Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Иркутский государственный университет»

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ, ЭКОНОМИКИ И ИНФОРМАТИКИ

**Е. Ю. Гражданцева**

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие

ИРКУТСК
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИГУ
2012

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.1я73
Г75

Печатается по решению ученого совета ИМЭИ ИГУ

**Издание выходит в рамках
Программы стратегического развития ФГБОУ ВПО «ИГУ»
на 2012–2016 гг., проект Р121-02-002**

**Рецензенты**:
канд. физ.-мат. наук, доц. *И. В. Захарова*
канд. физ.-мат. *наук С. В. Солодуша*

**Гражданцева Е. Ю.**
Г75 Интегральное исчисление функции одной переменной : учеб. пособие / Е. Ю. Гражданцева. – Иркутск : Изд-во ИГУ, 2012. – 114 с.
**ISBN 978-5-9624-0707-4**

В пособии излагается основной теоретический материал по теме «Интегральное исчисление функции одной переменной». Приводятся примеры, иллюстрирующие применение интегрального исчисления функции одной переменной с подробными решениями. Включены задачи для самостоятельного решения.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальностям и направлениям «Математика», «Прикладная математика и информатика», «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем», «Математические методы в экономике». Пособие может использоваться и в качестве справочного материала аспирантами и преподавателями.

УДК 517.3(075.8)
ББК 22.161.1я73

*Учебное пособие*

**Гражданцева** Елена Юрьевна
Интегральное исчисление функции одной переменной
Редактор *Г. А. Борисова*
Подписано в печать 24.12.2012. Формат 60x90 1/16
Уч.-изд. л. 5,0. Усл. печ. л. 7,1. Поз. 158. Тираж 100 экз. Заказ 171
Издательство ИГУ; 664003, г. Иркутск, бульвар Гагарина, 36

ISBN 978-5-9624-0707-4

СОДЕРЖАНИЕ

# 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Без понятий и методов математического анализа невозможно изучение практически никакой дисциплины естественного направления. Поэтому дисциплина «Математический анализ» является основной в учебном процессе в любом вузе.

Цель настоящего пособия – оказание помощи при изучении такого раздела математического анализа, как интегральное исчисление функции одной переменной, студентам математических направлений высших учебных заведений.

Предлагаемое пособие содержит как теоретический, так и практический материал по данному разделу. Отличительная особенность пособия заключается в том, что в нем содержится практически весь теоретический материал с доказательствами и примеры с подробным решением. Это позволит быстрее и лучше усвоить понятия математического анализа и практическое применение теоретического материала.

Пособие состоит из двух основных глав: неопределенный интеграл и определенный интеграл. В первой главе рассматриваются такие понятия, как первообразная, неопределенный интеграл и способы интегрирования. Вторая глава посвящена задачам, приводящим к понятию определенного интеграла, понятию определенного интеграла, интегральным суммам и суммам Дарбу, способам интегрирования, несобственным интегралам и приложениям определенного интеграла в геометрии, физике, биологии, экономике.

# 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 1.1. ПОНЯТИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ ФУНКЦИИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

### ПЕРВООБРАЗНАЯ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Задача определения закона движения материальной точки, если известна скорость $v = v(t)$ прямолинейного движения этой точки, является обратной к задаче определения скорости материальной точки при известном законе $s = s(t)$ прямолинейного движения этой материальной точки. Поскольку скорость $v = v(t)$ материальной точки определяется как производная по времени от закона движения: $v = s'(t)$, то, естественно, законом движения материальной точки при известной скорости ее движения будет такая функция, для которой $s'(t) = v$.

**Определение**. *Функция $F(x)$ называется **первообразной** функцией для данной функции $f(x)$ на заданном промежутке, если на нем $F'(x) = f(t)$.*

***Пример 1.1.*** $F(x) = x^3$ – первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ для любых *x*, так как $(x^3)' = 3x^2$.

***Пример 1.2.*** $F(x) = \frac{1}{3}\cos 3x$ – первообразная для функции $f(x) = \sin 3x$ для любых $x$.

***Пример 1.3.*** Для функции $f(x) = \arcsin x$ первообразной является функция $F(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ для любых $x \in [-1;1]$.

**Теорема.** *Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ – первообразные для функции $f(x)$ в некотором промежутке $X$, то найдется такое число C, что $F_2(x) - F_1(x) = C$.*

*Доказательство*. Пусть $F_1'(x) = f(x)$ и $F_2'(x) = f(x)$ для любых $x \in X$. Так как $\left(F_1(x) - F_2(x)\right)' = f(x) - f(x) = 0 = C'$, то $F_1(x) - F_2(x) = C \ \ \forall x \in X$.

***Замечание.*** Операция нахождения первообразной неоднозначна и возможна с точностью до некоторого постоянного слагаемого.

**Определение.** *Выражение $F(x) + C$, где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, $C$ – некоторая постоянная, называется **неопределенным интегралом** от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)\,dx$; т. е. $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, если $F'(x) = f(x)$, $C$ – некоторая постоянная.*

Здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, $x$ – переменная интегрирования.

**Теорема.** *Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то на нем существует первообразная для $f(x)$.*

## СВОЙСТВА НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть $f(x)$ интегрируема.

**1.** $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$.

*Доказательство*. Так как $F'(x) = f(x) \ \ \forall x$, то

$d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = d\left(F(x)\right) + 0 = f(x)\,dx$. Свойство доказано.

**2.** $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

*Доказательство*. Поскольку

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' dx = d\left(\int f(x)\,dx\right) = d\left(F(x) + C\right) = d\left(F(x)\right) + 0 = f(x)\,dx,$$

то $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$. Свойство доказано.

**3.** $\int F'(x)\,dx = F(x) + C$ или $\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C$.

*Доказательство*. Если $F^{'}(x) = f(x)$ $\forall x$, то $\int d\big(F(x)\big) \int f(x)\,dx = F(x) + C$.

Таким образом, получаем, что $\int d\big(F(x)\big) = F(x) + C$. Свойство доказано.

**4.** $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \quad A \in R$.

*Доказательство*. Согласно свойству 2 имеем

$$\left(\int A\,f(x)\,dx\right)' = A\,f(x) = A\left(\int f(x)\,dx\right)'.$$

Следовательно, $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx, \quad A \in R$. Свойство доказано.

**5.** $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$.

*Доказательство*. Действительно, используя свойство 2, получим

$$\left(\int \big(f(x) + g(x)\big)dx\right)' = f(x) + g(x) = \left(\int f(x)\,dx\right)' + \left(\int g(x)\,dx\right)'.$$

Следовательно, $\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$. Свойство доказано.

## ТАБЛИЦА ОСНОВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$,
2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$,
3. $\int a^{nx} dx = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{a^{nx}}{\ln a} + C$, $a > 0,\ a \neq 1$,
4. $\int e^{nx} dx = \dfrac{1}{n} \cdot e^{nx} + C$,

5. $\int \sin ax\,dx = -\frac{1}{a}\cdot\cos ax + C$,

6. $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\cdot\sin ax + C$,

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{1}{a}\cdot tg\,ax + C,\; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$,

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 ax} = -\frac{1}{a}\cdot ctg\,ax + C,\; x \neq \pi n$,

9. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}\cdot arctg\frac{x}{a} + C, \\ -\frac{1}{a}\cdot arcctg\frac{x}{a} + C, \end{cases}$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \begin{cases} \arcsin\frac{x}{a} + C,\; |x| < a, \\ -\arccos\frac{x}{a} + C,\; |x| < a, \end{cases}$

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln|x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C,\; |x| > a$,

12. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\; |x| \neq a$,

13. $\int sh\,ax\,dx = \frac{1}{a}\cdot ch\,ax + C$,

14. $\int ch\,ax\,dx = \frac{1}{a}\cdot sh\,ax + C$,

15. $\int \frac{dx}{ch^2 ax} = \frac{1}{a}\cdot th\,ax + C$,

16. $\int \frac{dx}{sh^2 ax} = -\frac{1}{a}\cdot cth\,ax + C$.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется первообразной?
2. Однозначна ли операция нахождения первообразной?
3. Что называется неопределенным интегралом?
4. Какими свойствами обладает неопределенный интеграл?

## 1.2. ОСНОВНЫЕ СПОСОБЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

### ИНТЕГРИРОВАНИЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОСНОВНЫХ ФОРМУЛ (ТАБЛИЧНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ)

В простейшем случае, когда заданный интеграл представляет одну из формул интегрирования, задача нахождения интеграла сводится к простому применению соответствующей формулы.

***Пример. 1.4.*** Найти интеграл $\int \sqrt[3]{x}\, dx$.

*Решение.* Так как $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$, то, применяя формулу 1 при $n = \frac{1}{3}$, получим

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4} + C.$$

***Пример 1.5.*** Найти интеграл $\int 5^x\, dx$.

*Решение.* По формуле 3 при $a = 5$, $n = 1$ получаем

$$\int 5^x\, dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C.$$

***Пример 1.6.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{9 + x^2}$.

*Решение.* Применяя формулу 9 при $a = 3$, получим

$$\int \frac{dx}{9 + x^2} = \frac{1}{3} arctg \frac{x}{3} + C.$$

***Пример 1.7.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$.

*Решение.* По формуле 10 при $a = 2$ получаем $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{2} + C$.

***Пример 1.8.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}}$.

*Решение.* Используя формулу 11 при $a=5$, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+5}\right| + C.$$

***Пример 1.9.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{x^2-4}$.

*Решение.* По формуле 12 при $a=2$ получаем

$$\int \frac{dx}{x^2-4} = \frac{1}{2\cdot 2}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| + C.$$

***Пример 1.10.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{3x}}$.

*Решение.* Поскольку $\frac{1}{\sqrt{3x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{3}}x^{-\frac{1}{2}}$, то, применяя формулу 1 при $n=-\frac{1}{2}$ и линейные свойства интеграла, получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{3x}} = \int \frac{1}{\sqrt{3}}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{x} + C.$$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРИ ПОМОЩИ ТОЖДЕСТВЕННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Этот способ заключается в следующем: используя простейшие тождественные преобразования подынтегральной функции и свойства интегралов, прежний интеграл преобразуется в табличный интеграл (или в линейную комбинацию табличных интегралов).

***Пример 1.11.*** Найти $\int (5x^4 - 3x^2 + 1)dx$.

*Решение*:

$$\int (5x^4 - 3x^2 + 1)dx = \int 5x^4 dx - \int 3x^2 dx + \int 1dx = 5\int x^4 dx - 3\int x^2 dx + \int dx =$$

$$= 5 \cdot \frac{x^5}{5} - 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x + C = x^5 - x^3 + x + C.$$

***Пример 1.12.*** Найти $\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx$.

*Решение*:

$$\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx = \int \left( x^4 - x^3 + \frac{1}{x^2} \right) dx =$$

$$= \int x^4 dx - \int x^3 dx + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C.$$

***Пример 1.13.*** Найти $\int \left( \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \right)^2 dx$.

*Решение*:

$$\int \left( \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} \right)^2 dx = \int \left( x - 2\sqrt{x}\sqrt[3]{x} + \left( \sqrt[3]{x} \right)^2 \right) dx = \int \left( x - 2x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}} \right) dx =$$

$$= \int x\, dx - 2\int x^{\frac{5}{6}} dx + \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^2}{2} - \frac{12}{11} \cdot x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{5} \cdot x^{\frac{5}{3}} + C.$$

***Пример 1.14.*** Найти $\int \frac{x^2 + 6}{x^2 + 4} dx$.

*Решение*:

$$\int \frac{x^2 + 6}{x^2 + 4} dx = \int \frac{x^2 + 4 + 2}{x^2 + 4} dx = \int \left( 1 + \frac{2}{x^2 + 4} \right) dx = \int dx + 2\int \frac{dx}{x^2 + 4} = x + arctg \frac{x}{2} + C$$

.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ЗАМЕНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (ИЛИ МЕТОД ПОДСТАНОВКИ)

**Теорема.** *Пусть функция* $x=\varphi(t)$ *имеет непрерывную производную* $\varphi'(t)$ *и обратную функцию* $t=\psi(x)$. *Тогда справедливо равенство*

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt.$$

*Доказательство.* Для доказательства найдем производные обеих частей равенства $\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$.

Производная левого интеграла равна

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'_x=f(x).$$

Производную правого интеграла найдем по правилу дифференцирования сложной функции с промежуточным аргументом $t$. Учитывая, что производная обратной функции равна

$$t'_x=\frac{1}{x'_t}=\frac{1}{\varphi'(t)},\ \text{где } \varphi'(t)\neq 0,$$

получим

$$\left(\int f([\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_x=\left(\int f([\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt\right)'_t\cdot t'_x=$$

$$=f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)}=f[\varphi(t)]=f(x).$$

Так как производные левой и правой частей равенства $\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$ равны, то интегралы $\int f(x)\,dx$ и $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$ определяют одно и то же множество первообразных. Следовательно, равенство $\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$ справедливо. Теорема доказана.

***Замечание.*** *Функцию* $\varphi(t)$ *на практике выбирают так, чтобы интеграл в правой части равенства* $\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,dt$ *оказался более простым в сравнении с интегралом в левой части этого равенства.*

***Пример 1.16.*** Найти интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

*Решение*. Произведем следующую замену переменной интегрирования: положим $x = t^2$. Тогда $\sqrt{x} = t$, $dx = d(t^2) = (t^2)' \cdot dt = 2t\,dt$ и интеграл $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ преобразуется следующим образом:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int \frac{e^t}{t} 2t\,dt = \int 2e^t\,dt = 2\int e^t\,dt = 2e^t + C.$$

Так как $\sqrt{x} = t$ (это следует из замены переменной), то, возвращаясь к переменной $x$, получим $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}} + C$.

***Пример 1.17.*** Найти интеграл $\int \sqrt{x+3}\,dx$.

*Решение*.

$$\int \sqrt{x+3}\,dx = \left\{ \begin{matrix} \textit{замена переменной}: \ x+3=t. \\ \textit{тогда} \ \ x = t-3, \ dx = (t-3)'dt = dt \end{matrix} \right\} = \int \sqrt{t}dt =$$

$$= \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}t\sqrt{t} + C = \frac{2}{3}(x+3)\sqrt{x+3} + C.$$

***Пример 1.18.*** Найти интеграл $\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx$.

*Решение*.

$$\int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx = \left\{ \begin{matrix} \textit{замена переменной}: \ \ln x = t. \\ \textit{тогда} \ x = e^t. \ dx = e^t dt. \end{matrix} \right\} = \int \frac{t^3}{e^t} e^t\,dt = \int t^3 dt =$$

$$= \frac{1}{4}t^4 + C == \frac{1}{4}\ln^4 x + C.$$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ

**Теорема.** *Пусть 1) функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *непрерывны* $\forall x \in X$ *;*

*2) существуют непрерывные производные* $u'(x)$ *и* $v'(x)$.

*Тогда* $\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$ .

*Доказательство.* Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда, по правилу дифференцирования произведения, будем иметь

$$[u(x)v(x)]' = u(x)'v(x) + u(x)v'(x).$$

Это равенство показывает, что произведение данных функций $u(x)v(x)$ является первообразной для суммы $u(x)'v(x) + u(x)v'(x)$ и, следовательно,

$$\int [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]dx = u(x)v(x) + C .$$

Отсюда, используя линейное свойство интеграла, получим

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx + C .$$

Так как по определению дифференциала

$$v'(x)dx = dv,\ u'(x)dx = du ,$$

то полученное равенство можно записать короче

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du + C ,$$

или

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du ,$$

считая, что постоянная $C$ включена в один из неопределенных интегралов. Теорема доказана.

При применении формулы интегрирования по частям

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

подынтегральное выражение $f(x)dx$ разбивают на два множителя (две части) $u$ и $dv$, из которых находят недостающие части формулы, а именно, из $u$ находится $du$, а из $dv$ находится $v$. Разбиение подынтегрального выражения на две части производится таким образом, чтобы полученный интеграл $\int v\,du$ оказался проще первоначального $\int u\,dv$.

***Пример 1.18.*** Найти интеграл $\int \ln x\,dx$.

*Решение*. Разобьем подынтегральное выражение $\ln x\,dx$ на две части следующим образом: $u = \ln x$, $dv = dx$. Тогда $du = (\ln x)'dx = \dfrac{dx}{x}$, а $v = x$ (как первообразная для функции $v$, находящейся под знаком дифференциала в выражении $dv$). Далее, используя формулу дифференцирования по частям, получим

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

***Пример 1.19.*** Найти интеграл $\int x\,e^x dx$.

*Решение*. Разобьем подынтегральное выражение на части: $u = x$, $dv = e^x dx$. Тогда $du = dx$, $v = e^x$. Затем, используя формулу интегрирования по частям, получим

$$\int x\,e^x dx = x\,e^x - \int e^x dx = x\,e^x - e^x + C.$$

***Пример 1.20.*** Найти интеграл $\int arctg\,x\,dx$.

*Решение*. Разобьем подынтегральное выражение на части: $u = arctg\,x$, $dv = dx$. Тогда $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$, $v = x$. Следовательно, согласно формуле интегрирования по частям,

$$\int arctg\,x\,dx = arctg\,x \cdot x - \int x \frac{1}{1+x^2}\,dx\,.$$

Получившийся интеграл $\int x \frac{1}{1+x^2}\,dx$ найдем методом подстановки (при помощи замены переменной интегрирования):

$$\int x \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left\{ \begin{aligned} &\textit{замена}: \ x^2+1=t. \\ &\textit{тогда} \ \ x=\sqrt{t-1}, \ dx = \frac{1}{2\sqrt{t-1}}\,dt. \end{aligned} \right\} = \int \sqrt{t-1} \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t-1}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C\,.$$

Таким образом, $\int arctg\,x\,dx = arctg\,x \cdot x - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$.

