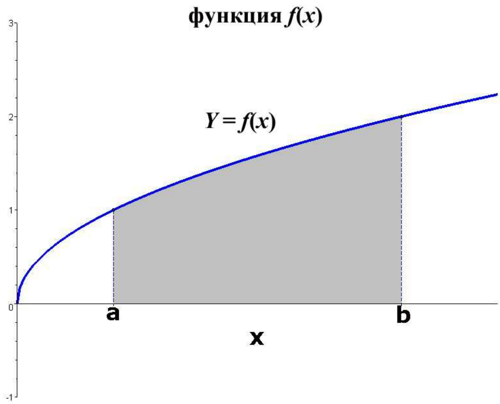


Рис. 1.

**Определение 1.1.** Криволинейной трапецией называется фигура (рис.1), ограниченная графиком заданной на сегменте $[a, b]$ непрерывной и неотрицательной функции $f(x)$, перпендикулярными к оси $Ox$ прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком оси $Ox$ между точками $a$ и $b$ [1].

**Утверждение 1.1.** Криволинейная трапеция представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой вычисляется по формуле [1]:

$$S = \int_b^a f(x)dx, \tag{1.1}$$

где $f(x)$ – известная функция. Приведем полный текст команд, которые позволяют создать рисунок 1. С подробным описанием команд можно ознакомиться в [2].

```
> restart:
with(plottools):
with(plots):
a1:=plot(x^(1/2), x=0..1, filled=true, color=white):
> a2:=plot(x^(1/2), x=4..5, filled=true, color=white):
>a3:=plot (x^(1/2), x=1..4, y=-1..3, title='функция f(x)',
xtickmarks=[1='a',4='b'], thickness=2, filled=true, color=grey):
> a4:=plot(x^(1/2),x=0..5,color=blue):
>a5:=textplot([2,2,'f(x)' ],align=ABOVE,RIGHT):
> b1:=display (point([1,1], color=black, symbol=circle),
point([4,2], color=black, symbol=circle), line([1,1], [1,0], color=
blue, linestyle=3), line([4,2], [4,0], color=blue, linestyle=3)):
> display({ a1, a2, a3, a4,a5,b1});
```

**Определение 1.2.** Назовем криволинейным сектором плоскую фигуру, ограниченную непрерывной кривой $L$, заданной уравнением $\rho = \rho(\phi)$, и двумя лучами, составляющими с полярной осью углы $\alpha$ и $\beta$ [1].

**Утверждение 1.2.** Криволинейный сектор представляет собой квадрируемую фигуру, площадь которой может быть вычислена по формуле [1]:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(x)dx. \tag{1.2}$$

В случае, когда уравнения кривых заданы в декартовой системе координат, формула вычисления имеет вид:

$$S = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)]dx, \qquad (1.3)$$

где $y_1(x) < y_2(x)$. Приведем список команд, с помощью которых создан рисунок 2,

*> restart:*
*with(plottools):*
*with(plots):*
*a1:=plot([x^2,4], x=-3..3, color=[black, red],*
*legend=['y1', 'y2'], xtickmarks=[-2='a',2='b'], thickness=2):*
*> b1:=display(point([-2,4], color=cyan, symbol=box), point([2,4], color=cyan,symbol=box), line([-2,4], [-2,0], color=blue, linestyle=3), line([2,4], [2,0], color=blue, linestyle=3)):*
*> display({a1, b1});*

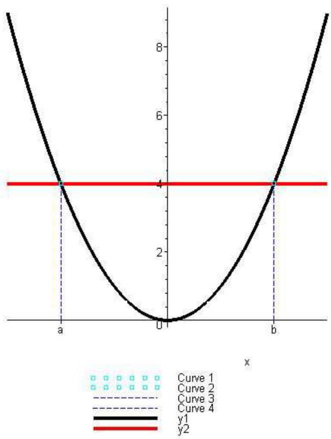


Рис. 2.

В случае, когда фигура ограничена кривыми, заданными в параметрическом виде $x = x(t), y = y(t)$, площадь фигуры можно вычислить по любой из следующих трех формул:

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t)dt, \tag{1.4}$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} x'(t)y(t)dt, \tag{1.5}$$

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} [x(t)y'(t) - x'(t)y(t)]dt. \tag{1.6}$$

В случае, когда уравнения кривых заданы в полярной системе координат, формула вычисления имеет вид:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(x)dx. \tag{1.7}$$

**Пример 1.1.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 2x + 6$ и прямой $y = x - 1$.

Изобразим на плоскости исходные кривые и найдем их точки пересечения (рис. 3).

