ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2001, том 377, № 3, с. 1–3

МАТЕМАТИКА

УДК 517.988.67

СПЛЕТАЕМЫЕ УРАВНЕНИЯ В ТЕОРИИ ВЕТВЛЕНИЯ

© 2001 г. В. Р. Абдуллин, Н. А. Сидоров

Представлено академиком М. М. Лаврентьевым 18.09.2000 г.

Поступило 02.10.2000 г.

Решения нелинейных уравнений могут зависеть от свободных параметров. В данном сообщении предполагается, что ядро линеаризованного оператора нетривиально [1]. Если задача инвариантна относительно некоторой группы преобразований [6], то все или часть свободных параметров имеют групповой смысл [2, 3]. В теории ветвления решений нелинейных уравнений область расположения свободных параметров необходимо знать как при качественном и асимптотическом анализе [1–3], так и при разработке итерационных методов [4, 5].

Использование понятия сплетаемого уравнения позволяет упростить вычисления и рассмотреть различные классы разветвляющихся решений с единой точки зрения. Фундаментальные результаты в этом направлении при условии групповой инвариантности уравнения получены в работах [2, 3].

В данной работе (см. также [7, 8]) на этой основе продолжен анализ появления свободных параметров в разветвляющихся решениях общих нелинейных уравнений в банаховых пространствах. Приведены новые приемы упрощения уравнений разветвления, расширяющие в нелинейном анализе возможность эффективной алгоритмизации методов теории ветвления [1, 2, 4].

Пусть E_1, E_2 – вещественные банаховы пространства, Λ – вещественное нормированное пространство. Рассмотрим задачу построения малых решений $x(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to 0$ уравнения

$$F(x, \Lambda) \overset{\text{def}}{=} Bx - R(x, \lambda) = 0 \qquad (1)$$

Здесь $B\colon D \subset E_1 \to E_2$ – замкнутый нетеров оператор с d-характеристикой (n, m). Нелинейный оператор $R\colon \Omega \subset E_1 \times \Lambda \to E_2$ предполагается определенным, непрерывным и непрерывно дифференцируемым по x в смысле Фреше в окрестности нуля Ω; при этом $R(0, 0) = 0$, $R_x(0, 0) = 0$.

Иркутский государственный университет

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^{n}$ – базис в $N(B)$, $\{\psi_i\}_{i=1}^{m}$ – базис в $N(B^*)$, $\{\gamma_i\}_{i=1}^{n}$, $\{z_i\}_{i=1}^{m}$ – соответствующие биортогональные системы из E_1^* и E_2.

Проекторы

$$P = \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i, \quad Q = \sum_{i=1}^{m} \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$$

порождают разложения $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty-n}$, $E_2 = E_{2,m} \oplus E_{2,\infty-m}$ пространств E_1 и E_2 в прямые суммы подпространств. Положим $B^+ = \hat{B}^{-1}(I - Q)$, где $\hat{B}: D \subset E_1^{\infty-n} \to E_{2,\infty-m}$.

Все малые решения уравнения (1) могут быть представлены в виде

$$x = (\xi, \varphi) + B^+ y, \qquad (2)$$

где $y = y((\xi, \varphi), \lambda)$ – единственное малое решение уравнения

$$y = R((\xi, \varphi) + B^+ y, \lambda), \qquad (3)$$

а параметр $\xi \in \mathbb{R}^n$ определяется системой разветвления

$$L_i(\xi, \lambda) = \langle y((\xi, \varphi), \lambda), \psi_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \qquad (\mathrm{I})$$

Если оператор B фредгольмов, то в (2) вместо псевдообратного оператора B^+ можно использовать оператор

$$\Gamma = B^+ + \sum_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle \varphi_i.$$

Уравнение разветвления, полученное с помощью оператора Γ, в дальнейшем будем записывать в виде

$$\tilde{L}_i(\xi, \lambda) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (\mathrm{I}')$$

Уравнение (1) будем называть (S, K)-сплетаемым, если существуют операторы $S \in \mathfrak{L}(E_1)$, $K \in \mathfrak{L}(E_2)$, такие, что $PS = SP$, $QK = KQ$ и

$$BS = KB \text{ на } D, \quad R(Sx, \lambda) = KR(x, \lambda) \text{ на } \Omega.$$

В качестве операторов S, K могут выступать представления группы G в пространствах E_1 и E_2 соответственно, если уравнение (1) инвариантно относительно группы G. Кроме того, это могут быть и необратимые операторы, например проекторы. Поэтому целесообразно ввести и следующее понятие.

Уравнение (1) будем называть (S^2, K)-сплетаемым, если операторы S и K таковы, что

$$BS = KB \text{ на } D, \quad R(Sx, \lambda) = KR(Sx, \lambda) \text{ на } \Omega.$$

Рассмотрим вопрос о наследовании свойства сплетения уравнением разветвления.