***Пример 1.21.*** Найти интеграл $\int x^2 \cos x\,dx$.

*Решение*. Проинтегрируем по частям.

$$\int x^2 \cos x\,dx = \left\{ \begin{aligned} &\textit{по частям}: \\ &u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx, \\ &dv = \cos x\,dx \Rightarrow v = \sin x \end{aligned} \right\} = x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x\,dx\,.$$

Получившийся интеграл найдем интегрированием по частям.

$$\int \sin x \cdot 2x\,dx = \int 2x \sin x\,dx = \left\{ \begin{aligned} &\textit{по частям}: \\ &u = 2x \Rightarrow du = 2dx, \\ &dv = \sin x\,dx \Rightarrow v = -\cos x \end{aligned} \right\} =$$

$$= -2x\cos x + \int 2\cos x\,dx = -2x\cos x + 2\sin x + C\,.$$

Следовательно,

$$\int x^2 \cos x\,dx = x^2 \sin x - \left(-2x\cos x + 2\sin x + C\right) =$$

$$= x^2 \sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C\,.$$

***Пример 1.22.*** Найти интеграл $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

*Решение.* $\int e^{2x}\sin 3x\,dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{по частям}: \\ u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx, \\ dv = \sin 3x\,dx \Rightarrow v = -\frac{1}{3}\cos 3x. \end{array}\right\} =$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \int \frac{2}{3}e^{2x}\cos 3x\,dx.$$

Получившийся интеграл $\int \frac{2}{3}e^{2x}\cos 3x\,dx$ найдем интегрированием по частям, разбивая на части аналогично разбиению на части исходного интеграла $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$.

$$\int \frac{2}{3}e^{2x}\cos 3x\,dx = \left\{\begin{array}{l} \textit{по частям}: \\ u = \frac{2}{3}e^{2x} \Rightarrow du = \frac{4}{3}e^{2x}dx, \\ dv = \cos 3x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{3}\sin 3x. \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{4}{9}e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Таким образом, получим

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \int \frac{4}{9}e^{2x}\sin 3x\,dx =$$

$$= -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx.$$

Далее, решая полученное уравнение

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x + \frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x - \frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx$$

относительно неизвестного $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$, получим следующую цепочку равенств

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx+\frac{4}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x,$$

$$\left(1+\frac{4}{9}\right)\int e^{2x}\sin 3x\,dx=-\frac{1}{3}e^{2x}\cos 3x+\frac{2}{9}e^{2x}\sin 3x,$$

$$\frac{13}{9}\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{-3e^{2x}\cos 3x+2e^{2x}\sin 3x}{9},$$

$$\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\frac{-3e^{2x}\cos 3x+2e^{2x}\sin 3x}{9}\cdot\frac{9}{13}.$$

Таким образом $\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\dfrac{-3e^{2x}\cos 3x+2e^{2x}\sin 3x}{13}$,

или $\int e^{2x}\sin 3x\,dx=\dfrac{e^{2x}}{13}(2\sin 3x-3\cos 3x)$.

***Замечание***

1. *В интегралах вида* $\int x^n e^{ax}dx$, $\int x^n \sin(ax)dx$, $\int x^n \cos(ax)dx$ *рекомендуется подынтегральное выражение разбивать на части таким образом, чтобы* $u=x^n$.

2. *В интегралах вида* $\int x^n \ln^k x\,dx$, $\int x^n \arcsin(ax)dx$, $\int x^n \arccos(ax)dx$, $\int x^n arctg(ax)dx$, $\int x^n arcctg(ax)dx$ *рекомендуется подынтегральное выражение разбивать на части таким образом, чтобы* $dv=x^n dx$. *(Здесь* $a, k, n$ *– действительные числа.)*

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое табличное интегрирование?
2. Как интегрировать используя тождественные преобразования подынтегральной функции?
3. Что такое метод подстановки (теорема)?
4. Что такое интегрирование по частям (теорема)?

# 1.3. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

## ПОНЯТИЕ РАЦИОНАЛЬНОЙ ДРОБИ

**Определение.** *Простейшей рациональной функцией называют многочлен – степени* $n$: $Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$.

**Определение.** *Многочлен* $Q_n(x)$ *называют приведенным, если* $a_0 = 1$.

**Определение.** *Число* $b$ *называют корнем многочлена* $Q_n(x)$, *если* $Q_n(b) = 0$.

**Определение.** ***Дробно-рациональной функцией*** *(или* ***рациональной дробью****) называют отношение двух многочленов.*

**Определение.** *Рациональную дробь называют* ***правильной****, если степень многочлена, находящегося в числителе, меньше степени многочлена, находящегося в знаменателе. Рациональную дробь называют* ***неправильной****, если степень многочлена, находящегося в числителе, не меньше степени многочлена, находящегося в знаменателе.*

***Пример 1.23***

$\frac{3x+2}{x^2}, \frac{2}{x}, \frac{x+1}{x^6-x+8}$ – правильные рациональные дроби;

$\frac{x^2}{3x+1}, \frac{x^3-1}{5x}, \frac{x+5}{3-x}$ – неправильные рациональные дроби.

**Утверждение 1.** *Любую неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы целой части и правильной рациональной дроби (непосредственным делением числителя на знаменатель).*

***Пример 1.24.*** Рассмотрим дробь $\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x-2}$.

Разделим $x^4 - x^3 + 1$ на $x^2 + x - 2$. Деление будем производить «столбиком»:

$$
\begin{array}{r|l}
-\, x^4 - x^3 + 1 & x^2 + x - 2 \\
\cline{2-2}
\underline{x^4 + x^3 - 2x^2} & x^2 - 2x + 4 \\
-\, -2x^3 + 2x^2 + 1 & \\
\underline{-2x^3 - 2x^2 + 4x} & \\
-\, 4x^2 - 4x + 1 & \\
\underline{4x^2 + 4x - 8} & \\
-8x + 9 &
\end{array}
$$

В результате деления $x^4 - x^3 + 1$ на $x^2 + x - 2$ получим

$$\frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x - 2} = x^2 - 2x + 4 + \frac{-8x + 9}{x^2 + x - 2}.$$

**Определение.** *Рациональные дроби следующих типов:*

1) $\dfrac{A}{x-a}$, 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$, $k = 2,\ 3,\ \ldots,$

3) $\dfrac{Mx+N}{x^2+px+q}$, 4) $\dfrac{Mx+N}{(x^2+px+q)^l}$, $l = 2,\ 3,\ \ldots,$

*где* $A$, $M$, $N$, $a$, $p$, $q$ *– действительные числа,* $x^2 + px + q$ *не имеет действительных корней, называют* ***простейшими*** *рациональными дробями.*

**Теорема.** *Пусть* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *– правильная рациональная дробь, в которой* $P(x)$ *и* $Q(x)$ *– многочлены аргумента* $x$*, и многочлен* $Q(x)$ *представим в виде* $Q(x) = (x-a)^k (x^2 + px + q)^l$, $k = 0,\ 1,\ 2, \ldots,$ $l = 0,\ 1,\ 2, \ldots.$ *Тогда дробь* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *разлагается единственным образом на сумму конечного числа простейших дробей по правилу*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + px + q} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + px + q)^2} + \cdots + \frac{M_l x + N_l}{(x^2 + px + q)^l},$$

*где* $A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_k, M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_l, N_1,\ N_2,\ \ldots,\ N_l$ *– действительные числа, которые можно найти методом неопределенных коэффициентов.*

**Замечание.** *Эта теорема имеет обобщение на случай представления многочлена* $Q(x)$ *в виде произведения нескольких различных линейных множителей и нескольких различных квадратичных множителей со своими степенями.*

***Пример 1.25.*** Разложить дробь $\dfrac{2x+3}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}$ на сумму простейших дробей.

*Решение.* Разлагаем знаменатель рассматриваемой дроби на множители:

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1 = (x+1)(x^2 + x + 1).$$

Тогда, используя теорему, данная дробь разложится на сумму простейших дробей следующим образом:

$$\frac{2x+3}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{2x+3}{(x+1)(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

Далее используем метод неопределенных коэффициентов для нахождения чисел $A,\ B,\ C$:

1) в получившемся равенстве приведем левую и правую части к общему знаменателю –
$$\frac{2x+3}{(x+1)(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2 + x + 1) + (x+1)Bx + C}{(x+1)(x^2+x+1)};$$
2) для того чтобы последнее равенство стало тождеством, приравниваем числители левой и правой дробей этого равенства и получаем

$$2x+3=A(x^2+x+1)+(x+1)Bx+C.$$

После перегруппировки в правой части получим

$$2x+3=(A+B)x^2+(A+C+B)x+(A+C);$$

3) приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента $x$, т. е. при $x^2$, $x$, $x^0$ (свободный член), в левой и правой частях тождества, получаем линейную систему уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $A$, $B$, $C$:

$$\left.\begin{array}{l\|l} x^2 & A+B=0 \\ x & A+C+B=2 \\ x^0 & A+C=3 \end{array}\right\};$$

4) решая полученную систему, находим $A=1$, $B=-1$, $C=2$.

Таким образом, разложение данной дроби $\dfrac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}$ на сумму простейших дробей имеет вид

$$\frac{2x+3}{x^3+2x^2+2x+1}=\frac{1}{x+1}+\frac{-x+2}{x^2+x+1}.$$

***Пример 1.26.*** Разложить на сумму простейших дробей дробь $\dfrac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}$.

*Решение*. Так как $x^3-3x^2+3x-1=(x-1)^3$, то, согласно теореме о разложении правильной рациональной дроби на сумму простейших дробей, получим $\dfrac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{(x-1)^3}$.

Далее, приводя к общему знаменателю обе части полученного равенства и приравнивая получившиеся после этого числители, получим равенство

$$5x^2-14x+11=Ax^2+(-2A+B)x+(A-B+C).$$

Откуда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях аргумента $x$, получаем систему линейных уравнений относительно неизвестных $A$, $B$, $C$ вида

$$\left.\begin{array}{l\|l} x^2 & A=5 \\ x & A-2A+B=-14 \\ x^0 & A-B+C=11 \end{array}\right\}.$$

Из полученной системы получаем $A=5$, $B=-4$, $C=2$.

Следовательно, разложение данной дроби на сумму простейших дробей примет вид $\dfrac{5x^2-14x+11}{x^3-3x^2+3x-1}=\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{-4}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{(x-1)^3}$.

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ДРОБЕЙ

Как было сказано выше, неправильную рациональную дробь можно представить в виде суммы многочлена (целой части) и правильной рациональной дроби, а правильную рациональную дробь, в свою очередь, можно представить суммой простейших рациональных дробей. Следовательно, неправильная рациональная дробь представима в виде суммы многочлена и простейших рациональных дробей. Поэтому интегрирование неправильной рациональной дроби сводится к интегрированию многочлена (что не представляет трудностей) и интегрированию простейших рациональных дробей.

Рассмотрим вопрос об интегрировании простейших рациональных дробей.

**1.** $\displaystyle\int\frac{A}{x-a}dx=A\int\frac{d(x-a)}{x-a}=A\ln|x-a|+C$.

**2.** $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=A\int(x-a)^{-k}d(x-a)=A\cdot\frac{1}{-k+1}\cdot(x-a)^{-k+1}+C=$

$$=\frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C.$$

**3.** Чтобы найти интеграл $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$, у квадратного трехчлена в знаменателе выделим полный квадрат двучлена:

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right).$$

Далее сделаем следующую замену переменной интегрирования: $x+\frac{p}{2}=t$.

Тогда $x=t-\frac{p}{2}$, $dx=dt$. Следовательно, учитывая линейные свойства неопределенного интеграла, получим следующую цепочку равенств:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx=\int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dt=\int \frac{Mt-\frac{Mp}{2}+N}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dt=$$

$$=M\int \frac{t}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}dt+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\cdot arctg\frac{t}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C=$$

$$=\frac{M}{2}\ln\left(x^2+px+q\right)+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$$

***Пример 1.27.*** Найти интеграл $\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx$.

*Решение*. Подынтегральная функция является простейшей рациональной дробью третьего типа, так как степень числителя меньше степени знаменателя и в знаменателе стоит квадратный трехчлен, не имеющий действительных корней. Поэтому решаем следующим образом:

- Выделяем полный квадрат в квадратном трехчлене
    - $x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2$;
- делаем подстановку $x + 2 = t$, тогда $x = t - 2$, $dx = dt$;
- находим интеграл

$$\int \frac{2-x}{x^2+4x+6}dx = \int \frac{2-(t-2)}{t^2+2}dt = 4\int \frac{dt}{t^2+2} - \int \frac{t}{t^2+2}dt =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{2}} arctg \frac{t}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(t^2+2) + C = \frac{4}{\sqrt{2}} arctg \frac{x+2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+6) + C.$$

**4.** Чтобы найти интеграл $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx$ ($k > 2$), аналогично вышеизложенному, делаем замену переменной интегрирования: $x + \frac{p}{2} = t$.

Тогда получим

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dt = \int \frac{Mt - \frac{Mp}{2}+N}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dt =$$

$$= M\int \frac{t}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}dt + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k} =$$

$$= \frac{M}{2(1-k)} \cdot \frac{1}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^{k-1}} + \left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right)^k}.$$

***Пример 1.28.*** Найти интеграл $\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$.

*Решение*. Подынтегральная функция является правильной рациональной дробью, так как степень числителя меньше степени знаменателя, а квадратный трехчлен в знаменателе не имеет действительных корней, поэтому в квадратном трехчлене выделяем полный квадрат: $x^2-4x+5=(x-2)^2+1$ и делаем подстановку: $x-2=t$ (тогда $x=t+2$, $dx=dt$). Таким образом, получим следующую цепочку равенств

$$\int\frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx=\int\frac{t+3}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{t}{(t^2+1)^2}dt+3\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2(t^2+1)}+3\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Найдем интеграл $\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}$ следующим образом:

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=\int\frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2}dt=\int\frac{dt}{t^2+1}-\int\frac{t^2\,dt}{(t^2+1)^2}=arctg\,t-\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+1)^2}.$$

Так как

$$\int\frac{t\cdot t\,dt}{(t^2+1)^2}=\left\{\begin{array}{l}\textit{по частям}:\\ u=t\Rightarrow du=dt,\\ dv=\dfrac{t\,dt}{(t^2+1)^2}\Rightarrow v=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{t^2+1}.\end{array}\right\}=\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

$$=\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}arctg\,t+C,$$

то

$$\int\frac{dt}{(t^2+1)^2}=arctg\,t-\left(\frac{t}{2(t^2+1)}-\frac{1}{2}arctg\,t\right)=\frac{3}{2}arctg\,t-\frac{t}{2(t^2+1)}+C.$$

Следовательно,

$$\int\frac{x+1}{x^2-4x+5}dx=-\frac{1}{2(t^2+1)}+3\left(\frac{3}{2}arctg\,t-\frac{t}{2(t^2+1)}\right)=\frac{9}{2}arctg\,t-\frac{1+3t}{2(t^2+1)}+C=$$

$$=\frac{9}{2}arctg\,(x-2)-\frac{3x-5}{2(x^2-4x+5)}+C.$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется рациональной дробью?
2. Какая рациональная дробь является правильной?
3. Какая рациональная дробь является неправильной?
4. Какие рациональные дроби называют простейшими?
5. Как представить рациональную дробь, используя простейшие дроби (теорема)?
6. Как интегрировать простейшие рациональные дроби?

## 1.4. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

### ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sin ax \cos bx\,dx$, $\int \cos ax \cos bx\,dx$, $\int \sin ax \sin bx\,dx$

Использование тригонометрических формул

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

дает возможность произведение тригонометрических функций представить в виде суммы. А именно:

**А)** используя формулу $\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$,

получим $\sin ax\cos bx = \frac{1}{2}\big(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\big)$, следовательно,

$$\int \sin ax\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\int\big(\sin(a+b)x+\sin(a-b)x\big)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos(a+b)x}{a+b}-\frac{\cos(a-b)x}{a-b}\right)+C;$$

**Б)** применяя формулу $\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$,

имеем $\cos ax\cos bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right)$, следовательно,

$$\int\cos ax\cos bx\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos(a+b)x+\cos(a-b)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a+b)x}{a+b}+\frac{\sin(a-b)x}{a-b}\right)+C;$$

**В)** согласно формуле

$$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

получаем, что $\sin ax\sin bx = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right)$, следовательно,

$$\int\sin ax\sin bx\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(a-b)x}{a-b}-\frac{\sin(a+b)x}{a+b}\right).$$

***Пример 1.29.*** Найти интеграл $\int\cos 8x\cos 6x\,dx$.

*Решение.* Чтобы найти этот интеграл, воспользуемся формулой

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right).$$

Тогда

$$\int\cos 8x\cos 6x\,dx = \frac{1}{2}\int\left(\cos 14x+\cos 2x\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 14x}{14}+\frac{\sin 2x}{2}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{28}\sin 14x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

## ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$, $n \in N,\ \ m \in N$

Для нахождения интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$, где $n \in N,\ \ m \in N$, целесообразно использовать следующие тригонометрические формулы:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x),\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\,,\ \cos^2 x + \sin^2 x = 1\,.$$

При решении интегралов вида $\int \sin^n x \cos^m x\,dx$, где $n \in N,\ \ m \in N$, возможны несколько случаев.

**Случай 1** – число $n \in N$ является нечетным, т. е. $n = 2k + 1$, $k \in N$. В этом случае $\sin^n x$ представляем в виде произведения, выделяя множитель $\sin x$, т. е.

$$\sin^n x = \sin^{2k+1} = \sin^{2k} x \cdot \sin x = \left(\sin^2 x\right)^k \cdot \sin x\,.$$

Далее, поскольку из формулы $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ следует, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим, окончательно,

$$\sin^n x = \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cdot \sin x\,.$$

Таким образом,

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = \int \sin^{2k+1} x \cos^m x\,dx = \int \left(\sin^2 x\right)^k \cos^m x \sin x\,dx =$$

$$= \int \left(1 - \cos^2 x\right)^k \cos^m x\,\sin x\,dx\,.$$

Поскольку $\sin x\,dx = d(\cos x)$, то, вводя новую переменную интегрирования как $t = \cos x$, получим, что $\sin x\,dx = -dt$, следовательно, после замены переменной интегрирования

$$\int \sin^n x \cos^m x\,dx = -\int \left(1 - t^2\right)^k t^m\,dt\,.$$

В интеграле $\int \left(1-t^2\right)^k t^m\, dt$, раскрывая скобки в подынтегральной функции, получим интеграл от степенных функций, интегрирование которых очевидно.

**Случай 2** – число $m \in N$ является нечетным, т. е. $m = 2l+1$, $l \in N$. В этом случае поступают аналогично первому случаю, а именно, $\cos^m x$ представляем в виде произведения, выделяя множитель $\cos x$, т. е.

$$\cos^m x = \cos^{2l+1} = \cos^{2l} x \cdot \cos x = \left(\cos^2 x\right)^l \cdot \cos x .$$

Далее, поскольку из формулы $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ следует, что $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, получим, окончательно,

$$\cos^m x = \left(1-\sin^2 x\right)^l \cdot \cos x .$$

Таким образом,

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int \sin^n x \cos^{2l+1} x\, dx = \int \sin^n x\, \cos^{2l} x \cos x\, dx =$$

$$= \int \sin^n x \left(1-\sin^2 x\right)^l \cos x\, dx .$$

Поскольку $\cos x\, dx = d(\sin x)$, то, вводя новую переменную интегрирования как $t = \sin x$, получим, что $\cos x\, dx = dt$, следовательно, после замены переменной интегрирования

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int t^n \left(1-t^2\right)^l\, dt .$$

Получившийся интеграл $\int t^n \left(1-t^2\right)^l\, dt$ легко находится.

**Случай 3** – числа $n \in N,\ m \in N$ являются нечетными одновременно, т. е. $n = 2k+1,\ k \in N,\ m = 2l+1,\ l \in N$.

В этой ситуации используют один из рассмотренных выше случаев.