Так как в примере функция задана неявно, то воспользуемся в пакете Maple командой *implicitplot* для построения неявно заданной функции. Для наглядности рисунка используем опции двумерной графики *color* и *thickness*, цвет и толщина кривой соответственно, получим:

```
> restart:
with(plots):
implicitplot([y^2=2*x+6, y=x-1], x=-5..6, y=-5..5, thickness=2,
color=green);
```

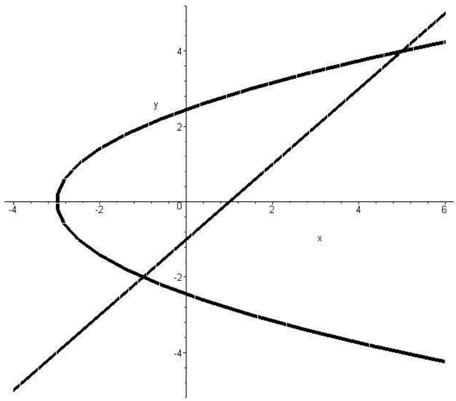


Рис. 3.

Аналитически решая систему уравнений, находим точки пересечения графиков:

$>$ *solve*($\{y\hat{}2 = 2 * x + 6, y = x - 1\}$, $\{x, y\}$);

$$\{y = -2, x = -1\}, \{y = 4, x = 5\}.$$

Далее, вычислим площадь фигуры по формуле (1.3), учитывая, что график прямой расположен выше параболы, если интегрирование ведется по переменной $y$. Для этого воспользуемся командой *Int* вычисления интеграла в инертной и обычной формах:

$>$ *Int((y+1)-((y^2-6)/2), y=-2..4) = int((y+1)-((y^2-6)/2), y=-2..4);*

$$\int_{-2}^{4} y + 4 - \frac{1}{2} y^2 dy = 18.$$

**Пример 1.2.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми, заданными параметрически:

$$x = 2t - t^2, \ y = 2t^2 - t^3.$$

Выводим на экран график параметрически заданой функции (рис. 4)

> *plot([2*t-t^2, 2*t^2-t^3, t= -2.5..2.5], x=-2..2, y=-2..2, title='Петля', thickness=2, color=green);*

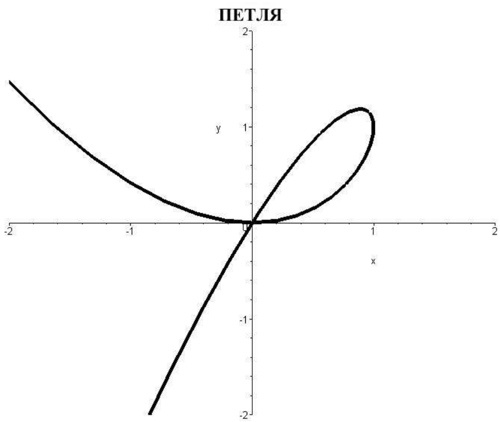


Рис. 4.

Найдем пределы интегрирования, полагая $x = 0, \ y = 0$:
> *x:=2*t-t^2;*
> *y:=2*t^2-t^3;*
> *solve(* $\{x, y\}$ *,t);*

$$\{t = 0\}, \ \{t = 2\}.$$

Так как $x = 0$ и $y = 0$ при $t = 0$ и $t = 2$, то переменная $t$

изменяется от 0 до 2. Используя команду дифференцирования *diff*, найдем производную функции $y = 2t^2 - t^3$ по $t$

> *z:=diff(y,t);*

$$z := 4t - 3t^2.$$

Применив формулу (1.4), получим:

> *Int(x*z, t=0..2) = int(x*z, t=0..2);*

$$\int_0^2 \left(2t - t^2\right) \left(4t - 3t^2\right) dt = \frac{8}{15}.$$

**Пример 1.3.** Найти площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной в полярной системе координат (лемниската Бернулли):

$$\rho = a\sqrt{\cos(2\phi)}.$$

Найдем область определения функции $\rho = a\sqrt{\cos(2\phi)}$, решая неравенство $\cos(2\phi) \geq 0$, получим $-\frac{\Pi}{4} + \Pi n \leq \phi \leq \frac{\Pi}{4} + \Pi n$, поэтому построение графика следует разбить на две части. Существенным моментом является задание графика в полярной системе координат опцией *coords=polar*. Для того чтобы построить лемнискату Бернулли, конкретизируем значение $a = 2$, получим:

```
> restart:
a:=plot(2*sqrt(cos(2*phi)), phi=-Pi/4..Pi/4, coords=polar,
color=green, thickness=2):
b:=plot(2*sqrt(cos(2*phi)),phi=3*Pi/4..5*Pi/4, coords=polar,
color=green, thickness=2):
> plots[display]({a,b},title=' лемниската Бернулли');
```

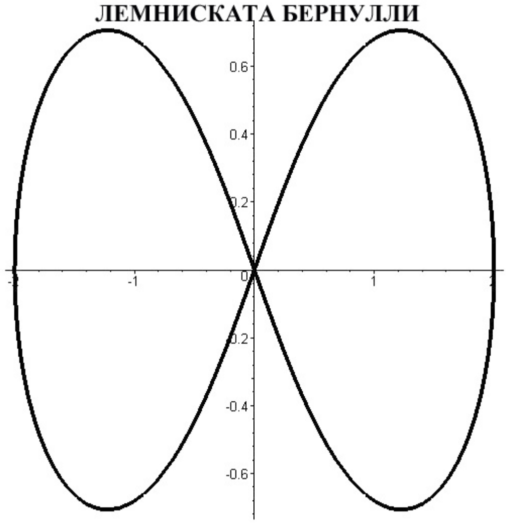


Рис. 5.