Пусть действие операторов S и K^* на инвариантных подпространствах E_1^n, $E_{2,m}^* = N(B^*)$ соответственно определяется равенствами

$$\begin{gathered} S\varphi_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\varphi_j, \quad \mathcal{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^{n}, \\ K^*\psi_i = \sum_{j=1}^{m} b_{ij}\psi_j, \quad \mathcal{B} = [b_{ij}]_{i,j=1}^{m}. \end{gathered} \tag{4}$$

Наряду с (2) будем искать решения уравнения (1) в виде

$$x = (\xi, S\varphi) + B^{+}y_s, \tag{2'}$$

где $y_s = y((\xi, S\varphi), \lambda)$ – единственное малое решение уравнения

$$y = R((\xi, S\varphi) + B^{+}y, \lambda), \tag{5}$$

а параметр $\xi \in \mathbb{R}^n$ теперь ввиду равенств (4) определяется системой разветвления

$$\begin{gathered} L_i(\mathcal{A}\xi, \lambda) = \langle y((\xi, S\varphi), \lambda), \psi_i \rangle = 0, \\ i = 1, 2, \ldots, m. \end{gathered} \tag{II}$$

Т е о р е м а 1. *Если уравнение* (1) (S, K)-*сплетаемое*, *а во фредгольмовом случае*, *кроме того*, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, *то уравнение разветвления наследует свойство сплетения*, *т.е.*

$$\begin{gathered} L(\mathcal{A}\xi, \lambda) = \mathcal{B}L(\xi, \lambda), \\ \tilde{L}(\mathcal{A}\xi, \lambda) = \mathcal{A}\tilde{L}(\xi, \lambda). \end{gathered} \tag{6}$$

Т е о р е м а 2. *Если уравнение* (1) (S^2, K)-*сплетаемое*, *то при любых* ξ, λ *из окрестности нуля вектор* $L(\mathcal{A}\xi, \lambda)$ *является неподвижной точкой матрицы* $\mathcal{B}$, *т.е.*

$$\mathcal{B}L(\mathcal{A}\xi, \lambda) = L(\mathcal{A}\xi, \lambda). \tag{7}$$

Если выполнено равенство (6) (равенство (7)), то будем говорить, что уравнение разветвления (I) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-сплетаемое ($(\mathcal{A}^2, \mathcal{B})$-сплетаемое). Как следствие теорем 1, 2 получим следующие результаты.

Т е о р е м а 3. *Пусть уравнение* (I) $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-*сплетаемое*, $\operatorname{rank}\mathcal{B} = q$. *Тогда число уравнений в системе разветвления* (II) *можно понизить на* $r = m - q$ единиц.

Т е о р е м а 4. *Пусть уравнение* (I) $(\mathcal{A}^2, \mathcal{B})$-*сплетаемое*. *Если* $\operatorname{rank}\mathcal{B} = q$, *то число уравнений в системе разветвления* (II) *можно понизить на* $r = m - q$ *единиц*. *Если же* $\operatorname{rank}(\mathcal{B} - E) = l$ *и все собственные числа матрицы* $\mathcal{B} - E$ *вещественные*, *то число уравнений можно понизить на* l *единиц*.

Пусть G – область в $\mathbb{R}^k$, причем $0 \in G$. Будем считать, что при всех $\alpha \in G$ и ξ, λ из окрестности нуля имеет место равенство

$$L(\mathcal{A}(\alpha)\xi, \lambda) = \mathcal{B}(\alpha)L(\xi, \lambda).$$

Здесь $\mathcal{A}(\alpha)$, $\mathcal{B}(\alpha)$ – параметрические семейства матриц, такие, что $\mathcal{A}(0) = E$, $\det\mathcal{B}(\alpha) \neq 0$ при $\alpha \in G$.

Положим

$$R_{m-q}^{m} = \{c \in \mathbb{R}^m : c_{m_i} = 0, i = 1, 2, \ldots, q\},$$

где $1 \le q \le m - 1$, $m_1, m_2, \ldots, m_m$ – перестановка первых m натуральных чисел.

Множество $o(c) = \{\mathcal{B}(\alpha)c : \alpha \in G\}$ назовем траекторией вектора c из $\mathbb{R}^m$, отвечающей матрице $\mathcal{B}(\alpha)$.

Т е о р е м а 5. *Пусть при всех* $\alpha \in G$ *пара* (ξ^*, λ^*) *удовлетворяет* q *уравнениям системы разветвления* (II), *т.е.*

$$L_{m_i}(\mathcal{A}(\alpha)\xi^*, \lambda^*) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \ldots, q.$$

Пусть далее траектория любого ненулевого вектора c *из* R_{m-q}^{m} *не остается в* R_{m-q}^{m}. *Тогда при всех* $\alpha \in G$ *пара* (ξ^*, λ^*) *удовлетворяет полной системе разветвления* (II).