***Пример 1.30.*** Найти интеграл $\int \sin^8 x \cos^5 x\, dx$.

*Решение*. Поскольку

$$\cos^5 x = \cos^4 x \cos x = (\cos^2 x)^2 \cos x = (1 - \sin^2 x)^2 \cos x,$$

получим

$$\int \sin^8 x \cos^5 x \, dx = \int \sin^8 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x \, dx .$$

Производя замену переменной интегрирования как $t = \sin x$ (следовательно, $\cos x \, dx = dt$), получим

$$\int \sin^8 x \cos^5 x \, dx = \int t^8 (1 - t^2)^2 \, dt = \int (t^8 - 2t^{10} + t^{12}) dt = \frac{t^9}{9} - \frac{2t^{11}}{11} + \frac{t^{13}}{13} + C .$$

Следовательно, после возврата к переменной $x$ получим

$$\int \sin^8 x \cos^5 x \, dx = \frac{1}{9} \sin^9 x - \frac{2}{11} \sin^{11} x + \frac{1}{13} \sin^{13} x + C .$$

**Случай 4** – числа $n \in N$, $m \in N$ являются четными, т. е. $n = 2k$, $k \in N$, $m = 2l$, $l \in N$.

Здесь удобно преобразовывать подынтегральную функцию, используя

- при $n \neq m$ формулы

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \; \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x),$$

- при $n = m$ формулу

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x .$$

В результате применения этих формул

- при $n \neq m$ интеграл приведется к виду

$$\int \sin^n x \cos^m x \, dx = \int \sin^{2k} x \cos^{2l} x \, dx = \int (\sin^2 x)^k (\cos^2 x)^l \, dx =$$

$$= \int \left( \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \right)^k \left( \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \right)^l dx = \frac{1}{2^{k+l}} \int (1 - \cos 2x)^k (1 + \cos 2x)^l \, dx .$$

Возводя биномы $1-\cos 2x$, $1+\cos 2x$ в соответствующие степени и раскрывая скобки, подынтегральная функция примет вид суммы, члены которой содержат четные и нечетные степени $\cos 2x$. Далее, используя линейные свойства неопределенного интеграла, интеграл $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$ преобразуется в сумму рассмотренных выше интегралов;

- при $n=m$ интеграл приведется к виду

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \int \sin^n x \cos^n x\, dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^n dx = \frac{1}{2^n}\int \sin^n 2x\, dx.$$

Далее, поскольку число $n=2k$, $k \in N$, получим

$$\int \sin^n x \cos^m x\, dx = \frac{1}{2^n}\int \sin^n 2x\, dx = \frac{1}{2^{2k}}\int \sin^{2k} 2x\, dx = \frac{1}{4^k}\int (\sin^2 2x)^k\, dx =$$

$$= \frac{1}{4^k}\int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\right)^k dx = \frac{1}{8^n}\int (1-\cos 4x)^k\, dx.$$

Далее, раскрывая в подынтегральной функции скобки и используя линейные свойства интеграла, получим сумму интегралов, каждый из которых будет соответствовать одному из четырех выше рассмотренных случаев.

***Пример 1.31.*** Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx$.

*Решение.*

$$\int \sin^2 x \cos^2 x\, dx = \int (\sin x \cos x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C = \frac{x}{8} - \frac{1}{32}\sin 4x + C.$$

***Пример 1.32.*** Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$.

*Решение.*

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int \sin^2 x(\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)\left(\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)(1+\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{8}\int (1+\cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx\,.$$

Так как

- $\frac{1}{8}\int dx = \frac{1}{8}x + C$;
- $\frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{16}\sin 2x + C$;
- $\frac{1}{8}\int \cos^2 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{1}{16}\int (1+\cos 4x)dx = \frac{1}{16}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C =$

$$= \frac{1}{16}x + \frac{1}{64}\sin 4x + C\,;$$

- $\frac{1}{8}\int \cos^3 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \cos^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\sin^2 2x)\cos 2x\,dx =$

$$= \frac{1}{8}\int (\cos 2x - \sin^2 2x \cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx - \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx\,,$$

поскольку

$$\frac{1}{8}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{16}\sin 2x + C\,,$$

$$\frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x\,dx = \left\{ \textit{замена}: \; t = \sin 2x \;\Rightarrow\; \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}t \right\} =$$

$$= \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}t^2 dt = \frac{1}{16}\cdot\frac{t^3}{3} + C = \frac{1}{48}\sin^3 2x + C\,,$$

то $\frac{1}{8}\int\cos^3 2x\,dx=\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x+C$.

Следовательно,

$$\int\sin^2 x\cos^4 x\,dx=$$

$$=\frac{1}{8}x+\frac{1}{16}\sin 2x-\left(\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}\sin 4x\right)-\left(\frac{1}{16}\sin 2x-\frac{1}{48}\sin^3 2x\right)+C=$$

$$=\frac{1}{16}x-\frac{1}{64}\sin 4x+\frac{1}{48}\sin^3 2x+C.$$

## ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$, где $R(\sin x,\ \cos x)$ ЯВЛЯЕТСЯ РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ АРГУМЕНТОВ $\sin x$ и $\cos x$

Интегралы указанного вида приводятся к интегралам от рациональных функций с помощью тригонометрической подстановки $tg\frac{x}{2}=t$, где $x\in(-\pi;\ \pi)$. (Тригонометрическую подстановку $tg\frac{x}{2}=t$ принято называть ***универсальной тригонометрической подстановкой***.)

Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $t$, используя подстановку $tg\frac{x}{2}=t$. Получим

$$\sin x=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Из того, что $tg\frac{x}{2}=t$, следует, что

$$x=2\,arctg\,t,\ dx=\frac{2}{1+t^2}dt.$$

Таким образом

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\ \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt = \int R_1(t)\,dt,$$

где $R_1(t)$ является рациональной функцией аргумента $t$.

***Пример 1.33.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

*Решение.*

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left\{ \textit{подстановка}:\ tg\frac{x}{2} = t \right\} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2t}\,dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \left\{ \textit{обратная подстановка}:\ t = tg\frac{x}{2} \right\} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

***Пример 1.34.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

*Решение.*

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left\{ \textit{подстановка}:\ tg\frac{x}{2} = t \right\} = \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5}\,dt =$$

$$= \int \frac{\frac{2}{1+t^2}}{\frac{2t^2+8t+8}{1+t^2}}\,dt = \int \frac{2}{1+t^2}\cdot\frac{1+t^2}{2(t^2+4t+4)}\,dt = \int \frac{dt}{t^2+4t+4} = \int \frac{dt}{(t+2)^2} =$$

$$= -\frac{1}{t+2} + C = -\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2} + C.$$

**Замечание.** *Если в интеграле* $\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx$, *где* $R(\sin x,\ \cos x)$ *является четной функцией аргументов* $\sin x$ *и* $\cos x$, *т. е. подынтегральная функция* $R(\sin x,\ \cos x)$ *содержит* $\sin x$ *и* $\cos x$ *только в четных степенях, либо*

$R(-\sin x,\ -\cos x)=R(\sin x,\ \cos x)$, *то удобно применять подстановку* $tg\,x=t$.

Тогда, если $tg\,x=t$, то

$$x=arctg\,t\,,\ dx=\frac{dt}{1+t^2}\,,$$

$$\sin^2 x=\frac{tg^2x}{1+tg^2x}=\frac{t^2}{1+t^2}\,,\ \cos^2 x=\frac{1}{1+tg^2x}=\frac{1}{1+t^2}$$

и, следовательно,

$$\int R(\sin x,\ \cos x)\,dx=\int R\left(\frac{t^2}{1+t^2},\ \frac{1}{1+t^2}\right)\frac{dt}{1+t^2}=\int R_1(t)\,dt\,,$$

где $R_1(t)$ является рациональной функцией аргумента $t$.

***Пример 1.35.*** Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$.

*Решение*. Подынтегральная функция $\frac{1}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}$ является четной относительно $\sin x$ и $\cos x$, следовательно, воспользуемся подстановкой $tg\,x=t$. Тогда

$$\sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,,\ \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,.$$

И получаем следующую цепочку равенств

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x+2\sin x\cos x-\cos^2 x}=\int\frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}+2\cdot\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}-\frac{1}{1+t^2}}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+2t-1}=\int\frac{dt}{(t+1)^2-2}=\int\frac{dt}{(t+1)^2-(\sqrt{2})^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}}\right|+C=\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{tg\,x+1-\sqrt{2}}{tg\,x+1+\sqrt{2}}\right|+C\,.$$

## ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, где $R(\sin x)$ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ АРГУМЕНТА $\sin x$

Интегралы этого вида при использовании подстановки $\sin x = t$ приводятся к интегралам вида $\int R(t)\,dt$, где $R(t)$ – рациональная функция аргумента $t$.

***Пример 1.36.*** Найти интеграл $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx$.

*Решение.*

$$\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x}dx = \{\text{подстановка}: \sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt\} = \int \frac{dt}{4+t^2} =$$

$$= \frac{1}{2}arctg\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2}arctg\left(\frac{\sin x}{2}\right) + C.$$

## ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, где $R(\cos x)$ ЯВЛЯЕТСЯ ФУНКЦИЕЙ АРГУМЕНТА $\cos x$

Интегралы данного вида приводятся к интегралам вида $\int R(t)\,dt$, где $R(t)$ – рациональная функция аргумента, при использовании подстановки $\cos x = t$.

***Пример 1.37.*** Найти интеграл $\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx$.

*Решение.*

$$\int \frac{\sin x}{2+\cos x}dx = \{\cos x = t \Rightarrow \sin x\,dx = -dt\} = -\int \frac{dt}{2+t} = -\ln|2+t| + C =$$

$$= -\ln|2+\cos x| + C.$$

## ИНТЕГРАЛЫ ВИДА $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, где $m \in N$, $n \in N$

Подстановкой $tg\, x = t$ данный интеграл приводится к интегралу от рациональной функции следующим образом:

$$\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = \int \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)^{\frac{m}{2}} \left(1 + t^2\right)^{\frac{n-2}{2}} dt .$$

В частности, к интегралу вида $\int \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$, где $m \in N$, $n \in N$ сводятся следующие интегралы:

- интеграл вида $\int \frac{dx}{\sin^m x}$, используя прежде подстановку $\frac{x}{2} = t$, т. е.

$$\int \frac{dx}{\sin^m x} = \left\{ \frac{x}{2} = t \right\} = \frac{1}{2^{m-1}} \int \frac{dt}{\sin^m t \cos^m t};$$

- интеграл вида $\int \frac{dx}{\cos^n x}$, используя прежде подстановку $x + \frac{\pi}{2} = t$ и формулу $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, получим

$$\int \frac{dx}{\cos^n x} = \int \frac{dt}{\sin^n t} .$$

Надлежащие преобразования получившегося интеграла описаны выше.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как интегрировать $\int \sin ax \cos bx\, dx$, $\int \cos ax \cos bx\, dx$ , $\int \sin ax \sin bx\, dx$?
2. Как интегрировать $\int \sin^n x \cos^m x\, dx$, $n \in N$, $m \in N$?
3. Что такое универсальная тригонометрическая подстановка?
4. Для каких интегралов используется универсальная тригонометрическая подстановка?

5. Каким образом интегрировать $\int R(\sin x)\cos x\,dx$, где $R(\sin x)$ является функцией аргумента $\sin x$ и $\int R(\cos x)\sin x\,dx$, где $R(\cos x)$ является функцией аргумента $\cos x$?
6. Какую подстановку лучше использовать в $\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$, где $m \in N$, $n \in N$?

# 1.5. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЕЙ

## ИНТЕГРАЛЫ С ЛИНЕЙНОЙ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬЮ

Если подынтегральная функция содержит только линейные иррациональности вида $(ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}$, $(ax+b)^{\frac{m_2}{n_2}}$, …, где $a \in R$, $a \neq 0$, $b \in R$, $m_1$, $n_1$, $m_2$, $n_2$ – целые числа, то полезна подстановка $(ax+b)=t^s$, где $s$ – наименьшее общее кратное чисел $n_1$, $n_2$. … С помощью такой подстановки интеграл с линейной иррациональностью преобразуется в интеграл от рациональной функции.

***Пример 1.38.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}$.

*Решение.* Здесь подынтегральная функция содержит линейные иррациональности $(2x+b)^{\frac{2}{3}}$ и $(2x+b)^{\frac{1}{2}}$. Следовательно, $n_1=3$, $n_2=2$, а наименьшее общее кратное этих чисел $s=6$.

Применим подстановку $2x+1=t^6$. Тогда $x=\frac{1}{2}(t^6-1)$, $dx=3t^5dt$.

Таким образом, после замены переменной интегрирования получим

$$\int \frac{dx}{(2x+1)^{\frac{2}{3}}-(2x+1)^{\frac{1}{2}}}=\int \frac{3t^5}{t^4-t^3}dt=\int \frac{3t^5}{t^3(t-1)}dt=$$

$$=\int \frac{3t^2}{t-1}dt = 3\int\left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$=3\left(\frac{t^2}{2}+t+\ln|t-1|\right)+C = 3\left(\frac{(2x+1)^{\frac{1}{3}}}{2}+(2x+1)^{\frac{1}{6}}+\ln\left|(2x+1)^{\frac{1}{6}}-1\right|\right)+C.$$

## ИНТЕГРАЛЫ С КВАДРАТИЧНОЙ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТЬЮ

- *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$*, где* $a$*,* $b$*,* $c$ *– действительные числа.*

Интегралы такого вида путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена, в зависимости от знака числа $a$, приводятся к одному из табличных интегралов.

***Пример 1.39.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$.

*Решение*. В квадратном трехчлене $x^2+2x+5$ выделим полный квадрат: $x^2+2x+5=(x+1)^2+4$. Тогда

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \left\{\text{замена } x+1=t \Rightarrow x=t-1,\ dx=dt\right\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+4}\right|+C = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right|+C.$$

***Пример 1.40.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}$.

*Решение*. Выделяя полный квадрат в квадратном трехчлене $-3x^2+4x-1$, получим

$$-3x^2+4x-1=-3\left(x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}\right)=-3\left(\left(x^2-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{1}{9}\right)=3\left(\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right).$$

Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{-3x^2+4x-1}}=\int\frac{dx}{\sqrt{3\left(\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2\right)}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{2}{3}\right)^2}}=$$

$$=\left\{\textit{замена}:\ x-\frac{2}{3}=t\ \Rightarrow x=t+\frac{2}{3},\ dx=dt\right\}=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\frac{dt}{\sqrt{\frac{1}{9}-t^2}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\arcsin(3t)+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\left(3\left(x-\frac{2}{3}\right)\right)+C=\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(3x-2)+C.$$

- *Интегралы вида* $\int\frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$, *где* $A$, $B$, $a$, $b$, $c$ *– действительные числа.*

Чтобы найти такой интеграл, надо с подынтегральной функцией произвести следующие действия: в числителе выделить производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня, и почленным делением получившуюся дробь разложить на сумму двух дробей. После такого преобразования подынтегральной функции данный интеграл можно будет представить в виде суммы двух интегралов, один из которых элементарными преобразованиями приводится к табличному интегралу, а другой является интегралом вида $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, который рассмотрен выше.

***Пример 1.41.*** Найти интеграл $\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx$.

*Решение*. Найдем производную квадратного трехчлена, стоящего под знаком корня:

$$(2x^2+8x+1)'=4x+8.$$

Выделим в числителе производную квадратного трехчлена:

$$5x-3=\frac{5}{4}(4x+8)-13\,.$$

Таким образом, после преобразования числителя и почленного деления, получим следующую цепочку равенств:

$$\int\frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx=\int\frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx=$$

$$=\frac{5}{4}\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx-13\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,.$$

Найдем каждое слагаемое правого выражения этого равенства.

Первое слагаемое:

$$\frac{5}{4}\int\frac{4x+8}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx=\left\{2x^2+8x+1=t\ \Rightarrow\ (4x+8)dx=dt\right\}=\frac{5}{4}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=$$

$$=\frac{5}{4}\cdot 2\sqrt{t}+C=\frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1}+C\,,$$

Второе слагаемое:

$$13\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2+8x+1}}=13\int\frac{dx}{\sqrt{2\left(x^2+4x+\frac{1}{2}\right)}}=\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2-\frac{7}{2}}}=\left\{x+2=t\ \Rightarrow\ x=t-2,\ dx=dt\right\}=\frac{13}{\sqrt{2}}\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}}=$$

$$=\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|t+\sqrt{t^2-\frac{7}{2}}\right|+C=\frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right|+C\,.$$

Следовательно,

$$\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C.$$

- *Интегралы вида* $\int \frac{dx}{(Ax+B)\sqrt{ax^2+bx+c}}$, *где* $A$, $B$, $a$, $b$, $c$ – *действительные числа,* $A \neq 0$.

Используя подстановку $Ax+B=\frac{1}{t}$, этот интеграл приводится к рассмотренному выше интегралу вида $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, где $a$, $b$, $c$ – действительные числа.

***Пример 1.42.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}}$.

*Решение.*

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{5x^2-2x+1}} = \left\{ x=\frac{1}{t} \Rightarrow dx=-\frac{1}{t^2}dt,\ t=\frac{1}{x} \right\} = \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{5}{t^2}-\frac{2}{t}+1}} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2-2t+5}} = \int \frac{dt}{\sqrt{(t-1)^2+6}} = \ln\left|t-1+\sqrt{t^2-2t+5}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x}-1+\sqrt{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+5}\right| + C = \ln\left|\frac{1-x+\sqrt{5x^2-2x+1}}{x}\right| + C.$$

***Пример 1.43.*** Найти интеграл $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}}$.

*Решение.*

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+3x+3}} = \left\{ x+1=\frac{1}{t} \Rightarrow x=\frac{1}{t}-1,\ dx=-\frac{1}{t^2},\ t=\frac{1}{x+1} \right\} =$$

$$= \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2 + 3\left(\frac{1}{t}-1\right)+3}} dt = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \ln\left|t + \frac{1}{2} + \sqrt{t^2+t+1}\right| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1} + 1}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{x^2+3x+3}}{x+1}\right| + C .$$

- *Интегралы вида* $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$*, где* $a$*,* $b$*,* $c$ *– действительные числа,* $a \neq 0$.

Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене и применением линейной подстановки интеграл $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\, dx$ примет один из следующих видов:

1) при $a > 0$ получим интеграл вида $\int \sqrt{t^2+M}\, dt$, где $M \in R$;

2) при $a < 0$ получим интеграл вида $\int \sqrt{M-t^2}\, dt$, где $M \in R$.

Чтобы найти такие интегралы, сначала подынтегральную функцию представляют в виде дроби, в которой знаменателем является иррациональность, а числителем – выражение, стоящее под знаком корня. Затем в преобразованной подынтегральной функции производят почленное деление, и таким образом исходный интеграл ($\int \sqrt{t^2+M}\, dt$ или $\int \sqrt{M-t^2}\, dt$) преобразуют в сумму двух интегралов, один из которых является табличным, а другой интеграл находится интегрированием по частям один раз. После этого, выражая из полученного равенства исходный интеграл ($\int \sqrt{t^2+M}\, dt$ или $\int \sqrt{M-t^2}\, dt$), получим окончательный ответ.