Так как график функции симметричен (рис. 5), разобьем его на 4 равные части и найдем значение интеграла в пределах от 0 до $\frac{\Pi}{4}$, используя команду *Int*:

*> 4*1/2*Int(a^ 2*cos(2*phi), phi=0..Pi/4) = 4*1/2*int(a^ 2 cos(2*phi), phi=0..Pi/4);*

$$2\int_0^{\frac{\Pi}{4}} a^2 cos(2\phi) d\phi = a^2.$$

**Упражнения для самостоятельной работы**

1. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой,

заданной уравнением в прямоугольной системе координат:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

2. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнениями:

$$x = a\,(t - \sin(t)), \;\; y = a\,(1 - \cos(t)), \;\; y = 0, \;\; 0 \le t \le 2\Pi.$$

3. Найти площадь плоской фигуры, ограниченной кривой, заданной уравнением в полярной системе координат:

$$\rho = 3a\sin(\phi).$$

# 2 Объем тела в пространстве

Рассмотрим произвольное тело $F$, а также всевозможные многогранные тела $P$, содержащиеся в $F$, и всевозможные многогранные тела $Q$, содержащие $F$.

*Приведем основные определения и утверждения из [1].*

**Определение 2.1.** Назовем верхним объемом тела $F$ точную нижнюю грань числового множества $\{\mu(Q)\}$ объемов всех многогранных тел $Q$, содержащих $F$, т. е. число

$$\overline{\mu} = \overline{\mu}(F) = \inf\ \mu(Q),\ Q \supset F.$$

Аналогично [1], назовем нижним объемом тела $F$ точную верхнюю грань числового множества $\{\mu(P)\}$ объемов всех многогранных тел $P$, содержащихся в $F$, т. е. число

$$\underline{\mu} = \underline{\mu}(F) = \sup\ \mu(P),\ P \subset F.$$

Очевидно, что $\underline{\mu} \le \overline{\mu}$.

**Определение 2.2.** Тело $F$ называется кубируемым (т. е. имеет объем), если нижний объем совпадает с верхним.

При этом число $\mu(F) = \overline{\mu} = \underline{\mu}$ называется объемом тела $F$.

**Утверждение 2.1.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$. Тогда тело $F$, образованное вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $|f(x)|$, ординатами в точках $a$ и $b$ и отрезком оси $Ox$ от $a$ до $b$, кубируемо, и его объем $\mu(F)$ может быть найден по формуле

$$V(Ox) = \Pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{2.1}$$

**Утверждение 2.2.** Если тело $F$ кубируемо, а функция $P(x)$, являющаяся площадью сечения данного тела плоскостью, перпендикулярной к оси $Oz$ в точке $z$, интегрируема на $[a, b]$, то объем тела можно вычислить по формуле [3]

$$V(Oz) = \int_a^b P(z)dz. \tag{2.2}$$

*Рассмотрим некоторые случаи задания кривых:*

1. Нахождение объема в прямоугольной системе координат:

   объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ криволинейной трапеции $a < x < b,\ 0 < y < y(x)$, где $y(x)$ – непрерывная однозначная функция, равен

   $$V(Ox) = \Pi \int_a^b y^2(x)dx; \tag{2.3}$$

   объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ криволинейной трапеции $a < x < b,\ 0 < y < y(x)$, где $y(x)$ –

непрерывная однозначная функция, равен

$$V(Oy) = \Pi \int_a^b x^2(y)dy. \tag{2.4}$$

2. Нахождение объема параметрически заданного тела, где $x = x(t),\ y = y(t)$:

$$V = \Pi \int_a^b y^2(t)x'(t)dt. \tag{2.5}$$

3. Нахождение объема в полярной системе координат, где $x = \rho(\phi)\cos(\phi),\ y = \rho(\phi)\sin(\phi)$

$$V(O\rho) = \Pi \int_a^b y^2(\phi)x'(\phi)d\phi. \tag{2.6}$$

**Пример 2.1.** Найти объем тела, ограниченного эллипсоидом $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} + z^2 = 1$.