Уравнение разветвления (I'), удовлетворяющее в окрестности нуля условию

$$\tilde{L}(\xi, \lambda) = D\operatorname{grad}_{\xi}U(\xi, \lambda),$$

где $\det D \neq 0$, будем называть уравнением разветвления потенциального типа, а функцию U – его потенциалом.

Т е о р е м а 6. *Пусть уравнение* (1) (S, K)-*сплетаемое*, $\mathcal{A}(\alpha_0) = \mathcal{B}(\alpha_0)$ *и* $\det\mathcal{A}(\alpha_0) \neq 0$. *Пусть*, *далее*, *матрицы*

$$\left\| \left\langle R_x(\Gamma R_x)^k\varphi_j, \sum_{s=1}^{n} \mathcal{A}_{is}(\alpha_0)\psi_s \right\rangle \right\|_{i,j=1}^{n}, \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{8}$$

симметричны в окрестности нуля. *Тогда уравнение разветвления* (I') *потенциального типа и* $D = \mathcal{A}(\alpha_0)^{-1}$.

При проверке условий теоремы 6 может оказаться полезным следующее предложение.

Л е м м а 1. *Пусть матрицы* $\mathcal{A}$ *и*

$$\left\| \left\langle R_x\varphi_i, \sum_{k=1}^{n} \mathcal{A}_{jk}\psi_k \right\rangle \right\|_{i,\,j=1}^{n}$$

симметричны и выполнено одно из двух дополнительных условий

$$(I-Q)R_xP = 0 \ \ \text{или} \ \ QR_x(I-P) = 0.$$

Тогда все матрицы (8) *симметричны при всех* (x, λ) *из окрестности нуля*.

Пусть уравнение разветвления (I') потенциального типа, причем

$$U(\xi, \lambda) = \hat{U}(J_1(\xi^1), J_2(\xi^2), \ldots, J_l(\xi^l)).$$

Здесь J_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, – положительные ρ_i-однородные формы независимых переменных $\xi^i = (\xi_{n_{i-1}+1}, \ldots, \xi_{n_i})$, где $0 = n_0 < n_1 < \ldots < n_{l-1} < n_l = n$.

Пусть вектор-функции t^i: $G \to \mathbb{R}^{n_i - n_{i-1}}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, задают параметризацию поверхностей $J_i(\xi^i) = 1$, $i = 1, 2, \ldots, l$, а действие оператора $S(\alpha)$ на элементах $\varphi_{n_{i-1}+1}$, $i = 1, 2, \ldots, l$, определяется равенствами

$$S(\alpha)\varphi_{n_{i-1}+1} = \sum_{j=n_{i-1}+1}^{n_i} t_j^i(\alpha)\varphi_j.$$

Положим $t(\alpha) = \mathrm{diag}\{t^1(\alpha), t^2(\alpha), \ldots, t^l(\alpha)\}$, $\hat{\varphi} = (\varphi_{n_1}, \ldots, \varphi_{n_{l-1}+1})$. Тогда все малые решения уравнения (1) представимы в виде

$$x = (\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}) + \Gamma\hat{y},$$

где $\hat{y} = y((\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}), \lambda)$ – единственное малое решение уравнения

$$y = R((\mu, S(\alpha)\hat{\varphi}) + \Gamma y, \lambda),$$

а параметр $\mu \in \mathbb{R}^l$ определяется из системы l уравнений разветвления

$$l(\mu, \lambda) = b(\alpha)\tilde{L}(t(\alpha)\mu, \lambda) = 0, \qquad \text{(III)}$$

не зависящих от параметра α. Здесь матрица $b(\alpha)$ размерности $l \times n$ имеет полный ранг l при всех $\alpha \in G$ и зависит от производных инвариантов J_i, $i = 1, 2, \ldots, l$.

Уравнение разветвления (III) позволяет модернизировать итерационные методы работ [4, 5] с целью построения параметрических семейств разветвляющихся решений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вайнберг М.М., Треногин В.А.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.
2. *Логинов Б.В., Треногин В.А.* // Мат. сб. 1971. Т. 85 (127). С. 440–454.
3. *Логинов Б.В.* // Вестн. СамГУ. 1998. № 4 (10). С. 15–70.
4. *Логинов Б.В., Сидоров Н.А.* // Мат. сб. 1991. Т. 182. № 5. С. 681–691.
5. *Сидоров Н.А.* // Мат. сб. 1995. Т. 186. № 2. С. 129–141.
6. *Овсяников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
7. *Sidorov N.A., Abdullin V.R.* In: Symmetry and Perturbation Theory. International Worlshop SPT 98. Roma: World Sci., 1999. C. 309–313.
8. *Сидоров Н.А., Абдуллин В.Р.* Сплетающие уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений. Препр. № 1. Сер. АНН ИРО. Изд-во Иркут. ун-та. 1999. 36 с.