***Пример 1.44.*** Найти интеграл $\int \sqrt{x^2+5}\, dx$.

*Решение.*

$$\int \sqrt{x^2+5}\, dx = \int \frac{x^2+5}{\sqrt{x^2+5}} dx = \int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}} + \frac{5}{\sqrt{x^2+5}}\right) dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}} dx + 5\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} .$$

Так как

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}dx = \left\{\begin{array}{l} по \;\; частям: \\ u = x \;\Rightarrow\; du = dx, \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2+5}} \;\Rightarrow\; v = \sqrt{x^2+5} \end{array}\right\} = x\sqrt{x^2+5} - \int \sqrt{x^2+5}\,dx;$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+5}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+5}\right| + C,$$

то

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = x\sqrt{x^2+5} - \int \sqrt{x^2+5}\,dx + 5\ln\left|x + \sqrt{x^2+5}\right| + C.$$

Далее, выражая из полученного равенства $\int \sqrt{x^2+5}\,dx$, получим ответ:

$$\int \sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{x^2+5} + 5\ln\left|x + \sqrt{x^2+5}\right|\right) + C.$$

***Пример 1.45.*** Найти интеграл $\int \sqrt{9-x^2}\,dx$.

*Решение.*

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = 9\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$$

Поскольку

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \arcsin\frac{x}{3} + C;$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \left\{\begin{array}{l} по \;\; частям: \\ u = x \;\Rightarrow\; du = dx, \\ dv = \dfrac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}} \;\Rightarrow\; v = -\sqrt{9-x^2} \end{array}\right\} = -x\sqrt{9-x^2} + \int \sqrt{9-x^2}\,dx,$$

то

$$\int \sqrt{9-x^2}\,dx = 9\arcsin\frac{x}{3} - \left(-x\sqrt{9-x^2} + \int \sqrt{9-x^2}\,dx\right) + C.$$

Следовательно,

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3}+x\sqrt{9-x^2}\right)+C.$$

- *Тригонометрические подстановки.*

Интегралы с квадратичными иррациональностями вида $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$ приводятся к интегралам от рациональной относительно $\sin x$ и $\cos x$ функции с помощью надлежащей тригонометрической подстановки:

1) для иррациональности $\sqrt{a^2-x^2}$ удобна подстановка $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$),
2) для иррациональности $\sqrt{a^2+x^2}$ удобна подстановка $x=a\,tg\,t$ (или $x=a\,ctg\,t$),
3) для иррациональности $\sqrt{x^2-a^2}$ удобна подстановка $x=\dfrac{a}{\sin t}$ (или $x=\dfrac{a}{\cos t}$).

***Пример 1.46.*** Найти интеграл $\int\sqrt{9-x^2}\,dx$.

*Решение.*

$$\int\sqrt{9-x^2}\,dx=\left\{x=3\sin t\ \Rightarrow\ dx=3\cos t\,dt,\ t=\arcsin\frac{x}{3}\right\}=$$

$$=3\int\sqrt{9-9\sin^2 t}\cos t\,dt=9\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt=9\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{9}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{9}{2}t+\frac{9}{4}\sin 2t+C=\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\sin t\cos t+C=$$

$$=\frac{9}{2}t+\frac{9}{2}\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}+C=\frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{3}+\frac{9}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{9}}+C=$$

$$=\frac{1}{2}\left(9\arcsin\frac{x}{3}+x\sqrt{9-x^2}\right)+C.$$

***Пример 1.47.*** Найти интеграл $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$.

*Решение.*

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} = \left\{ x = \frac{2}{\sin t} \Rightarrow dx = -\frac{2\cos t}{\sin^2 t}dt,\ t = \arcsin\frac{2}{x} \right\} =$$

$$= -\int \frac{\frac{4}{\sin^2 t}\cdot\frac{2\cos t}{\sin^2 t}}{\sqrt{\frac{4}{\sin^2 t}-4}}dt = -4\int \frac{\cos t}{\sin^3 t\sqrt{1-\sin^2 t}}dt = -4\int \frac{\cos t}{\sin^3 t\cos t}dt =$$

$$= -4\int \frac{dt}{\sin^3 t} = -4\int \frac{dt}{8\sin^3\frac{t}{2}\cos^3\frac{t}{2}} = \left\{ tg\frac{t}{2} = u \Rightarrow t = 2arctg\,u,\ dt = \frac{2du}{1+u^2} \right\} =$$

$$= -4\int \left(1+\frac{1}{u^2}\right)^{\frac{3}{2}}\left(1+u^2\right)^{\frac{3}{2}}\frac{2du}{1+u^2} = -8\int \frac{(1+u^2)^3}{u^3(1+u^2)}du = -8\int \frac{(1+u^2)^2}{u^3}du =$$

$$= -8\int \left(\frac{1}{u^3}+\frac{2}{u}+u\right)du = -8\left(-\frac{1}{2u^2}+2\ln|u|+\frac{u^2}{2}\right)+C.$$

Далее, постепенно возвращаясь к старой переменной интегрирования путем обратных подстановок, получим

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} + 2\ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}\right| + C.$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какую подстановку используют в интегралах с линейной иррациональностью?
2. Каковы способы интегрирования выражений с квадратичной иррациональностью?
3. Какие подстановки нужны для интегрирования выражений $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$, $\sqrt{x^2-a^2}$?

## 1.6. ИНТЕГРАЛЫ ОТ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ БИНОМОВ

Интегралы от дифференциальных биномов $\int x^m (a+bx^n)^p\,dx$, где *m, n, p* – рациональные числа, выражаются через элементарные функции только в трех случаях: когда *p* – целое число; когда $\frac{m+1}{n}$ – целое число, когда $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число. В каждом из этих случаев удобно применять свою подстановку:

1) если $p$ – целое число, то подстановка $x=t^s$, где $s$ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m$ и $n$;

2) если $\frac{m+1}{n}$ – целое число, то подстановка $a+bx^n=t^s$, где $s$ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m$ и $n$;

3) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое число, то подстановка $\frac{a}{x^n}+b=t^r$, где $r$ – знаменатель дроби $p$.

***Пример 1.48.*** Найти интеграл $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}$,

*Решение.* $\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\int x^{-4}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,dx$.

Здесь $m=-4$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=1$.

Поскольку $\frac{m+1}{n}+p=\frac{-4+1}{2}-\frac{1}{2}=-2$ – целое число, то применяем подстановку вида $\frac{a}{x^n}+b=t^r$, где $r$ – знаменатель дроби $p$.

Так как $m=-4$, $n=2$, $p=-\frac{1}{2}$, $a=1$, $b=1$, $r=2$, то, окончательно, получим подстановку $\frac{1}{x^2}+1=t^2$. Следовательно, применяя данную подстановку, получим

$$\int\frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^2}}=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{x^2}+1=t^2\ \Rightarrow\ x^2=(t^2-1)^{-1},\ x=(t^2-1)^{-\frac{1}{2}},\ dx=-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}t\,dt\\ t=\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.\end{array}\right\}=$$

$$=\int\frac{-(t^2-1)^{-\frac{3}{2}}t\,dt}{(t^2-1)^{-2}\sqrt{1+(t^2-1)^{-1}}}=-\int\frac{(t^2-1)^2t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\frac{1}{(t^2-1)}}}dt=-\int\frac{(t^2-1)^2t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{t^2}{(t^2-1)}}}dt=$$

$$=-\int\frac{(t^2-1)^2t}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}}\frac{t}{(t^2-1)^{\frac{1}{2}}}}dt=-\int(t^2-1)\,dt=-\left(\frac{t^3}{3}-t\right)+C=t-\frac{1}{3}t^3+C=$$

$$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}-\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\right)^3+C=\frac{3x^2\sqrt{1+x^2}-\left(\sqrt{1+x^2}\right)^3}{3x^3}+C=\frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3}+C.$$

***Пример 1.49.*** Найти интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}$.

*Решение.* $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}}=\int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{-10}dx$.

Здесь $m=-\frac{1}{2}$, $n=\frac{1}{4}$, $p=-10$, $a=1$, $b=1$, следовательно, применим подстановку вида $x=t^s$, где $s$ – наименьшее общее кратное знаменателей дробей $m$ и $n$ (т. е. $s=4$), поскольку $p=-10$ – целое число.

Тогда получим следующую цепочку равенств:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^{10}} = \left\{ x = t^4 \;\Rightarrow\; dx = 4t^3 dt,\; t = x^{\frac{1}{4}} \right\} = \int \frac{4t^3}{t^2 (t+1)^{10}} dt =$$

$$= 4\int \frac{t}{(t+1)^{10}} dt = 4\int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}} dt = 4\int \frac{dt}{(t+1)^9} - 4\int \frac{dt}{(t+1)^{10}} =$$

$$= 4 \cdot \left( -\frac{1}{8(t+1)^8} \right) - 4 \cdot \left( -\frac{1}{9(t+1)^9} \right) + C = -\frac{1}{2(t+1)^8} + \frac{4}{9(t+1)^9} + C =$$

$$= -\frac{1}{2\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^8} + \frac{4}{9\left(\sqrt[4]{x}+1\right)^9} + C\,.$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что такое дифференциальный бином?
2. Какие есть способы интегрирования дифференциальных биномов?

# 2. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

## 2.1. ЗАДАЧИ, ПРИВОДЯЩИЕ К ПОНЯТИЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

### ЗАДАЧА О ПРОЙДЕННОМ ПУТИ

Рассмотрим задачу: требуется найти путь $S$, пройденный материальной точкой за промежуток времени $[t_0,\ T]$, если известен закон изменения мгновенной скорости $v = v(t)$.

Чтобы решить поставленную задачу, разобьем отрезок времени $[t_0,\ T]$ моментами времени (точками) $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = T$ на $n$ частичных временных отрезков $[t_{k-1},\ t_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, и обозначим длину отрезка $[t_{k-1},\ t_k]$ как $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$. Далее, пусть $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta t_k$. Если отрезки $[t_{k-1},\ t_k]$ достаточно малы, то на каждом из них, без ограничения общности, движение можно считать равномерным, что дает нам следующее уравнение для определения пути:

$$S \approx v(\tau_1)\Delta t_1 + v(\tau_2)\Delta t_2 + \cdots + v(\tau_n)\Delta t_n = \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k ,$$

где точка $\tau_k \in [t_{k-1},\ t_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

Эта сумма будет тем точнее, чем меньше каждый временной отрезок, а уменьшение временных отрезков можно достичь увеличением точек разбиения, т. е. при $d \to 0$. Таким образом, за путь, пройденный за период $[t_0, T]$ со скоростью $v = v(t)$, можно принять

$$S = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} v(\tau_k)\Delta t_k .$$

### ЗАДАЧА О ПЛОЩАДИ КРИВОЛИНЕЙНОЙ ТРАПЕЦИИ

**Определение.** *Криволинейной трапецией называют плоскую фигуру, ограниченную графиком функции* $f(x)$*, которая непрерывна и неотрицательна на отрезке* $[a,\ b]$*, а также прямыми* $x = a$*,* $x = b$*,* $y = 0$.

Рассмотрим задачу: требуется найти площадь $S_{aABb}$ криволинейной трапеции (рис.1).

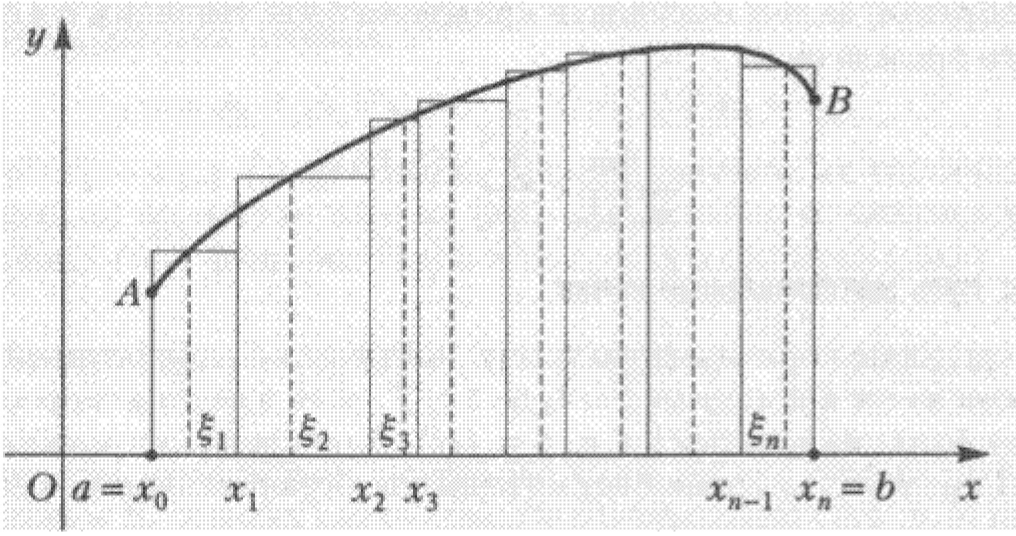



Рис. 1

Чтобы решить эту задачу, разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ на $n$ частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ и положим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, \dots, n$. Пусть наибольшая из разностей $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ есть $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$. Выберем на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ точку $\xi_k$. Тогда произведение $f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$ дает площадь прямоугольника со сторонами $f(\xi_k)$ и $\Delta x_k$, т. е. $S_k = f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$, а сумма

$$\sum_{k=1}^{n} S_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k \approx S_{aABb}.$$

Эта сумма будет тем точнее, чем меньше каждый частичный отрезок. Таким образом, за площадь криволинейной трапеции можно принять $S_{aABb} = \lim\limits_{d \to 0} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как формулируется задача о пройденном пути?
2. Что называется криволинейной трапецией?
3. Как формулируется задача о площади криволинейной трапеции?

## 2.2. ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим отрезок $[a,\ b]$ действительной числовой оси $OX$.

**Определение.** *Точки* $x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n$, *такие что* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, *называют* ***точками разбиения*** *отрезка* $[a,\ b]$*;*

*отрезки* $[x_{k-1},\ x_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, *называют* ***частичными отрезками****;*

*число* $d = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$, *где* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ *называют* ***диаметром разбиения*** *отрезка* $[a,\ b]$ *на частичные отрезки* $[x_{k-1},\ x_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

**Определение.** *Сумму* $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k) \cdot \Delta x_k$ *называют* ***интегральной суммой*** *функции* $y = f(t)$ *на отрезке* $[a,\ b]$.

Пусть 1) функция $y = f(t)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$,

2) точка $\tau_k \in [x_{k-1},\ x_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$.

**Определение.** *Определенным интегралом от функции* $y = f(t)$ *на отрезке* $[a,\ b]$ *называют предел интегральной суммы* $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\tau_k) \cdot \Delta x_k$, *не зависящий от способа разбиения отрезка* $[a,\ b]$ *на частичные отрезки* $[x_{k-1},\ x_k]$ *и от выбора точек* $\tau_k \in [x_{k-1},\ x_k]$, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n$, *при стремлении диаметра* $d$ *разбиения к нулю и обозначают* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, *т. е.*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tau_k) \cdot \Delta x_k .$$

Здесь $\int$ – знак интеграла, число $a$ – нижний предел интегрирования, число $b$ – верхний предел интегрирования, $f(x)dx$ – подынтегральное выражение, $f(x)$ – подынтегральная функция, $x$ – переменная интегрирования.

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называют точками разбиения?
2. Что называется частичным отрезком?
3. Что такое диаметр разбиения?
4. Что называется интегральной суммой?
5. Что называется определенным интегралом?

## 2.3. УСЛОВИЯ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ФУНКЦИЙ, КЛАССЫ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

**Определение.** *Функция $y = f(t)$, определенная на отрезке $[a,\ b]$, называется* ***интегрируемой*** *(по Риману) на этом отрезке, если для нее существует определенный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$.

**Теорема 1 (необходимое условие интегрируемости).** *Функция $y = f(t)$, интегрируемая на отрезке $[a,\ b]$, ограничена на нем.*

*Доказательство*. Пусть $f(x)$ неограниченна на отрезке $[a,b]$, тогда при любом разбиении отрезка $[a,b]$ функция $f(x)$ неограниченна хотя бы на одном из частичных отрезков. Пусть, для определенности, она неограниченна на отрезке $[x_0, x_1]$.

На остальных частичных отрезках выберем точки $\xi_2$, $\xi_3, \ldots$, $\xi_n$ и обозначим

$$\sigma' = f(\xi_2)\Delta x_2 + f(\xi_3)\Delta x_3 + \cdots + f(\xi_n)\Delta x_n .$$

Зададим произвольное число $M > 0$ и возьмем такое $\xi_1 \in [x_0, x_1]$, чтобы $|f(\xi_1)| \geq \dfrac{|\sigma'| + M}{\Delta x_1}$, так как функция $f(x)$ неограниченна на отрезке $[x_0, x_1]$. Тогда $|f(\xi_1)|\Delta x_1 > |\sigma'| + M$ и

$$|\sigma| = |f(\xi_1)\Delta x_1 + \sigma'| \geq |f(\xi_1)|\Delta x_1 - |\sigma'| \geq M .$$

То есть получаем, что интегральная сумма $\sigma$ по абсолютной величине больше любого положительного числа $M$. Следовательно, не существует предела интегральной суммы (здесь интегральная сумма не имеет конечного предела). Таким образом, функция $f(x)$ не интегрируема на отрезке. Теорема доказана.

Например, функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}\end{cases}$$

ограничена на отрезке [0, 1] (так как $|f(x)|\le 1\ \forall x\in[0,\ 1]$), но она не интегрируема на нем.

Пусть

1) $f(x)$ функция ограничена на $[a,b]$,
2) $\{x_k\}$, $k=0,1,...,n$ – разбиение $[a,b]$ точками: $a=x_0<x_1<\cdots<x_k<\cdots x_n=b$,
3) $M_k=\sup\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$ – точная верхняя грань функции $f(x)$ на $k$-м отрезке разбиения,
4) $m_k=\inf\limits_{x_{k-1}\le x\le x_k} f(x)$ – точная нижняя грань функции $f(x)$ на $k$-м отрезке разбиения.

**Определение.** Сумма вида $S=\sum\limits_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k$ называется верхней суммой Дарбу функции для разбиения, построенного выше.

**Определение.** Сумма вида $s=\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k$ называется нижней суммой Дарбу функции для разбиения, построенного выше.

**Теорема 2.** Суммы Дарбу и интегральная сумма связаны отношением $s\le\sigma\le S$.

*Доказательство*. Из определений точных верхней и нижней граней следует, что $\forall\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$ справедливо неравенство $m_k\le f(\xi_k)\le M_k$. Следовательно,

$$s=\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k\le\sum_{k=1}^{n} M_k\,\Delta x_k=S\,.$$

Поскольку $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, то получим, что $s \le \sigma \le S$. Теорема доказана.

**Геометрическая интерпретация сумм Дарбу:** Нижняя сумма Дарбу $s$ – площадь ступенчатой фигуры, вписанной в криволинейную трапецию, верхняя сумма Дарбу $S$ – площадь ступенчатой фигуры, описанной вокруг криволинейной трапеции.

**Замечание 1.** Суммы Дарбу зависят от разбиения отрезка, а интегральная сумма зависит еще и от выбора точек из отрезка разбиения.