В рабочем поле Maple введем команду *implicitplot3d* для построения неявно заданной функции в трехмерном пространстве и определим оси:

```
> restart:
with(plots):
implicitplot3d (x^2/4+y^2/2+z^2=1, x=-2..2,
y=-sqrt(2)..sqrt(2), z=-1..1, axes=frame);
```

Тело ограничено эллипсоидом (рис. 6). В силу симметричности точек тела относительно плоскости $xOy$ в сечении тела плоскостью $z = 0$ получим эллипс $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ с полуосями $x = 2$, $y = \sqrt{2}$ , используя симметрию точек эллипса относительно осей координат, вычислим площадь его четвертой части.

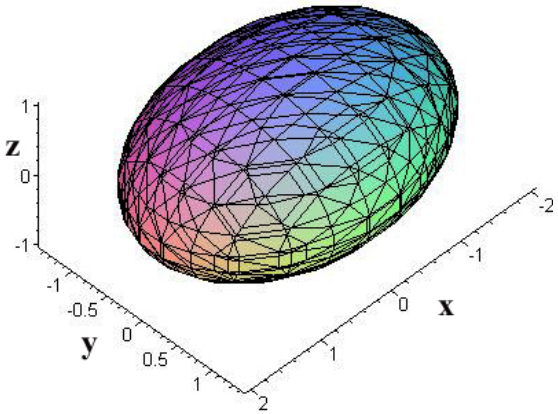


Рис. 6. Эллипсоид

*> 4*Int(sqrt(2-(1/2)*x^2), x=0..2)= 4*int(sqrt(2-(1/2)*x^2), x=0..2);*

$$4\int_0^2 \frac{\sqrt{8-2x^2}}{2}dx = 2\sqrt{2}\Pi.$$

Применяя формулу (2.2), получим:

*>Int(2*sqrt(2)*Pi*(1-z^2),z=-1..1)= int(2*sqrt(2)*Pi*(1-z*$^2\wedge$*), z=-1..1);*

$$\int_1^{-1} 2\sqrt{2}\Pi(1-z^2)dz = \frac{8\sqrt{2}\Pi}{3}.$$

**Пример 2.2.** Найти объем тела вращения вокруг оси $Ox$, ограниченного астроидой:

$$x = a\cos^3(t),\ y = a\sin^3(t),\ 0 < t < 2\pi.$$

Положим $a = 1$ и построим график астроиды, используя опции *title, thickness, color* – заголовок, толщина линии и цвет соответственно (рис. 7).

*> restart:*
*plot([(cos(t))^3, (sin(t))^3, t=0..2*Pi], title='астроида', thickness=2, color=green);*

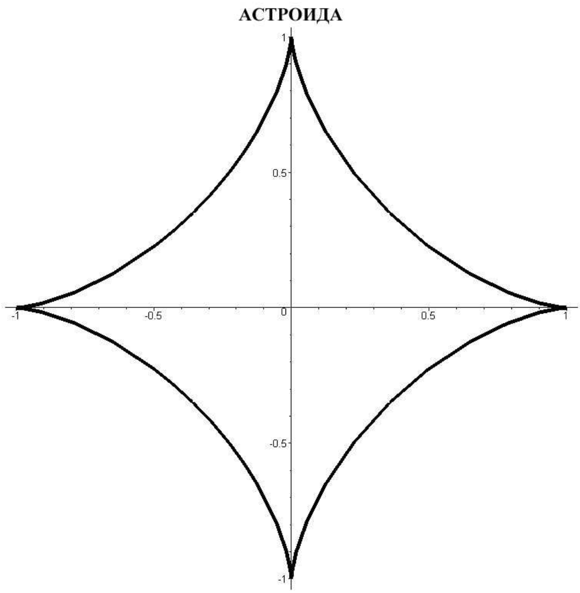


Рис. 7.

Определим переменные $x$ и $y$, присвоив значения параметрически заданной астроиды:

> *x:=a*(cos(t))^3;*
*y:=a*(sin(t))^3;*

Согласно формуле (2.5) требуется найти производную функции $x(t)$, для этого в рабочем поле Maple введем команду дифференцирования *diff(x,t)* (второй аргумент показывает по какой переменной идет дифференцирование):

> *z:=diff(x,t);*

$$z = -3a\cos^2(t)\sin(t).$$

При вращении астроиды (рис. 7) вокруг оси $Ox$, параметр $t$ изменяется от П до 0:

> *Pi*Int(y^2*z, t=Pi..0)= Pi*int(y^2*z, t=Pi..0);*

$$\Pi\int_{\Pi}^{0} -3a^3\sin^7(t)\cos^2(t)dt = \frac{32}{105}\Pi a^3.$$

**Пример 2.3.** Найти объем тела, образованного вращением лемнискаты Бернулли вокруг оси $Ox$: $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

*Указание:* Перейти к полярным координатам.