**Замечание 2.** При фиксированном разбиении отрезка суммы Дарбу – это некоторые числа, а интегральная сумма – это переменная величина, так как точка внутри отрезка разбиения выбирается произвольно.

**Определение.** Верхним интегралом Дарбу $J^*$ называется точная нижняя грань множества $\{S\}$ верхних сумм Дарбу.

**Определение.** Нижним интегралом Дарбу $J_*$ называется точная верхняя грань множества $\{s\}$ нижних сумм Дарбу.

**Свойства сумм Дарбу:**

1. $s \le \sigma \le S$ (теорема 2).
2. Для любого фиксированного разбиения $\{x_k\}$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ такие, что а) $0 \le S - \sigma \le \varepsilon$, б) $0 \le \sigma - s \le \varepsilon$.

*Доказательство*. Докажем пункт а). Пусть $\{x_k\}$ – некоторое фиксированное разбиение $[a,b]$; $S = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$, $M_k = \sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)$. По свойству точной верхней грани можно найти такую точку $\xi_k$, что $0 \le M_k - f(\xi_k) < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, $k = \overline{1,n}$.

Умножим неравенство на $\Delta x_k$ и просуммируем по $k = \overline{1,n}$. Получим

$$0 \le \sum_{k=1}^{n} M_k \,\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon .$$

Следовательно, $0 \le S - \sigma < \varepsilon$. Пункт б) доказывается аналогично. Свойство доказано.

**3.** От добавления к данному разбиению отрезка новых точек разбиения а) нижняя сумма Дарбу не уменьшится, б) верхняя сумма Дарбу не увеличится.

*Доказательство.* Докажем пункт б). Добавим к разбиению $\{x_k\}$ еще одну точку $x'$, т. е. построим новое разбиение $\{x_k^{'}\} = \{x_k\} \cup x'$ отрезка $[a,b]$. Пусть для определенности $x' \in [x_{k-1}, x_k]$.

Тогда $[x_{k-1}, x_k] = [x_{k-1}, x'] \cup [x', x_k]$.

Обозначим $M_k^{'} = \sup\limits_{x_{x-1} \le x \le x'} f(x)$, $M_k^{''} = \sup\limits_{x' \le x \le x_k} f(x)$. Поскольку

$M_k^{'}(x' - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - x')$ – часть верхней суммы Дарбу для разбиения $\{x_k^{'}\}$,

$M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$ – часть верхней суммы Дарбу для начального разбиения $\{x_k\}$,

и так как $M_k^{'} \le M_k$ и $M_k^{''} \le M_k$, то

$$M_k^{'}(x' - x_{k-1}) + M_k^{''}(x_k - x') \le M_k(x' - x_{k-1}) + M_k(x_k - x') = M_k \,\Delta x_k .$$

Следовательно, $S' \le S$. Пункт а) доказывается аналогично. Свойство доказано.

**4.** Нижняя сумма Дарбу для разбиения $\{x_k^{'}\}$ не превосходит верхнюю сумму Дарбу для другого разбиения $\{x_k^{''}\}$ того же отрезка.

**5.** Множество $\{S\}$ верхних сумм Дарбу функции $f(x)$ для всевозможных разбиений $[a,b]$ ограничено снизу, а множество $\{s\}$ нижних сумм Дарбу функции $f(x)$ для всевозможных разбиений $[a,b]$ ограничено сверху, причем точная верхняя грань множества $\{s\}$ не превосходит точную верхнюю грань множества $\{S\}$.

6. **Основная лемма Дарбу.** Пусть $\{x_k\}$ – разбиение $[a,b]$, $\{x_k'\}$ – измельчение добавлением $l$ точек. Тогда $0 \le S - S' \le (M-m)l\,d$, $0 \le s' - s \le (M-m)l\,d$, где $d$ – диаметр $\{x_k\}$, и а) $J^* = \lim\limits_{d\to 0} S$, б) $J_* = \lim\limits_{d\to 0} s$.

**Теорема 3 (основная теорема Дарбу).** Для того чтобы ограниченная на $[a,b]$ функция $f(x)$ была интегрируема, необходимо и достаточно, чтобы $J_* = J^*$,т. е. $\lim\limits_{d\to 0}(S-s)=0$.

*Доказательство.* При доказательстве будем учитывать, что

1) условие $\lim\limits_{d\to 0}(S-s)=0$ означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что при $d < \delta$ выполняется неравенство $|S-s| < \varepsilon$;
2) неравенство $|S-s| < \varepsilon$ равносильно неравенству $S - s < \varepsilon$, так как $s \le S$.

Докажем необходимость. Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, т. е. $\exists J = \int\limits_a^b f(x)dx$. Это означает, что $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta > 0$ такое, что $|\sigma - J| < \dfrac{\varepsilon}{4}\ \ \forall \{x_k\}$, удовлетворяющего неравенству $d < \delta$ независимо от выбора точек $\xi_k$.

Зафиксируем такое разбиение $\{x_k\}$. Для него, по свойству 2, можно найти такие интегральные суммы $\sigma'$ и $\sigma''$, что $S - \sigma' \le \dfrac{\varepsilon}{4}$, $\sigma'' - s \le \dfrac{\varepsilon}{4}$. Следовательно,

$$S - s = (S-\sigma') + (\sigma' - J) + (J - \sigma'') + (\sigma'' - s) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Пусть $S - s < \varepsilon$. Согласно свойству 5 для любых нижних и верхних сумм Дарбу $s \le J_* \le J^* \le S$. Следовательно, $0 \le J^* - J_* \le S - s$. То есть $0 \le J^* - J_* < \varepsilon$ по предположению $\forall \varepsilon > 0$. Следовательно, $J^* = J_*$.

Полагая $J^* = J_* = J$, получим для любого разбиения $s \le J \le S$. Если $\sigma$, $s$, $S$ отвечают одному разбиению $\{x_k\}$, то $s \le \sigma \le S$. Таким образом, из полученных неравенств и следует, что

$$| \sigma - J | \le S - s .$$

По условию $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что при $d < \delta$ выполняется неравенство $S - s < \varepsilon$. Но тогда при $d < \delta$ выполняется неравенство $| \sigma - J | < \varepsilon$. Следовательно, $J = \lim\limits_{d \to 0} \sigma$, т. е. функция интегрируема на $[a, b]$. Достаточность доказана. Таким образом, теорема доказана.

**Теорема 4.** *Функция* $y = f(t)$*, непрерывная на отрезке* $[a, \; b]$*, интегрируема на этом отрезке.*

*Доказательство.* Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, \; b]$, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на нем, т. е. $\forall \dfrac{\varepsilon}{b-a} > 0 \;\; \exists \delta > 0$ такое, что $| f(\xi_1) - f(\xi_2) | < \varepsilon \;\; \forall \xi_1, \xi_2$, удовлетворяющих неравенству $| \xi_1 - \xi_2 | < \delta$.

Выберем $\{x_k\}$ так, чтобы $d < \delta$. Следовательно, $M_k - m_k < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$, где $M_k = \sup\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$, $m_k = \inf\limits_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)$. Получим

$$S - s = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon ,$$

т. е. $S - s < \varepsilon$. Теорема доказана.

**Теорема 5.** *Функция* $y = f(t)$*, определенная и монотонная на отрезке* $[a, \; b]$*, интегрируема на этом отрезке.*

*Доказательство.* Пусть функция $f(x)$ монотонна на $[a, \; b]$, для определенности, пусть $f(x_1) < f(x_2) \;\; \forall x_1, x_2 : x_1 < x_2$ и $M_k$, $m_k$ определены выше.

Для монотонной на отрезке $[a, \; b]$ функции получим

$$\sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k) = (M_1 - m_1) + (M_2 - m_2) + \cdots + (M_n - m_n) =$$

$$= M_n - m_1 = f(b) - f(a),$$

так как $M_1 = m_2$, $M_2 = m_3$, …, $M_{n-1} = m_n$.

Пусть диаметр разбиения $d<\delta=\dfrac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ тогда

$$S-s=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)\Delta x_k<\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)d=(f(b)-f(a))\cdot\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}=\varepsilon\,.$$

Теорема доказана.

**Теорема 6.** *Функция* $y=f(t)$, *ограниченная на отрезке* $[a,\ b]$ *и имеющая на нем конечное число точек разрыва, интегрируема на этом отрезке.*

**Замечание.** *Ограниченность функции не является достаточным условием для ее интегрируемости.*

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какая функция называется интегрируемой на отрезке?
2. Что называется верхней (нижней) суммой Дарбу?
3. Какова геометрическая интерпретация сумм Дарбу?
4. Какие функции можно интегрировать на отрезке (теоремы 1–5)?
5. Является ли свойство ограниченности функции достаточным условием ее интегрируемости?

## 2.4. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда

**1)** функция $f(x)+g(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b\big(f(x)+g(x)\big)dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$;

**2)** функция $C\,f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $\int_a^b C\,f(x)\,dx=C\int_a^b f(x)\,dx$, где $C$ – постоянная величина;

**3)** функция $f(x)\cdot g(x)$ интегрируема на $[a,b]$;

**4)** функция $f(x)$ интегрируема на $[c,d]$ где $[c,d]\subset[a,b]$ ;

**5)** $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$, если $c \in [a,\ b]$, и если функция $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a,c]$ и $[c,b]$, то она интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;

**6)** $\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

**7)** $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

**8)** если функция $f(x) \ge 0 \quad \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx = \ge 0$ и если $f(x) \ge g(x) \ \ \forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$;

**9)** функция $|f(x)|$ интегрируема на $[a,b]$ и $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$, $a < b$.

*Доказательство*. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда существуют пределы $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ и $\lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$.

**1.** Согласно свойствам предела последовательности имеем

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{d\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k\right) =$$
$$= \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} (f(\xi_k) + g(\xi_k))\Delta x_k .$$

Следовательно, функция $f(x) + g(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$.

Таким образом, $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \lim\limits_{d\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} (f(\xi_k) + g(\xi_k))\,\Delta x_k =$

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k + \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx .$$

Свойство 1 доказано.

**2.** Свойство 2 доказывается аналогично.

**3.** Представим произведение функций в виде

$$f(x)\cdot g(x)=\frac{1}{4}\Big((f(x)+g(x))^2-(f(x)-g(x))^2\Big).$$

Используя свойства пределов аналогично доказательству свойства 1 и само свойство 1, получим, что функции $t_1=(f(x)+g(x))^2$ и $t_2=(f(x)-g(x))^2$ интегрируемы на отрезке $[a,b]$.

По свойствам 1 и 2 функция $\frac{1}{4}(t_1-t_2)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$. Следовательно, и функция $f(x)\cdot g(x)$ интегрируема на этом отрезке. Свойство 3 доказано.

**4.** Свойство 4 очевидно. На самом деле, разбиение отрезка $[a,b]$ содержит разбиение отрезка $[c,d]$, а следовательно, из существования предела интегральных сумм, построенных для отрезка $[a,b]$, следует существование предела интегральных сумм, построенных для отрезка $[c,d]$. Таким образом, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[c,d]$. Свойство 4 доказано.

**5.** Первая часть свойства 5 очевидна, поскольку

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,\Delta x_k+\lim_{d\to 0}\sum_{k=m+1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k=$$

$$=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx,$$

где разбиение отрезка $[a,b]$ следующее:

$$a=x_0<x_1<\dots<x_m=c<x_{m+1}<\dots<x_n=b\ .$$

Докажем вторую часть этого свойства.

Рассмотрим отрезки $[a,c]$ и $[c,b]$ такие, что $[a,c]\cup[c,b]=[a,b]$, т. е. $a<c<b$.

Пусть $\{x_k'\}$ – разбиение отрезка $[a,c]$, $\{x_k''\}$ – разбиение отрезка $[c,b]$. Поскольку функция интегрируема на этих отрезках, существуют пределы $\lim\limits_{d'\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k')\,\Delta x_k'$ и $\lim\limits_{d''\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k'')\,\Delta x_k''$, где $d' = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k'\}$, $d'' = \max\limits_{1\le k\le n}\{\Delta x_k''\}$.

При этом $\{x_k'\}\cup\{x_k''\}=\{x_k\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$.

Пусть $d=\min(d',d'')$, тогда существует сумма $\lim\limits_{d'\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k')\,\Delta x_k' + \lim\limits_{d'\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k'')\,\Delta x_k''$ и

$$\lim_{d'\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')\,\Delta x_k' + \lim_{d'\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k'')\,\Delta x_k'' = \lim_{d\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')\,\Delta x_k' + f(\xi_k'')\,\Delta x_k''\right) =$$

$$= \lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k .$$

Следовательно, функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, и

$\int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$. Свойство 5 доказано.

**6.** Свойство 6 очевидно, поскольку разбиение отрезка $[a,a]$ равно 0, а следовательно, и $\int\limits_a^a f(x)\,dx = 0$. Свойство 6 доказано.

**7.** Пусть $\{x_k\}$ – разбиение отрезка $[a,b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$,

$\{x_k'\}$ – разбиение отрезка $[b,a]$: $b = x_0 > x_1 > \dots > x_n = a$.

Тогда $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ для отрезка $[a,b]$ и $\Delta x_k = -(x_k - x_{k-1}) = \Delta x_k'$ для отрезка $[b,a]$.

Следовательно, $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k = -\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k'$, а значит

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$. Свойство 7 доказано.

**8.** Пусть $a<b$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k$ .

Переходя к пределу, получим следующее:

$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \le \sum\limits_{k=1}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k = \int\limits_a^b g(x)\,dx$. Свойство 8 доказано.

**9.** Поскольку $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$, то, согласно свойству 8, получим $-\int\limits_a^b |f(x)|\,dx \le \int\limits_a^b f(x)\,dx \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, т. е. (по свойству модуля)

$\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. Свойство 9 доказано.

## 2.5. ИНТЕГРАЛ С ПЕРЕМЕННЫМ ВЕРХНИМ ПРЕДЕЛОМ

**Определение.** Функция $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ называется интегралом с переменным верхним пределом.

**Геометрический смысл интеграла с переменным верхним пределом:** площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y=f(t)\ge 0$, $y=0$, $t=a$, $t=x>a$.

**Теорема.** Производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу, т. е.

$$\Phi'(x) = \left(\int\limits_a^x f(t)\,dt\right)' = f(x).$$

*Доказательство.* Возьмем любое $x\in[a,b]$ и придадим ему приращение $\Delta x \ne 0$, такое, что $x+\Delta x \in [a,b]$. Тогда, учитывая свойство 7, получим следующую цепочку равенств:

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\int_a^{x} f(t)\,dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt=\Phi(x)+\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Следовательно, приращение функции $\Phi(x)$ имеет вид

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

Используя теорему Лагранжа, получим

$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=f(x+\theta\cdot\Delta x)(x+\Delta x-x)=f(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x$, $\theta\in[0,1]$.

По определению производной

$$\Phi^{'}(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\theta\cdot\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=f(x)\quad\forall x\in[a,b].$$

Таким образом,

$$\Phi^{'}(x)=\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)^{'}=f(x),\text{ а }\int f(x)\,dx=\int_0^x f(t)\,dt+C.$$

Теорема доказана.

## 2.6. ФОРМУЛА НЬЮТОНА – ЛЕЙБНИЦА

**Теорема.** *Если* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$ *и* $F(x)$ *– первообразная для функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$*, т. е.* $F'(x)=f(x)$*,то*

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a).$$

*Доказательство.* Способ 1 (используя теорему Лагранжа). Разобьем отрезок $[a, b]$ на $n$ частичных отрезков точками $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$. Согласно формуле Лагранжа и тому, что $F'(x)=f(x)$, имеем

$$F(x_1) - F(a) = F'(c_1)(x_1 - a) = f(c_1)\Delta x_1,\ a < c_1 < x_1,$$
$$F(x_2) - F(x_1) = F'(c_2)(x_2 - x_1) = f(c_2)\Delta x_2,\ x_1 < c_1 < x_2,$$
$$F(x_3) - F(x_2) = F'(c_3)(x_3 - x_2) = f(c_3)\Delta x_3,\ x_2 < c_1 < x_3,$$
$$\dots\ \dots\dots\ \dots\quad \dots\ \dots\ \dots\dots\ \dots\quad \dots\ \dots\dots\ \dots\ \dots\quad \dots\ \dots\dots$$
$$F(b) - F(x_{n-1}) = F'(c_n)(b - x_{n-1}) = f(c_n)\Delta x_n,\ x_{n-1} < c_1 < b.$$

Суммируя эти равенства, получим

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k .$$

Так как $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$, то

$$\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)\,dx,$$

где $d = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k$ – диаметр разбиения отрезка $[a,\ b]$ на частичные отрезки $[x_{k-1},\ x_k],\ k = 1,\ 2,\ \dots,\ n$.

Поэтому, переходя в равенстве $F(b) - F(a) = \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$ к пределу при $d \to 0$, получим

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Способ 2 (используя интеграл с переменным верхним пределом). Рассмотрим функцию $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$. Эта функция является первообразной для функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Поскольку две первообразные для одной и той же функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое $C$, т. е. $\Phi(x) = F(x) + C$, или $\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) + C\ \ \forall x \in [a,b]$, где функция $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$, при $x = a$ имеем

$\int\limits_a^a f(t)\,dt = F(a) + C$. А по свойству 7 $\int\limits_a^a f(t)\,dt = 0$. Следовательно, $F(a) + C = 0$, т. е. $C = -F(a)$ и $\int\limits_a^x f(t)\,dt = F(x) + F(a)$.

При $x = b$ имеем $\int\limits_a^b f(t)\,dt = F(b) + C = F(b) - F(a)$, или, обозначая $t$ через $x$, получим $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) + C = F(b) - F(a)$. Теорема доказана.

**Замечание.** Если ввести обозначение $F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$, то формула Ньютона – Лейбница примет вид $\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b$, где $F'(x) = f(x)$.

***Пример 2.1.*** Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 2x\,dx$.

*Решение*. Так как первообразная подынтегральной функции $f(x) = 2x$ есть $F(x) = x^2$, то, по формуле Ньютона – Лейбница, получим

$$\int\limits_0^1 2x\,dx = x^2\Big|_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1 - 0 = 1.$$

***Пример 2.2.*** Вычислить интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$.

*Решение*. Первообразной подынтегральной функции $f(x) = \cos x$ является функция $F(x) = \sin x$. Следовательно, используя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1.$$

***Пример 2.3.*** Вычислить интеграл $\int_0^1 \left(3x - e^{2x}\right)dx$.

*Решение.* Подынтегральная функция – $f(x) = 3x - e^{2x}$. Ее первообразная – $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}$. Следовательно, согласно формуле Ньютона – Лейбница,

$$\int_0^1 \left(3x - e^{2x}\right)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{3}{2}\cdot 1^2 - \frac{1}{2}\cdot e^2\right) - \left(\frac{3}{2}\cdot 0^2 - \frac{1}{2}\cdot e^0\right) =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}e^2 - 0 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}e^2.$$

***Пример 2.4.*** Скорость движения тела задана уравнением $v = 12t - 3t^2$ (м/с). Найти путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

*Решение*. Скорость тела в момент начала движения и остановки равна нулю. Чтобы найти момент остановки тела, решим уравнение $v = 0$, т. е. уравнение $12t - 3t^2 = 0$. Уравнение имеет два корня: $t_1 = 0$, и $t_2 = 4$. Поскольку момент начала движения – это $t_1 = 0$, то момент остановки – это $t_2 = 4$. Следовательно, путь, пройденный телом от начала движения до остановки, будет

$$S = \int_0^4 (12t - 3t^2)dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = (6\cdot 16 - 64) - 0 = 32 \text{ (м)}.$$

## 2.7. ТЕОРЕМЫ О СРЕДНЕМ

**Теорема 1.** *Если* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то найдется такая точка* $c \in (a, b)$, *что* $\int_a^b f(x)\,dx = (b - a)f(c)$.