Перейдем к полярным координатам $x = \rho\cos(\phi),\ y = \rho\sin(\phi)$. Уравнение кривой имеет вид $\rho = a\sqrt{\cos(2\phi)},\ |\phi - k\Pi| \le \frac{\Pi}{4},\ k = 0, 1$.

Изобразим на плоскости данную кривую (рис. 8), учитывая особенности, описанные в примере 1.3:

> *restart:*
*a:=plot(2*sqrt(cos(2*phi)), phi=-Pi/4..Pi/4, coords=polar, color=green, thickness=2):*
*b:=plot(2*sqrt(cos(2*phi)),phi=3*Pi/4..5*Pi/4, coords=polar,*

*color=green, thickness=2):*
*> plots[display](a,b,title='Лемниската Бернулли')*

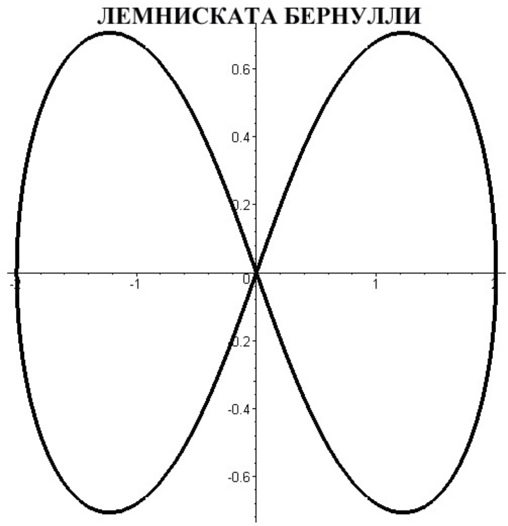


Рис. 8.

Известно [3], что объем тела, образованного вращением вокруг полярной оси плоской фигуры $0 \leq \alpha \leq \phi \leq \beta \leq \Pi$, $0 \leq \rho \leq \rho(\phi)$ равен

$$V = \frac{2\Pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^3(\phi) \sin(\phi) d\phi. \tag{2.7}$$

Принимая во внимание симметрию точек лемнискаты Бернулли относительно полярной оси, пределы интегрирования изменяются от 0 до $\frac{\Pi}{4}$, а также симметрию относительно прямой $x = \rho\cos(\phi) = 0$, вычисляем лишь 1/2 часть кривой, при этом умножаем на коэффициент равный 2. Применим формулу (2.7), используя команды упрощения *simplify* и вычисления интеграла *int* в инертной и обычной формах. Тогда получим

*>2*2*Pi/3*Int(a^3*(sqrt(cos(2*phi)))^3*sin(phi), phi=0..Pi/4)= simplify( 2*2*Pi/3*int(a^3*(sqrt(cos(2*phi)))^3*sin(phi), phi=0..Pi/4));*

$$2\frac{2\Pi}{3}\int_0^{\frac{\Pi}{4}} a^3\cos^{\frac{3}{2}}(2\phi)\sin(\phi) = \frac{\Pi a^3}{12}\left(3\ln(1+\sqrt{2})\sqrt{2}-2\right).$$

**Упражнения для самостоятельной работы**

1. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Oy$ фигуры, ограниченной графиками парабол

$$y = x^2, y^2 = 8x.$$

2. Найти объем тела, образованного вращением фигуры вокруг оси $Ox$, ограниченной графиком параметрически заданной функции

$$x = a\,(t-\sin(t)),\;\; y = a\,(1-\cos(t)),\;\; y = 0,\;\; 0 \le t \le 2\Pi.$$

3. Найти объем тела, которое получается от вращения спирали Архимеда

$$\rho = a\phi,\; a > 0,\; 0 < \phi < \Pi$$

вокруг полярной оси.

# 3 Длина дуги плоской фигуры

**Утверждение 3.1.** Если кривая $L$ является графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и имеющей на сегменте $[a, b]$ непрерывную производную, то кривая $L$ и ее длина может быть найдена по формуле [1]

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx. \tag{3.1}$$

**Утверждение 3.2.** Если рассматривается параметризируемая кривая $L$, заданная уравнениями $x = \phi(t)$, $y = \psi(t)$, и функции $\phi(t)$, $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные на $[\alpha, \beta]$, то кривая $L$ спрямляема и длина ее дуги может быть найдена по формуле [1]

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)}dt. \tag{3.2}$$

**Утверждение 3.3.** Если кривая $L$ определяется полярным уравнением $\rho = \rho(\phi)$, и функция $\rho(\phi)$ непрерывна, и имеет на сегменте $[\phi 1, \phi 2]$ непрерывную производную, то прямая $L$ спрямляема и ее длина определяется равенством [1]

$$L = \int_{\phi 1}^{\phi 2} \sqrt{\rho^2(\phi) + \rho'^2(\phi)}d\phi. \tag{3.3}$$