*Доказательство.* По формуле Ньютона – Лейбница имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F'(x) = f(x)$.

Применяя теорему Лагранжа (если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$ и дифференцируема в $(a,\ b)$, то найдется такая точка $c \in (a,\ b)$, что $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$), получим

$$F(b) - F(a) = (b-a)F'(c) = (b-a)f(c),$$

где $c \in (a,\ b)$. Теорема доказана.

**Замечание.** *Формула* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c)$ *имеет простое геометрическое толкование: площадь криволинейной трапеции равна площади прямоугольника с тем же основанием и высотой, равной* $f(c)$.

**Теорема 2.** Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a,b]$, функция $g(x)$ – монотонна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $\xi \in [a,b]$ такая, что

$$\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = g(a)\cdot\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\cdot\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx.$$

**Замечание.** Формула

$\int\limits_a^b f(x)\cdot g(x)\,dx = g(a)\cdot\int\limits_a^{\xi} f(x)\,dx + g(b)\cdot\int\limits_{\xi}^b f(x)\,dx$ называется формулой Бонне.

**Определение.** Число $\mu = \dfrac{1}{b-a}\cdot\int\limits_a^b f(x)\,dx$ называется средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

***Пример 2.5.*** Найти среднее значение функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0,\pi]$.

*Решение.* По определению, так как $a = 0$, $b = \pi$, получим

$$\mu = \frac{1}{\pi - 0}\cdot\int\limits_0^{\pi}\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}(-\cos\pi + \cos 0) = \frac{2}{\pi}.$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Какими свойствами обладает определенный интеграл?
2. Каков вид имеет формула Ньютона – Лейбница и для чего она применяется?
3. Каково геометрическое толкование теоремы о среднем для определенного интеграла?
4. Что называется средним значением функции на отрезке?

# 2.8. СПОСОБЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Для вычисления определенного интеграла широко используется формула Ньютона – Лейбница. Однако чтобы этой формулой воспользоваться, необходимо найти первообразную подынтегральной функции, т. е., по сути, найти соответствующий неопределенный интеграл. Все способы интегрирования неопределенного интеграла, кроме интегрирования заменой переменной и интегрирования по частям, основаны на тождественном преобразовании подынтегральной функции. При вычислении определенных интегралов эти способы также занимают особое место.

## ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННОЙ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

**Теорема.** *Пусть дан интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$, *где*

*1) функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a,\ b]$,

*2) функция* $x=\varphi(t)$ *имеет на отрезке* $[\alpha,\ \beta]$ *непрерывную производную, при этом* $a \le \varphi(t) \le b$ *и* $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$,

*3) функция* $f(x)$ *на отрезке* $[a,\ b]$ *имеет первообразную* $F(x)$, *т. е.* $F'(x)=f(x)$.

*Тогда справедлива формула замены переменной интегрирования в определенном интеграле:* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,dt$.

*Доказательство*. Пусть 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,\ b]$,

2) функция $x=\varphi(t)$ имеет на отрезке $[\alpha,\ \beta]$ непрерывную производную, при этом $a \le \varphi(t) \le b$ и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$,

3) функция $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ имеет первообразную $F(x)$, т. е. $F'(x)=f(x)$.

Тогда, по правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$F'(x)=\left[F\left(\varphi(t)\right)\right]'=F'\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)=f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t).$$

Далее, воспользовавшись формулой Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt=\int f\left(\varphi(t)\right)d\left(\varphi(t)\right)=F\left[\varphi(\beta)\right]-F\left[\varphi(\alpha)\right]=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, получили формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)\,dt.$$

**Замечание.** *Чтобы пользоваться формулой замены переменной в определенном интеграле, надо подобрать такую подстановку, которая упростила бы подынтегральную функцию, т. е. облегчила бы процесс интегрирования, а также, согласно выбранной подстановке, пересчитать пределы интегрирования для новой переменной интегрирования.*

***Пример 2.6.*** Вычислить интеграл $\displaystyle\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)}$.

*Решение.* Воспользуемся подстановкой $\ln x=t$. Тогда $x=e^t$, $dx=e^t dt$. Пересчитаем пределы интегрирования:

Так как $\ln x=t$, то при $x=1$ получим $t=\ln 1=0$, а при $x=e$ получим $t=\ln e=1$, следовательно, при изменении $1\le x\le e$, новая переменная интегрирования принимает значения $0\le t\le 1$. Таким образом, получим

$$\int_1^e \frac{dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)} = \left\{\begin{array}{l} \textit{подстановка}: \ \ln x = t \ \Rightarrow \ x = e^t, \ dx = e^t dt, \\ \textit{если} \ x = 1, \ \textit{то} \ t = 0, \\ \textit{если} \ x = e, \ \textit{то} \ t = 1. \end{array}\right\} = \int_0^1 \frac{e^t dt}{e^t (1+t^2)} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = arctg\, t\Big|_0^1 = arctg\, 1 - arctg\, 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

## ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ЧАСТЯМ В ОПРЕДЕЛЕННОМ ИНТЕГРАЛЕ

**Теорема.** *Пусть функции* $u = u(x)$ *и* $v = v(x)$ *имеют на отрезке* $[a, b]$ *непрерывные производные* $u'$ *и* $v'$. *Тогда имеет место равенство*

$$\int_a^b u\, dv = (u \cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

*Доказательство.* В силу условия теоремы произведение $u v = u(x) v(x)$ данных функций имеет на отрезке $[a, b]$ производную, равную

$$(u v)' = u' v + u v',$$

т. е. произведение $u v$ является первообразной на отрезке $[a, b]$ для функции $u' v + u v'$. Применяя формулу Ньютона – Лейбница, получим

$$\int_a^b (u'v + u v')\, dx = (u v)\Big|_a^b.$$

По правилу интегрирования суммы это равенство можно представить в виде

$$\int_a^b u'v\, dx + \int_a^b u v' dx = (u v)\Big|_a^b,$$

откуда находим

$$\int_a^b u v' dx = (u v)\Big|_a^b - \int_a^b u' v\, dx.$$

Так как по определению дифференциала функции

$$v'dx = dv\,,\ u'dx = du\,,$$

то окончательно получим

$$\int_a^b u\,dv = (u\cdot v)\Big|_a^b - \int_a^b v du\,.$$

***Пример 2.7.*** Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} x\cos x\,dx$.

*Решение.*

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx = \begin{Bmatrix} \text{по частям}: \\ u = x \ \Rightarrow\ du = dx \\ dv = \cos x\,dx \ \Rightarrow\ v = \sin x \end{Bmatrix} = (x\sin x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x\,dx =$$

$$= (x\sin x)\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_0^{\pi} = \pi\sin\pi - 0 + \cos\pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2\,.$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как производится замена переменной в определенном интеграле?
2. Как интегрировать по частям определенный интеграл?

## 2.9. НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### ИНТЕГРАЛЫ С БЕСКОНЕЧНЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Пусть функция $f(x)$ определена для всех $x \ge a$ и интегрируема (например, непрерывна) на каждом конечном отрезке $[a,\ b]$, где $a$ – фиксировано, а $b \ge a$ – произвольно.

**Определение.** ***Несобственными интегралами первого рода*** *называют интегралы вида*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx\,,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx\,,\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx\,.$$

Рассмотрим функцию $J(b)=\int_a^b f(x)\,dx$ аргумента $b \ge a$.

**Определение.** *Если при $b \to +\infty$ функция имеет конечный предел, то несобственный интеграл 1-го рода называют* ***сходящимся*** *и полагают, по определению,*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\,dx,$$

*в противном случае этот несобственный интеграл называют* ***расходящимся.***

***Пример 2.8.*** Вычислить или установить расходимость интеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$.

*Решение.* По определению

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to+\infty}\left(-e^{-x}\Big|_0^b\right) = \lim_{b\to+\infty}(-e^{-b}+e^0) = \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{e^b}+1\right)=1.$$

Так что интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ сходится и равен 1.

***Пример 2.9.*** Вычислить или установить расходимость интеграла $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$.

*Решение.* По определению

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b \frac{1}{x}dx = \lim_{b\to+\infty}(\ln b - \ln 1) = \infty.$$

Следовательно, согласно определению, интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx$ является расходящимся.

***Пример 2.10.*** Вычислить или установить расходимость интеграла

$$\int_0^{+\infty} \cos x\, dx .$$

*Решение.* По определению $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} \cos x\, dx = \lim_{b\to+\infty} (\sin b)$.

Однако известно, что такой предел не существует. Следовательно, согласно определению, интеграл $\int_0^{+\infty} \cos x\, dx$ является расходящимся.

***Пример 2.11.*** Установить, при каких $\alpha$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ будет сходящимся.

*Решение.* При $\alpha = 1$ интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ является расходящимся, это показано в примере 2.9.

При $\alpha \neq 1$, согласно определению, имеем

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{b\to+\infty} \left( \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_1^b \right) = \lim_{b\to+\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \textit{если } \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{\alpha - 1}, & \textit{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Таким образом, получаем, что интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ расходится при $\alpha \le 1$ и сходится при $\alpha > 1$.

**Замечание.** *Если ввести условное обозначение* $F(+\infty) = \lim_{b\to+\infty} F(b)$, *то, по определению несобственного интеграла (используя данное обозначение), получим*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^{b} f(x)\, dx = \lim_{b\to+\infty} \big(F(b) - F(a)\big) = F(+\infty) - F(a) ,$$

*где* $F'(x) = f(x)$. *Это позволяет для несобственного интеграла записать, формально, формулу Ньютона – Лейбница:* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$.

**Теорема сравнения 1.** *Пусть на отрезке* $[a,\ b]$ *при любом* $b > a$ *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы и* $0 \le f(x) \le g(x)$ *для любых* $x \in [a,\ b]$.

*Тогда*

1) *если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *сходится, то и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится;*
2) *если интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится, то и интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *расходится.*

*Доказательство*. 1. Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится.

Из неотрицательности функции $f(x)$ для любых $x \ge a$ следует, что

$J(b) = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx$ есть неубывающая функция аргумента $b$, поскольку, если $b_1 > b$ ,то

$$J(b_1) = \int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b} f(x)\,dx + \int\limits_b^{b_1} f(x)\,dx \ge \int\limits_a^{b} f(x)\,dx = J(b).$$

Далее, так как $f(x) \le g(x)$ для любых $x \ge a$, то при любом $b > a$ имеем

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx \le \int\limits_a^{b} g(x)\,dx.$$

Однако интеграл $\int_a^b g(x)\,dx$ не превосходит несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$, который по условию является сходящимся. Следовательно, при любом $b > a$ имеем

$$J(b) = \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^{+\infty} g(x)\,dx = L\,.$$

Таким образом, интеграл $J(b) = \int_a^b f(x)\,dx$ представляет собой функцию аргумента $b$, которая является неубывающей и ограниченной сверху (при $b \to +\infty$). Поэтому функция $J(b)$ имеет конечный предел при $b \to +\infty$, а это означает, согласно определению, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

2. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится. Применяя метод от противного, допустим, что интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Тогда, согласно доказанной первой части теоремы, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ будет сходящимся, что противоречит условию. Следовательно, допущение о том, что интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, неверно. То есть интеграл $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ будет расходиться.

**Теорема сравнения 2.** *Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны и неотрицательны для всех $x \ge a$ и пусть $g(x)$ функция отлична от нуля для всех достаточно больших x. Тогда, если существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = k \ne 0$, то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.*

**Теорема сравнения 3**

*1. Если существует такое число* $\alpha > 1$*, что для всех достаточно больших x справедливо неравенство* $0 \le f(x) \le \frac{M}{x^{\alpha}}$*, где* $M > 0$ *и не зависит от x, то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.*

*2. Если для всех достаточно больших x справедливо неравенство* $f(x) \ge \frac{M}{x}$*, где* $M > 0$ *и не зависит от x, то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *расходится.*

***Пример 2.12.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$.

*Решение*. При $x \ge 1$ $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = g(x)$. Известно, что интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$ сходится (см. пример 2.11). Следовательно, по первой теореме сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ является сходящимся.

***Пример 2.13.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x}}\,dx$.

*Решение*. При $x \ge 1$ $f(x) = \frac{x+2}{x\sqrt{x}} > \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$, а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ является расходящимся (см. пример 2.11). Следовательно, согласно первой теореме сравнения интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x}}\,dx$ будет расходиться.

***Пример 2.14.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4}\,dx$.

*Решение.* При $x \ge 1$ подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{x^3+3x+4} > 0$. Представим ее в виде $f(x) = \dfrac{2+\dfrac{1}{x^2}}{x+\dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{x^2}}$. Из такого представления подынтегральной функции видно, что при $x \to +\infty$ она ведет себя как функция $\tilde{f}(x) = \dfrac{2}{x}$. Выберем в качестве функции сравнения $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

Поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left( \dfrac{2x^2+1}{x^3+3x+4} : \dfrac{1}{x} \right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(2x^2+1)x}{x^3+3x+4} = 2 \ne 0$,

а интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x}$ расходящийся (пример 2.9), то, на основании второй теоремы сравнения, интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{2x^2+1}{x^3+3x+4}dx$ расходится.

***Пример 2.15.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{x-2}{x^3+x^2+2x+5}dx$.

*Решение.* Для $x \ge 3$ имеем $0 < \dfrac{x-2}{x^3+x^2+2x+5} < \dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$.

Интеграл $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{dx}{x^2}$ сходящийся (пример 2.11). Следовательно, применяя третью теорему сравнения, делаем вывод, что интеграл $\int\limits_3^{+\infty} \dfrac{x-2}{x^3+x^2+2x+5}dx$ сходится.

**Определение.** *Интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся****, если сходится интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|dx$.

**Определение.** *Интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *называется* ***условно сходящимся****, если интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится, а интеграл* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *расходится.*

**Теорема.** *Если интеграл* $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится.*

*Доказательство*. Пусть интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится. Тогда, по определению, существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^{b} |f(x)|\,dx$. Для любого $x$ из области определения функции $f(x)$ справедливо неравенство $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. Из этого неравенства следует, что $0 \le |f(x)| + f(x) \le 2|f(x)|$.

Вместе с интегралом $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, который сходится по условию, сходится и интеграл $\int_a^{+\infty} 2|f(x)|\,dx = 2\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$. Поэтому, согласно первой теореме сравнения, из справедливости неравенства $0 \le |f(x)| + f(x) \le 2|f(x)|$ следует, что интеграл $\int_a^{+\infty} \left(f(x) + |f(x)|\right)dx$ сходится. А это означает, что существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^{b} \left(f(x) + |f(x)|\right)dx$.

Очевидно, что $f(x) = \left(f(x) + |f(x)|\right) - |f(x)|$ для любых $x \ge a$, откуда следует, что для всякого $b > a$ справедливо равенство

$$\int_a^{b} f(x)\,dx = \int_a^{b} \left(f(x) + |f(x)|\right)dx - \int_a^{b} |f(x)|\,dx.$$

Каждое слагаемое правой части этого равенства имеет при $b \to +\infty$ конечный предел. Следовательно, и правая часть этого равенства имеет конечный предел при $b \to +\infty$, другими словами, существует конечный предел $\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Таким образом, согласно определению, получаем, что интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

**Теорема.** *Если существует такое число* $\alpha>0$*, что для всех больших x функция* $f(x)$ *удовлетворяет условию* $|f(x)|\le\frac{M}{x^\alpha}$*, где* $M>0$ *и не зависит от x, то интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится абсолютно.*

**Признак Абеля – Дирихле (*достаточный признак сходимости*).**

*Пусть*

1) *функция* $f(x)$ *непрерывна и имеет ограниченную первообразную* $F(x)$ *при* $x\ge a$*;*
2) *функция* $g(x)$ *непрерывно дифференцируема при* $x\ge a$*;*
3) *функция* $g(x)$ *монотонно убывает при* $x\ge a$*;*
4) $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$.

*Тогда интеграл* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ *сходится.*

***Пример 2.16.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$, $\alpha>0$.

*Решение.* Подынтегральную функцию можно представить как произведение двух функций $f(x)=\sin x$ и $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$.

Функция $f(x)=\sin x$ имеет всюду ограниченную первообразную $F(x)=-\cos x$, а функция $g(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ непрерывно дифференцируема и монотонно убывает при $x\ge1$, и $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0$.

Следовательно, так как выполнены все условия признака Абеля – Дирихле, интеграл $\int\limits_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^\alpha}dx$ сходится.

**Определение.** *Если при* $a \to -\infty$ *функция* $J(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *имеет конечный предел, то несобственный интеграл называют **сходящимся** и полагают, по определению,*

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a \to -\infty} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

*в противном случае несобственный интеграл называют **расходящимся.***

**Определение.** *Если при* $a \to -\infty$ *и* $b \to +\infty$ *функция* $J(a,\ b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *имеет конечный предел, то несобственный интеграл называют **сходящимся** и полагают, по определению,*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

*в противном случае несобственный интеграл называют **расходящимся.***

**Замечание.** *Равенство* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int\limits_a^b f(x)\,dx$ *можно заменить равенством* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{\substack{M \to +\infty \\ N \to +\infty}} \int\limits_{-N}^{M} f(x)\,dx$, *где* $M,\ N \to +\infty$ *независимы друг от друга.*

**Определение.** ***Главным значением по Коши*** $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *несобственного интеграла* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *называют предел*

$$v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{N \to +\infty} \int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

**Замечание.** *Если предел* $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N} f(x)\,dx$ *существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ *сходится в смысле главного значения.*

($v.p.$ – начальные буквы слов *valeur principal* – главное значение.)

***Пример 2.17.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}$.

*Решение.*

Имеем $v.p.\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2} = \lim\limits_{N\to+\infty}\int\limits_{-N}^{N}\frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+N^2}{1+N^2} = 0$.

Следовательно, интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\,dx}{1+x^2}$ сходится в смысле главного значения.