**Пример 3.1.** Найти длину дуги на промежутке $0 < x < 4$, заданной уравнением в декартовой системе координат:

$$y = 2\left(\exp(\frac{x}{4}) + \exp(-\frac{x}{4})\right).$$

Построим график функции (рис. 9):

*> restart:*
*plot(2*(exp(x/4)+exp(-x/4)), x=0..4, thickness=3, color=green);*

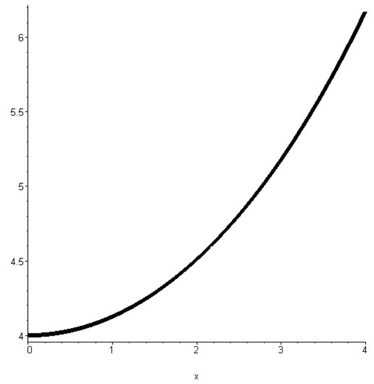


Рис. 9.

Для вычисления длины дуги согласно формуле (3.1) необходимо найти производную функции $y = 2\left(\exp(\frac{x}{4}) + \exp(-\frac{x}{4})\right)$.

*> z:=diff(2*(exp(x/4)+exp(-x/4)),x);*

$$z = \frac{1}{2}\exp(\frac{x}{4}) - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{4}).$$

Поставляя значение производной в формулу (3.1), получим:

*> Int(sqrt(1+z^2), x=0..4)=int(sqrt(1+z^2), x=0..4);*

$$\int_0^4 \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\exp(\frac{x}{4}) - \frac{1}{2}\exp(-\frac{x}{4})\right)^2} dx = 2e - 2e^{-1}.$$

**Пример 3.2.** Найти длину дуги, заданной параметрически уравнениями на промежутке $[-1;1]$:

$$x = \sqrt{3}\,t^2,\ y = t - t^3.$$

Построим график функции, заданной параметрически уравнениями (рис. 10):

*> restart: plot([sqrt(3)*t^2,t-t^3, t=-3/2..3/2], color=green, thickness=3);*

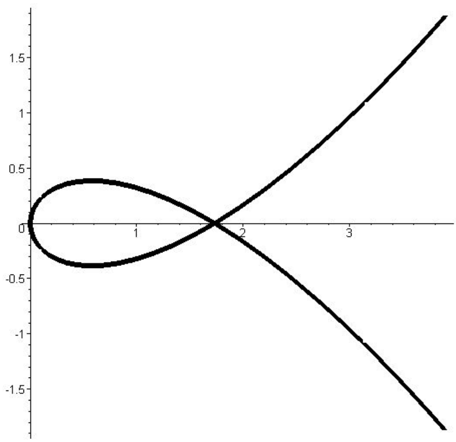


Рис. 10.

Используя формулу (3.2), вычислим длину дуги в заданных пределах:

*> x:=sqrt(3)*t^2; y:=t-t^3;*
*> Int(sqrt((diff(x,t))^2+(diff(y,t))^2), t=-1..1) = int(sqrt((diff(x,t))^2+(diff(y,t))^2), t=-1..1);*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{(1+3t^2)^2}dt = 4.$$

**Пример 3.3.** Найти длину дуги, заданной в полярных координатах уравнением:

$$\rho = a\sin^3(\frac{\phi}{3}).$$

Конкретизируя значение параметра $a = 1$, построим график функции, применяя опцию стиля линии *linestyle* в значении равном 3 (рис. 11).

*> restart:*
*plot ((sin(t/3))^3, t=0..3*Pi, coords=polar, color=green, thickness=2, linestyle=3);*

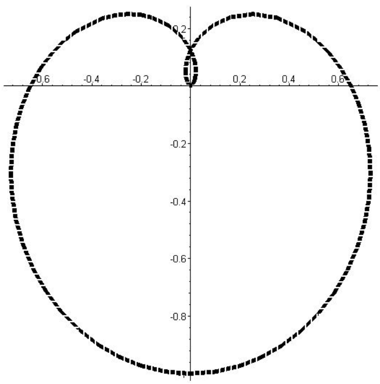


Рис. 11.

Вычислим длину дуги по формуле (3.3), учитывая, что из условия $\rho \geq 0$ следует $\sin\frac{\phi}{3} \geq 0$. Поэтому $0 \leq \phi \leq 3\pi$.