## ИНТЕГРАЛЫ ОТ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ФУНКЦИЙ

**Определение.** *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a,\ b-\varepsilon]$ *при любом сколь угодно малом* $\varepsilon>0$, *но не ограничена в полуинтервале* $[a,\ b)$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называют несобственным интегралом второго рода.*

**Определение.** *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a-\varepsilon,\ b]$ *при любом сколь угодно малом* $\varepsilon>0$, *но не ограничена в полуинтервале* $(a,\ b]$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называют несобственным интегралом второго рода.*

**Определение.** *Если при* $\varepsilon \to 0+0$ *функция* $J(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ *имеет конечный предел, то несобственный интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *называют сходящимся и полагают по определению*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx.$$

*В противном случае несобственный интеграл называют расходящимся.*

***Пример. 2.18.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

*Решение*. Подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ непрерывна и, значит, интегрируема на любом отрезке $[0,\ 1-\varepsilon]$, но при $x \to 1-0$ функция $f(x) \to +\infty$. Имеем

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} (\arcsin(1-\varepsilon)) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ сходится.

**Теорема сравнения 4.** *Пусть функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы на отрезке* $[a,\ b-\varepsilon]$ *при любом сколь угодно малом* $\varepsilon > 0$, *неограниченны в интервале* $(b-\varepsilon,\ b)$ *и связаны условием* $0 \le f(x) \le g(x)$ *на* $[a,\ b)$.

*Тогда*

*1) если интеграл* $\int_a^b g(x)\,dx$ *сходится, то интеграл* $\int_a^b f(x)\,dx$ *сходится;*

*2) если интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *расходится, то интеграл* $\int_a^b g(x)dx$ *расходится.*

**Теорема сравнения 5.** *Пусть положительные на* $[a,\ b)$ *функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *неограниченны только в окрестности точки* $x=b$, *и пусть существует предел* $\lim\limits_{x\to b-0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=k\neq 0$.

*Тогда интегралы* $\int_a^b f(x)dx$ *и* $\int_a^b g(x)dx$ *сходятся или расходятся одновременно.*

**Определение.** *Интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *называют абсолютно сходящимся, если интеграл* $\int_a^b |f(x)|dx$ *сходится.*

**Теорема.** *Если сходится интеграл* $\int_a^b |f(x)|dx$, *то сходится и интеграл* $\int_a^b f(x)dx$.

**Теорема.** *Пусть функция* $f(x)$ *неограниченна только в интервале* $(b-\varepsilon,\ b)$, *где* $\varepsilon>0$ *сколь угодно мало. Если существует такое положительное число* $\alpha<1$, *что для всех x, достаточно близких к* $b$, $(x<b)$,

$$|f(x)|\leq\frac{M}{(b-x)^{\alpha}},$$

*где* $M>0$ *и не зависит от x, то интеграл* $\int_a^b f(x)dx$ *сходится абсолютно.*

**Определение.** *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a+\varepsilon,\ b]$ *при любом сколь угодно малом* $\varepsilon>0$, *но неограниченна в* *интервале* $(a,\ a+\varepsilon)$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называют несобственным интегралом второго рода.*

**Определение.** *Если при* $\varepsilon \to 0+0$ *функция* $J(\varepsilon)=\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ *имеет конечный предел, то несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называют сходящимся и полагают по определению*

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

*В противном случае несобственный интеграл называют расходящимся.*

***Пример 2.19.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}}$.

*Решение*. Подынтегральная функция неопределенна в окрестности точки $x=0$. Следовательно, по определению,

При $\alpha \neq 1$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\alpha}, & \text{если } \alpha<1,\\ \infty, & \text{если } \alpha>1,\end{cases}$$

при $\alpha=1$

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int\limits_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int\limits_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\ln|x|\,\|_{\varepsilon}^{1}\right) = \lim_{\varepsilon\to 0+0}(-\ln\varepsilon) = +\infty.$$

Следовательно, интеграл сходится при $\alpha<1$ и расходится при $\alpha \geq 1$.

**Определение.** *Если функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезках* $[a,\ c-\varepsilon]$ *и* $[c+\varepsilon,\ b]$, *где* $a<c<b$, *при любом сколь угодно малом* $\varepsilon>0$, *но неограниченна в окрестности точки* $x=c$, *то интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *называют несобственным интегралом второго рода.*

Поскольку $a<c<b$, то несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ можно представить суммой двух несобственных интегралов следующим образом

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\int\limits_c^b f(x)\,dx\overset{опр}{=}\lim_{\varepsilon_1\to 0+0}\int\limits_a^{c-\varepsilon_1} f(x)\,dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0+0}\int\limits_{c+\varepsilon_2}^b f(x)\,dx\ .$$

**Замечание.** *Интегралы второго рода приводятся к интегралам первого рода с помощью подстановок* $b-x=\dfrac{1}{t}$ *или* $x-a=\dfrac{1}{t}$. *Поэтому элементарную теорию несобственных интегралов второго рода можно вывести из теории несобственных интегралов первого рода.*

**Определение.** *Говорят, что несобственный интеграл* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, *где функция* $f(x)$ *интегрируема на отрезках* $[a,\ c-\varepsilon]$ *и* $[c+\varepsilon,\ b]$, $a<c<b$, *при любом* $\varepsilon>0$ *и неограниченна в окрестности точки с,* ***сходится в смысле главного значения по Коши****, если существует предел*

$$v.p.\int\limits_a^b f(x)\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0+0}\left(\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right).$$

*При этом величину* $v.p.\int\limits_a^b f(x)dx$ *называют* ***главным значением несобственного интеграла.***

***Пример 2.20.*** Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$, где $c \in (a,\ b)$.

*Решение.*

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \int\limits_a^c \frac{dx}{x-c} + \int\limits_c^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0+0} \int\limits_a^{c-\varepsilon_1} \frac{dx}{x-c} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+0} \int\limits_{c+\varepsilon_2}^b \frac{dx}{x-c} =$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0+0} (\ln\varepsilon_1 - \ln(a-c)) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0+0} (\ln(b-c) - \ln\varepsilon_2) = \ln\frac{b-c}{a-c} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0+0 \\ \varepsilon_2 \to 0+0}} \left( \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$$

.

Предел $\lim\limits_{\substack{\varepsilon_1 \to 0+0 \\ \varepsilon_2 \to 0+0}} \left( \ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)$ при произвольном стремлении $\varepsilon_1$ и $\varepsilon_2$ к нулю не существует. Следовательно, данный несобственный интеграл расходится.

Однако интеграл $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c}$ сходится в смысле главного значения, поскольку

$$v.p.\int\limits_a^b \frac{dx}{x-c} = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left( \int\limits_a^{c-\varepsilon} \frac{dx}{x-c} + \int\limits_{c+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-c} \right) = \ln\frac{b-c}{a-c}.$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется несобственным интегралом первого рода?
2. Какой несобственный интеграл первого рода называется сходящимся (расходящимся)?
3. Какой интеграл называется несобственным интегралом второго рода?
4. Какой несобственный интеграл второго рода называется сходящимся (расходящимся)?

5. Как исследовать на сходимость несобственные интегралы, используя теоремы сравнения (теоремы 1–5)?
6. Какие несобственные интегралы называются абсолютно сходящимся?
7. Какие несобственные интегралы называются условно сходящимся?
8. Как связаны сходимость и абсолютная сходимость интеграла?
9. Как формулируется признак сходимости Абеля – Дирихле?
10. Что называется главным значением несобственного?
11. Когда несобственный интеграл называется сходящимся в смысле главного значения?

## 2.10. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

### ПЛОЩАДЬ ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

• Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ $[f(x) \geq 0]$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси $Ox$, вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b f(x)\,dx.$$

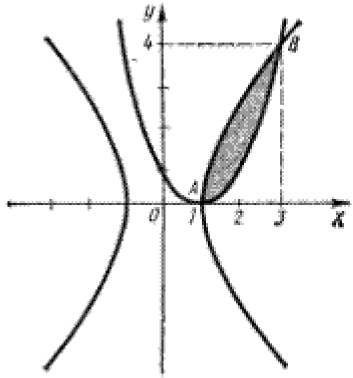
• Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (где $f_1(x) \leq f_2(x)$) и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx.$$

• Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой кривой, прямыми $x = a$, $x = b$, и отрезком $[a, b]$ оси $Ox$, выражается формулой

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,x'(t)\,dt,$$

где $t_1$ и $t_2$ определяются из уравнений $a = x(t_1)$, $b = x(t_2)$, и $y(t) \ge 0$ при $t_1 \le t \le t_2$.




- Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ и двумя полярными радиусами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($\alpha < \beta$), находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 \, d\varphi.$$

Рис. 2

***Пример 2.21.*** Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = (x-1)^2$ и гиперболой $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.

*Решение.* Найдем точки пересечения параболы и гиперболы. Для этого решим совместно уравнения этих кривых, т. е. решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = (x-1)^2 \\ x^2 - \dfrac{y^2}{2} = 1. \end{cases}$$

Подставив первое уравнение системы во второе, получим уравнение $x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 3 = 0$, или $(x-1)(x-3)(x^2+1) = 0$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ и, соответственно, $y_1 = 0$, $y_2 = 4$. Следовательно, заданные кривые пересекаются в точках $A(1;\,0)$ и $B(3;\,4)$ (рис. 2).

Поэтому площадь фигуры, получившейся в результате пересечения данных параболы и гиперболы, вычислим по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right) dx,$$

где $f_2(x) = \sqrt{2(x^2-1)}$ (из того, что $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$), $f_1(x) = (x-1)^2$ (из того, что $y = (x-1)^2$), следующим образом:

$$S=\int_1^3\left(\sqrt{2(x^2-1)}-(x-1)^2\right)dx=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x\sqrt{x^2-1}+\ln|x+\sqrt{x^2-1}|-\frac{1}{3}(x-1)^3\right)\Bigg|_1^3=$$
$$=\frac{10}{3}+\frac{\sqrt{2}}{2}\ln(3+\sqrt{8})\approx 4{,}58\ (\text{кв. ед.}).$$

***Пример 2.22.*** Вычислить площадь фигуры, ограниченной одной аркой циклоиды $x=2(t-\sin t)$, $y=2(1-\cos t)$ и осью $Ox$ (рис 3).

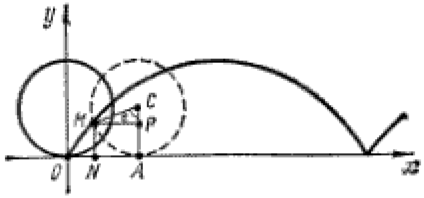


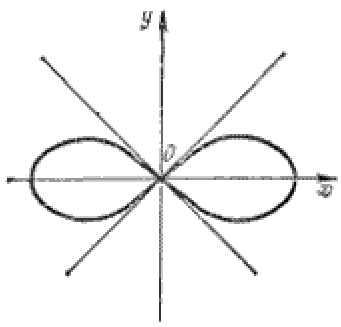

Рис. 3

*Решение.* Здесь $dx=2(1-\cos t)\,dt$, а $t$ изменяется от $t_1=0$ до $t_2=2\pi$. Следовательно,

$$S=\int_0^{2\pi}\left(2(1-\cos t)\right)^2dt=4\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\,dt=$$

$$=4\left(t-2\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{2\pi}=12\pi\ \ (\text{кв. ед.}).$$

***Пример 2.23.*** Найти площадь плоской фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho^2=2\cos 2\varphi$ (рис. 4).




*Решение.* Чтобы найти площадь данной фигуры, достаточно найти четвертую часть искомой площади, а затем полученный результат увеличить в четыре раза.

Рис. 4

Четвертой части искомой площади соответствует изменение $\varphi$ от 0 до $\frac{\pi}{4}$, поэтому

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}2\cos 2\varphi\, d\varphi=2\sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=2\ \ (\text{кв. ед.}).$$

## ОБЪЕМ ТЕЛА

- ***Объем тела вращения***

1. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси $Ox$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx.$$

2. Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси $Oy$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b yx\, dx.$$

3. Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $[0 \le f_1(x) \le f_2(x)]$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси $Ox$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2^2 - y_1^2) dx.$$

4. Если фигура, ограниченная кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $[0 \le f_1(x) \le f_2(x)]$ и прямыми $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси $Oy$, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int_a^b (y_2 - y_1) x\, dx.$$

- ***Объем тела по известным площадям поперечных сечений***

Если площадь сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси $Ox$, может быть выражена как функция переменной $x$, т. е. в виде $S = S(x)$ $(a \le x \le b)$, то объем части тела, заключенной между перпендикулярными оси $Ox$ плоскостями $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$V=\int_a^b S(x)\,dx.$$

***Пример 2.24.*** Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ фигуры, ограниченной кривой $y^2=(x-1)^3$ и прямой $x=2$ (рис. 5).

*Решение.*

$$V_x=\pi\int_1^2 y^2dx=\pi\int_1^2(x-1)^3dx=\frac{1}{4}(x-1)^4\Big|_1^2=\frac{\pi}{4}\ \text{(куб. ед.)}.$$

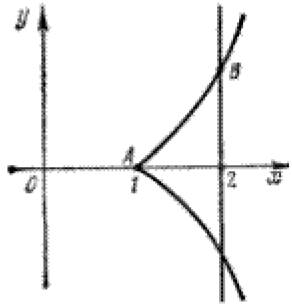



Рис. 5

***Пример 2.25.*** Найти объем тела, в основании которого лежит равнобедренный треугольник с высотой $h$ и основанием $a$. Поперечное сечение тела есть сегмент параболы с хордой, равной высоте сегмента (рис. 6).

*Решение.* Согласно рис. 6 $|AB|=a$, $|OC|=h$, $|MK|=|DE|$, $|OK|=x$. Чтобы выразить площадь поперечного сечения как функцию переменной, найдем уравнение параболы.

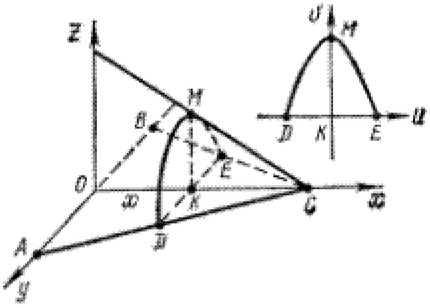



Рис. 6

Длину хорды $DE$ можно найти из подобия соответствующих треугольников $ACB$ и $DCE$, $\left(\frac{|DE|}{|AB|}=\frac{|KC|}{|OC|}\right)$. Следовательно. $\frac{|DE|}{a}=\frac{h-x}{h}$, т. е. $|MK|=|DE|=\frac{a(h-x)}{h}$. Пусть $|DE|=m$, тогда уравнение параболы в системе координат $uKv$ примет вид $v=m-\frac{4}{m}u^2$. Отсюда находим площадь поперечного сечения данного тела –

$$S=2\int_0^{m/2}\left(m-\frac{4}{m}u^2\right)du=\frac{2}{3}m^2.$$

Так как $m = |DE| = \dfrac{a(h-x)}{h}$, то площадь поперечного сечения, как функция переменной *x,* будет иметь вид $S = S(x) = \dfrac{2}{3} \cdot \dfrac{a^2 (h-x)^2}{h^2}$.

Таким образом,

$$V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 (h-x)^2}{h^2} dx = \frac{2}{9} a^2 h.$$

## ДЛИНА ДУГИ ПЛОСКОЙ КРИВОЙ

- Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$ – гладкая (т. е. производная $y' = f'(x)$ непрерывна), то длина соответствующей дуги этой кривой находится по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

- Если кривая $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$ и $y = y(t)$ ($x(t)$ и $y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции), то длина дуги кривой, соответствующая монотонному изменению параметра $t$ от $t_1$ до $t_2$, вычисляется по формуле

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

- Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $\alpha \le \varphi \le \beta$, то длина дуги равна

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi.$$

***Пример 2.26.*** Найти длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от $x = 0$ до $x = 1$ $(y \ge 0)$.

*Решение.* Из уравнения кривой имеем $y = x^{\frac{3}{2}}$, следовательно, $y' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$. Таким образом, длина дуги

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\,dx = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{8}{27}\left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

***Пример 2.27.*** Найти длину дуги кривой $x = \cos^5 t$, $y = \sin^5 t$ от $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

*Решение.* Здесь $x' = -5\cos^4 t \sin t$, $y' = 5\sin^4 t \cos t$, следовательно,

$$\sqrt{x'^2 + y'^2} = \sqrt{25\cos^8 t \sin^2 t + 25\sin^8 t \cos^2 t} = 5\sin t \cos t \sqrt{\sin^6 t + \cos^6 t} =$$

$$= \frac{5}{2}\sin 2t \sqrt{\frac{1}{8}(1 - \cos 2t)^3 + \frac{1}{8}(1 + \cos 2t)^3} = \frac{5}{2}\sin 2t \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\cos^2 2t} =$$

$$= \frac{5}{4}\sin 2t \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}.$$

Таким образом,

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt = \frac{5}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\,dt = -\frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\,d(\cos 2t) =$$

$$= -\frac{5}{8}\left(\frac{1}{2}\cos 2t \sqrt{1 + 3\cos^2 2t} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(\sqrt{3}\cos 2t + \sqrt{1 + 3\cos^2 2t}\right)\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{5}{8}\left(2 - \frac{\ln(2 - \sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right).$$

***Пример 2.28.*** Найти длину дуги кривой $\rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}$ от $\varphi_1 = 0$ до $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$.

*Решение.* Здесь $\rho' = \sin^2\frac{\varphi}{3}\cos\frac{\varphi}{3}$. Следовательно,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3} + \sin^4\frac{\varphi}{3}\cos^2\frac{\varphi}{3}}\,d\varphi = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{\varphi}{3}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(1 - \cos\frac{2\varphi}{3}\right)d\varphi = \frac{1}{2}\left(\varphi - \frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3}\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{8}(2\pi - 3\sqrt{3}).$$

## ПЛОЩАДЬ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ вращается вокруг оси $Ox$, то площадь поверхности вращения вычисляется по формуле

$$S_x = 2\pi\int_{a}^{b} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

- Если кривая $y = f(x)$ задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_1 \le t \le t_2)$,то

$$S_x = 2\pi\int_{a}^{b} y\sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt.$$

***Пример 2.29.*** Найти площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси $Ox$ дуги синусоиды $y = \sin 2x$ от $x = 0$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

*Решение.* Здесь $y' = 2\cos 2x$. Следовательно

$$S_x = 2\pi\int_{a}^{b} y\sqrt{1 + y'^2}\,dx = 2\pi\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2x\sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\,dx =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\cos 2x\sqrt{1 + 4\cos^2 2x} + \frac{1}{2}\ln\left(2\cos 2x + \sqrt{1 + 4\cos^2 2x}\right)\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5} + 2)\right).$$

## ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как вычислить площадь плоской фигуры в декартовых координатах, в полярных координатах, в случае параметрического задания?
2. Как вычислить длину дуги плоской кривой в декартовых координатах, в полярных координатах, в случае параметрического задания?
3. Как вычислить объем тела вращения?
4. Как вычислить площадь поверхности тела вращения?

# 2.11. ФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

## МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ МОМЕНТЫ

Пусть на плоскости $xOy$ задана система материальных точек $A_1(x_1;\ y_1)$, $A_2(x_2;\ y_2)$, …, $A_n(x_n;\ y_n)$ с массами $m_1,\ m_2,\ ...,\ m_n$.