*> rho:=a*(sin(t/3))^3;*
*> Int(sqrt(rho^2+(diff(rho,t))^2), t=0..3*Pi)*
*=int(sqrt(rho^2+(diff(rho,t))^2), t=0..3*Pi);*

$$\int_0^{3\Pi} \sqrt{a^2 \sin^6(\frac{t}{6}) + a^2 \sin^4(\frac{t}{4}) \cos^2(\frac{t}{3})} dt = \frac{3\Pi a}{2}.$$

**Упражнения для самостоятельной работы**

1. Найти длину дуги кривой ($0 < y < e$):

$$x = \frac{y^2}{4} - \frac{\ln(y)}{2}.$$

2. Найти длину дуги развертки круга

$$x = a\ (\cos(t) + t\sin(t)),\ y = a\ (\sin(t) - t\cos(t)),\ 0 \leq t \leq 2\Pi.$$

3. Найти длину кардиоиды

$$\rho = a\ (1 + \cos(\phi)).$$

# 4 Площадь поверхности тела вращения

**Утверждение 4.1.** Пусть $L$ есть кривая, описываемая в прямоугольной системе координат положительной функцией $y = f(x)$, имеющей на $[a, b]$ непрерывную производную. Тогда площадь поверхности вращения $L$ вокруг оси $OX$ будет вычислена по формуле [1]:

$$P(OX) = 2\Pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)} dx. \tag{4.1}$$

1. Площадь в прямоугольной системе координат:

$$P(Ox) = 2\Pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'(x)} dx. \qquad (4.2)$$

2. Площадь поверхности вращения параметризируемой кривой $L$ $[x = \phi(t),\ y = \psi(t)]$:

$$P(Ox) = 2\Pi \int_a^b |\psi(t)| \sqrt{\phi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \qquad (4.3)$$

3. Если кривая $L$ определяется полярным уравнением $\rho = \rho(\phi)$

$$P(O\rho) = 2\Pi \int_\alpha^\beta |\rho(\phi)| \sin(\phi) \sqrt{\rho^2(\phi) + \rho'^2(\phi)} d\phi. \qquad (4.4)$$

**Пример 4.1.** Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ кривой $y = \tan(x)$, заданной на промежутке $\left[0, \frac{\Pi}{4}\right]$.

Построим график тангенса, учитывая его периодичность и наличие точек разрыва. Для улучшения качества изображения графика используем опцию *discont* равным *true* и определим диапозон изменения переменной $y$ (рис. 12).

*> restart:*
*plot (tan(x), x=-5..5, y=-5..5, thickness=2, color=green, discont= true);*

Выделим ту часть графика, которая необходима для решения примера (рис. 13),

*> plot(tan(x), x=0..Pi/4, thickness=2, color=magenta);*

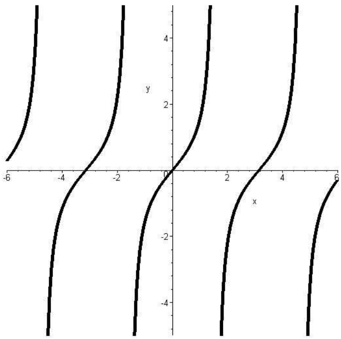


Рис. 12. Тангенс

Найдем производную функции, как это требуется в формуле (4.2):

*> z:=diff(tan(x), x);*

$$z = 1 + \tan^2(x).$$

Подставляя значение производной, найдем площадь поверхности, одновременно упрощая итоговый результат с помощью команды *simplify*:

*> F:=2*Pi*Int(abs(tan(x))*sqrt(1+z^2), x=0..Pi/4)=*
*simplify(2*Pi*int(abs(tan(x))*sqrt(1+(z)^2), x=0..Pi/4));*

$$F = 2\Pi \int_0^{\frac{\Pi}{4}} |\tan(x)| \sqrt{1 + (1 + \tan^2(x))^2} dx =$$

$$= \left( -\sqrt{2} + \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \sqrt{5} - \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) \right) \Pi.$$

Численное значение интеграла равно:

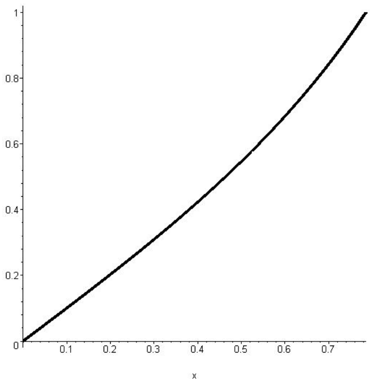


Рис. 13.

> *evalf(F);*

$$F = 3.839077044.$$

**Пример 4.2.** Найти площадь поверхности, образованной вращением циклоиды вокруг оси $Ox$:

$$x = a(t - \sin(t)),\ y = a(1 - \cos(t)),\ 0 \leq t \leq 2\Pi.$$

Построим график функции при $a = 1$ (рис. 14)

> *restart:*
*plot([t-sin(t),1-cos(t),t=0..2*Pi], title='Циклоида', thickness=2, color=green);*

Найдем значение определенного интеграла, предположив что параметр $a$ положителен. Согласно формуле (4.3) дифференциал дуги умножается на $y(t)$

> *x:=a*(t-sin(t));*
*y:=a*(1-cos(t));*

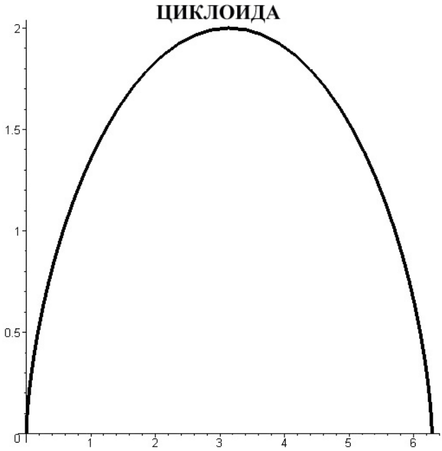


Рис. 14.

*> assume(a>0);*
*> 2*Pi*Int(y*sqrt((diff(x,t))^2+(diff(y,t))^2), t=0..2*Pi)=*
*2*Pi*int(y*sqrt((diff(x,t))^2+(diff(y,t))^2), t=0..2*Pi);*

$$2\Pi \int_0^{2\Pi} a(1-\cos(t))\sqrt{a^2(1-\cos(t))^2+a^2\sin^2(t)}dt = \frac{64\Pi a^2}{3}.$$

**Пример 4.3.** Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1+\cos(\phi))$ вокруг полярной оси.

Выведем на экран график функции (рис. 15). Существенным моментом является задание графика в полярной системе координат опцией *coords=polar*, приняв значение $a = 2$, получим:

*> restart:*
*plot(2*(1+cos(t)), t=0..2*Pi, coords=polar, color=green,*

*thickness=2, title='Кардиоида');*

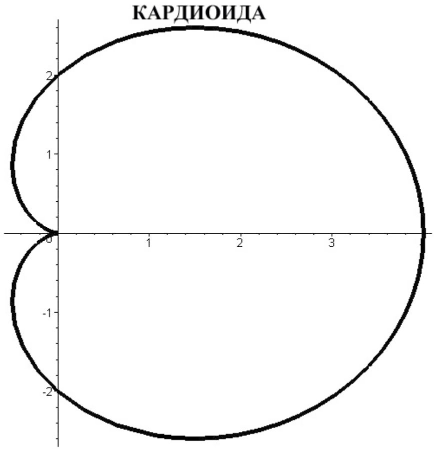


Рис. 15.

Для использования формулы (4.4) необходимо найти производную функции:

*z:=diff(a*(1+cos(t)),t);*

$$z = -a\sin(t).$$

Так как кривая симметрична относительно полярной оси, то пределы интегрирования изменяются от 0 до П. Командой *assume* предположим, что коэффициент $a$ положителен.

Вычислим площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды вокруг полярной оси, для этого в рабочем поле Maple введем

*> assume(a>0);*
*> 2*Pi*Int(a*(1+cos(t))*sin(t)*sqrt((a*(1+cos(t)))^2+z^2),*

*t=0..Pi)= 2*Pi*int(a*(1+cos(t))*sin(t)*sqrt((a*(1+cos(t)))^2+*
*+z^2), t=0..Pi);*

$$2\Pi \int_0^{\Pi} a(1+\cos(t))\sin(t)\sqrt{a^2(1+\cos(t))^2 + a^2\sin^2(t)}dt = \frac{32\Pi a^2}{5}.$$

**Упражнения для самостоятельной работы**

1. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ вокруг оси $Ox$.

2. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $x = a\cos^3(t), \ \ y = a\sin^3(t)$ вокруг оси $Ox$.

3. Найти площадь поверхности, образованной вращением кривой $\rho^2 = a^2\cos(2\phi)$ вокруг полярной оси.

# Литература

[1] Ильин В. А. Математический анализ. Ч. 1/В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Бл. Х. Сендов. – М. : Изд-во МГУ, 1987.

[2] Романова О. А. Кратные интегралы в системе Maple : справ. пособие/О. А. Романова, З. М. Трачевская. – Иркутск : Изд. ИГУ, 2005.

[3] Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу : учеб. пособие/ Б. П. Демидович. –13-е изд., испр.–М. : Изд-во Моск. ун-та, 1997.

[4] Матросов А. В. Maple 6. Решение задач высшей математики и механики/А. В. Матросов. –СПб. : БХВ-Петербург, 2001.

**Геометрические приложения определенного интеграла в пакете Maple**

*Методические указания к практическим занятиям*

Составители: **Романова** Ольга Александровна
**Зимирева** Елена Леонидовна

Подписано в печать 17.10.09
Формат 60х84 1/16. Печать трафаретная.
Гарнитура Times. Усл. печ. л. 1,8. Поз.49.Тираж 40 экз.
Издательство Иркутского государственного университета
664003, г. Иркутск, бульвар Гагарина, 36; тел. (3952) 24-14-36