**Определение.** ***Моментами инерции*** $I_x$ ***и*** $I_y$ ***системы осей*** *$Ox$ и $Oy$ называют произведение масс точек на квадраты их расстояний от соответствующей оси:*

$$I_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k^2;\ I_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k^2.$$

**Определение.** ***Статистическим моментом*** $M_x$ *системы точек $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ относительно оси $Ox$ называют сумму произведений масс этих точек на их ординаты:*

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k.$$

**Определение.** ***Статистическим моментом*** $M_y$ *системы точек $A_1,\ A_2,\ ...,\ A_n$ относительно оси $Oy$ называют сумму произведений масс этих точек на их абсциссы:*

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k.$$

- Моменты инерции дуги плоской кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ вычисляются по формулам

$$I_x = \int_a^b y^2 dL; \; I_y = \int_a^b x^2 dL,$$

где $dL = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ – дифференциал дуги кривой.

- Статистические моменты дуги плоской кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ вычисляются по формулам

$$M_x = \int_a^b y\,dL; \; M_y = \int_a^b x\,dL,$$

где $dL = \sqrt{1 + y'^2}\,dx$ – дифференциал дуги кривой.

- Моменты инерции криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *Ox* и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляются по формулам

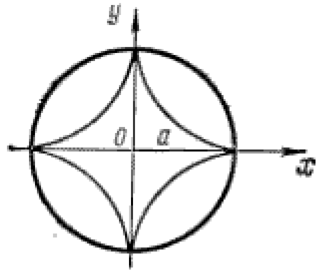
$$I_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3 dx; \; I_y = \int_a^b x^2 y\,dx.$$

- Статистические моменты криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью *Ox* и прямыми $x = a$ и $x = b$, вычисляются по формулам

$$M_x = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx; \; M_y = \int_a^b xy\,dx.$$

***Пример 2.30.*** Найти статистические моменты и моменты инерции дуги астроиды $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, лежащей в первой четверти (рис. 7).

*Решение.* В силу симметричности астроиды относительно координатных осей $M_x = M_y$, $I_x = I_y$. Поэтому достаточно вычислить моменты относительно оси *Ox*. Для первой четверти $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$. Следовательно,




$$dL = \sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt = 3a \sin t \cos t\, dt,$$

Рис. 7

$$M_y = M_x = \int_a^b y\, dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t\, 3a \cos t \sin t\, dt = \frac{3a^2}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{5} a^2;$$

$$I_y = I_x = \int_a^b y^2 dL = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \sin^6 t\, 3a \cos t \sin t\, dt = \frac{3}{8} a^3 \sin^8 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{8} a^3.$$

***Пример 2.31.*** Найти момент инерции площади полуэллипса $x = a\cos t,\ y = b \sin t$ относительно оси *Oy*.

*Решение.* Момент инерции полуэллипса относительно оси *Oy* равен

$$I_y = \int_a^b x^2 y\, dx = \int_\pi^0 a^2 \cos^2 t\, b \sin t (-a \sin t)\, dt = 2a^3 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^2 t\, dt =$$

$$= \frac{1}{2} a^3 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)\, dt = \frac{\pi a^3 b}{4}.$$

## ЦЕНТРЫ ТЯЖЕСТИ

- Координаты центра тяжести однородной дуги плоской кривой $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$ выражаются формулами

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x\, dL; \quad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b y\, dL,$$

где $dL = \sqrt{1 + y'^2}\, dx$, а $L$ – длина дуги.

• Координаты центра тяжести криволинейной трапеции вычисляются по формулам

$$\bar{x} = \frac{1}{S}\int_a^b x\,dS = \frac{1}{S}\int_a^b xy\,dx; \quad \bar{y} = \frac{1}{2S}\int_a^b y\,dS = \frac{1}{2S}\int_a^b y^2\,dx,$$

где $dS = y\,dx$, а $S$ – площадь фигуры.

***Пример 2.32.*** Найти координаты центра тяжести дуги цепной линии $y = a\,ch\frac{x}{a}, \ -a \le x \le a.$

*Решение.* Так как кривая симметрична относительно оси *Oy*, то ее центр тяжести находится на оси *Oy*, т. е. $\bar{x} = 0$. Найдем $\bar{y}$.

$$\bar{y} = \frac{1}{L}\int_{-a}^{a} y\,dL = \frac{1}{2a\,sh1}\int_{-a}^{a} a\,ch^2\frac{x}{a}dx = \frac{1}{sh1}\int_0^a ch^2\frac{x}{a}dx = \frac{1}{sh1}\int_0^a\left(1 + ch\frac{2x}{a}\right)dx =$$

$$= \frac{a}{sh1}\left(1 + \frac{1}{2}sh2\right) \approx 1{,}18a,$$

Поскольку

$$dL = \sqrt{1 + y'^2}dx = \sqrt{1 + sh^2\frac{x}{a}}\,dx = ch\frac{x}{a}dx,$$

$$L = \int_{-a}^{a} dL = \int_{-a}^{a} ch\frac{x}{a}dx = 2a\,sh1.$$

## РАБОТА СИЛЫ

Работа переменной силы $X = f(x)$, действующей в направлении оси *Ox* на отрезке $[x_0,\ x_1]$, вычисляется по формуле

$$A = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx.$$

***Пример 2.33.*** Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1Н она растягивается на 1 см?

*Решение*. По закону Гука, сила, растягивающая пружину на $x$ см, равна $F = kx$. Коэффициент пропорциональности $k$ определяется из условия: если $x = 0{,}01$ м, то $F = 1$ Н; следовательно, $k = \dfrac{1}{0{,}01} = 100$ и $F = 100x$. Тогда

$$A = \int_0^{0{,}04} 100x\,dx = 50x^2\Big|_0^{0{,}04} = 0{,}08\ (\text{Дж}).$$

### ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Что называется моментом инерции системы осей?
2. Что называется статистическим моментом относительно оси?
3. Как вычислить работу переменной силы вдоль оси?

## 2.12. БИОЛОГИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

### ЧИСЛЕННОСТЬ ПОПУЛЯЦИИ

Число особей в популяции (численность популяции) меняется со временем. Если условия существования популяции благоприятны, то рождаемость превышает смертность и общее число особей в популяции растет со временем. Назовем скоростью роста популяции прирост числа особей в единицу времени. Обозначим эту скорость $v = v(t)$. В «старых», установившихся популяциях, давно обитающих в данной местности, скорость роста $v(t)$ мала и медленно стремится к нулю. Но если популяция молода, ее взаимоотношения с другими местными популяциями еще не установились или существуют внешние причины, изменяющие эти взаимоотношения, например сознательное вмешательство человека, то $v(t)$ может значительно колебаться, уменьшаясь или увеличиваясь.

Если известна скорость роста популяции $v(t)$, то мы можем найти прирост численности популяции за промежуток времени от $t_0$ до *T*. В самом деле, из определения $v(t)$ следует, что эта функция является производной от численности популяции $N(t)$ в момент *t,* и, следовательно, численность популяции $N(t)$ является первообразной для $v(t)$. Поэтому

$$N(t) - N(t_0) = \int_{t_0}^{T} v(t)\,dt .$$

Известно, что в условиях неограниченных ресурсов питания скорость роста многих популяций экспоненциальна, т. е. $v(t) = a e^{kt}$. Популяция в этом случае как бы «не стареет». Такие условия можно создать, например, для микроорганизмов, пересаживая время от времени развивающуюся культуру в новые емкости с питательной средой. В этом случае получим:

$$N(t) = N(t_0) + a\int_{t_0}^{T} e^{kt}dt = N(t_0) + \frac{a}{k}e^{kt}\Big|_{t_0}^{T} = N(t_0) + \frac{a}{k}(e^{kT} - e^{kt_0}).$$

По формуле, приведенной выше, подсчитывают, в частности, численность культивируемых плесневых грибков, выделяющих пенициллин.

## БИОМАССА ПОПУЛЯЦИИ

Рассмотрим популяцию, в которой масса особи заметно меняется в течение жизни, и подсчитаем общую биомассу популяции.

Пусть $\tau$ означает возраст в тех или иных единицах времени, $N(\tau)$ – число особей популяции, возраст которых равен $\tau$, $P(\tau)$ – средняя масса особи возраста $\tau$, $M(\tau)$– биомасса всех особей в возрасте от 0 до $\tau$.

Заметив, что произведение $N(\tau)P(\tau)$ равно биомассе всех особей возраста $\tau$, т. е. $M(\tau) = N(\tau)P(\tau)$, рассмотрим разность

$$M(\tau + \Delta\tau) - M(\tau),$$

где $\Delta\tau > 0$.

Очевидно, что эта разность, равная биомассе всех особей в возрасте от $\tau$ до $\tau + \Delta\tau$, удовлетворяет неравенствам:

$$\breve{N}(\tau)\breve{P}(\tau)\Delta\tau \le M(\tau + \Delta\tau) - M(\tau) \le \hat{N}(\tau)\hat{P}(\tau)\Delta\tau,$$

где $\breve{N}(\tau)\breve{P}(\tau)$ – наименьшее, а $\hat{N}(\tau)\hat{P}(\tau)$ – наибольшее значения функции $N(\tau)P(\tau)$ на отрезке $[\tau,\ \tau + \Delta\tau]$.

Учитывая, что $\Delta\tau > 0$, из неравенств

$$\breve{N}(\tau)\breve{P}(\tau)\,\Delta\tau \le M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau) \le \widehat{N}(\tau)\widehat{P}(\tau)\,\Delta\tau$$

получим

$$\breve{N}(\tau)\breve{P}(\tau) \le \frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau} \le \widehat{N}(\tau)\widehat{P}(\tau).$$

Поскольку

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\breve{N}(\tau)\breve{P}(\tau) = \lim_{\Delta\tau\to 0}\widehat{N}(\tau)\widehat{P}(\tau) = N(\tau)P(\tau)$$

(это следует из непрерывности функции $N(\tau)P(\tau)$ ) будем иметь

$$\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{M(\tau+\Delta\tau)-M(\tau)}{\Delta\tau} = N(\tau)P(\tau)$$

или $\dfrac{d\,M(\tau)}{d\tau} = N(\tau)P(\tau).$

Таким образом, биомасса $M(\tau)$ является первообразной для $N(\tau)P(\tau)$. Отсюда следует, что

$$M(T)-M(0) = \int_0^T N(\tau)P(\tau)\,d\tau,$$

где $T$ – максимальный возраст особи в данной популяции.

Так как $M(0)=0\,M$ (0), то окончательно получаем:

$$M(T) = \int_0^T N(\tau)P(\tau)\,d\tau.$$

## СРЕДНЯЯ ДЛИНА ПРОЛЕТА

В некоторых исследованиях необходимо знать среднюю длину пробега, или среднюю длину пути при прохождении животным некоторого фиксированного участка. Приведем соответствующий расчет для птиц.

Пусть участком будет круг радиуса $R$. Будем считать, что R не слишком велико, поэтому большинство птиц изучаемого вида пересекает этот круг по прямой (рис. 8).

Птица может под любым углом в любой точке пересечь окружность. В зависимости от этого длина ее пролета над кругом может быть равной любой величине от 0 до $2R$. Нас интересует средняя длина пролета. Обозначим ее через $L$.

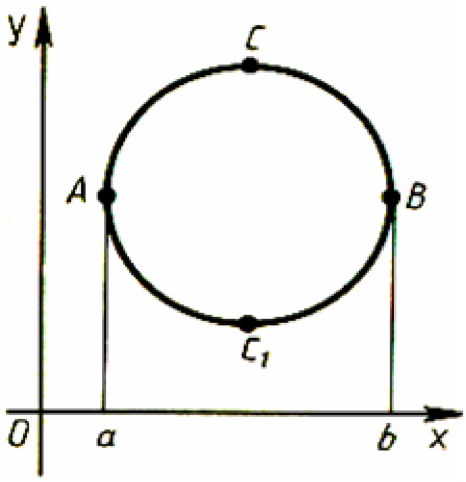


Рис. 8

Так как круг симметричен относительно любого своего диаметра, нам достаточно ограничиться лишь теми птицами, которые летят в каком-нибудь одном направлении, например, параллельном оси $Oy$. Тогда средняя длина пролета – это среднее расстояние между дугами $ACB$ и $AC_1B$. Иными словами, это среднее значение функции $f_1(x) - f_2(x)$, где $y = f_1(x)$ – уравнение верхней дуги, а $y = f_2(x)$ – уравнение нижней дуги, т. е.

$$L = \frac{\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx}{b-a} = \frac{\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx}{b-a}.$$

Так как

$\int_a^b f_1(x)\,dx$ – площадь криволинейной трапеции $aACBb$,

$\int_a^b f_2(x)\,dx$ – площадь криволинейной трапеции $aAC_1Bb$,

то их разность равна площади круга, т. е. $\int_a^b f_1(x)\,dx - \int_a^b f_2(x)\,dx = 2\pi R^2$. Поскольку получим, что

$$L = \frac{\pi R^2}{2R} = \frac{\pi R}{2}.$$

**Замечание.** Приведенные примеры далеко не исчерпывают возможных приложений определенного интеграла в биологии.

## 2.13. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

**Экономический смысл определенного интеграла:** объем произведенной продукции при известной функции производительности труда.

### ОБЪЕМ ПРОИЗВЕДЕННОЙ ПРОДУКЦИИ

Если в функции Кобба – Дугласа считать, что затраты труда линейно зависят от времени, а затраты капитала неизменны, то она примет вид $g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем произведенной продукции за $T$ лет вычисляется по формуле $Q = \int\limits_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt$.

***Пример 2.34.*** Найти объем продукции, произведенной за 4 года, если функция Кобба – Дугласа имеет вид $g(t) = (1+t)e^{3t}$.

*Решение*. Здесь $Q = \int\limits_0^4 (1+t)e^{3t}dt = \left\{ \begin{matrix} \textit{интегрируем по частям}: & \\ u = 1+t; & du = dt; \\ dv = e^{3t}dt; & v = \frac{1}{3}e^{3t}. \end{matrix} \right\} =$

$$= \frac{1+t}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \frac{1}{3}\int\limits_0^4 e^{3t}dt = \frac{1+t}{3}e^{3t}\Big|_0^4 - \frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4 = \frac{14}{9}e^{12} - \frac{2}{9} \approx 2{,}53 \cdot 10^5 \text{ усл.ед.}$$

### СТЕПЕНЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДОХОДОВ

**Определение.** Кривой Лоренца называется кривая, показывающая зависимость процента доходов от процента имеющегося населения.

Исследуя кривую Лоренца, можно оценить степень неравенства распределения доходов населения. При равномерном распределении кривая Лоренца (рис. 9) вырождается в прямую (OA), уравнение которой $y = x$. Поэтому площадь $S$, отнесенная к площади треугольника OAC, ограниченного сверху вырожденной кривой Лоренца, т. е. линией $y = x$, характеризует степень неравенства в распределении доходов.

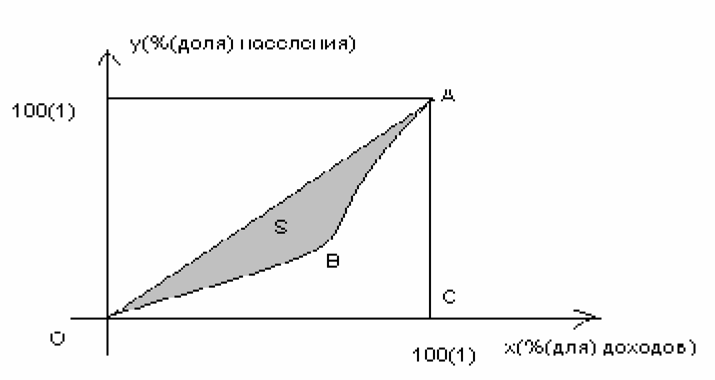



Рис. 9

**Определение.** Отношение площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой Лоренца, к площади треугольника, ограниченного сверху вырожденной кривой Лоренца, называется коэффициентом Джини.

***Пример 2.35.*** По данным исследования распределения доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, где $x$ – доля населения, $y$ – доля доходов населения. Найти коэффициент Джини $k$.

*Решение.* $k = \dfrac{S}{S_{\Delta OAC}} = \dfrac{S_{\Delta OAC} - S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \dfrac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}}$.

$$S_{\Delta OAC} = \int_0^1 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1 = \frac{1}{2};$$

$$S_{OBAC} = \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2})\,dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx =$$

$$= \begin{Bmatrix} \text{замена переменной}: \\ x = \sin t \Rightarrow t = \arcsin x,\ 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}. \end{Bmatrix} = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t)\,dt =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left.\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $k = 1 - \dfrac{1 - \frac{\pi}{4}}{\frac{1}{2}} = 1 - (2 - \dfrac{\pi}{2}) = \dfrac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57$.

## ДИСКОНТИРОВАНИЕ

**Определение.** Дисконтированием называется определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через время $T$ (лет) при годовом проценте (процентной ставке) $p$.

Задачи дисконтирования встречаются при определении экономической эффективности капитальных вложений.

Пусть $K_t$ – конечная сумма, полученная за $t$ лет, $K$ – дисконтированная (начальная) сумма (ее в анализе называют современной суммой).

Если проценты простые, то $K_t = K(1 + it)$, где $i = \dfrac{p}{100}$ – удельная процентная ставка. Тогда $K = \dfrac{K_t}{1 + it}$.

Если проценты сложные, то $K_t = K(1 + it)^t$, следовательно, $K = \dfrac{K_t}{(1 + it)^t}$.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$, и при удельной норме процента, равной $i$, процент начисляется непрерывно. Тогда $K = \int_0^T f(t)e^{-it}dt$ за время $T$.

***Пример 2.36***. Определить дисконтированный доход за три года при процентной ставке 8 %, если первоначальные (базовые) капиталовложения составили 10 млн д. е. и планируется ежегодно увеличивать капиталовложения на 1 млн д. е.

*Решение*. Здесь капиталовложения задаются функцией $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$. Тогда

$$K = \int_0^3 (10+t)e^{-0,08t}\,dt = \{\text{интегрируем по частям}\} \approx 30,5\,\text{млрд д.е.}$$

Это означает, что для одинаковой наращиваемой суммы через 3 года ежегодные капиталовложения с 10 до 13 млн д. е. равносильны одинаковому первоначальному вложению в 30,5 млн д. е. при той же процентной ставке.

## ВРЕМЯ ЗАТРАТ НА ПРОИЗВОДСТВО

Пусть известна функция $t = t(x)$ – изменение затрат времени $t$ на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где $x$ – порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время $t_{cp}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от $x_1$ до $x_2$ изделий, вычисляется по формуле (теорема о среднем): $t_{cp} = \dfrac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)\,dx$.

Функция затрат времени часто имеет вид $t = ax^{-b}$, где $a$ – затраты времени на первое изделие, $b$ – показатель производственного процесса.

***Пример 2.37.*** Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая $a = 600$ (мин), $b = 0,5$.

*Решение.*

Здесь $t_{cp} = \dfrac{1}{121-100}\int_{100}^{121} 600x^{-\frac{1}{2}}dx = \dfrac{600}{21}\cdot 2\sqrt{x}\Big|_{100}^{121} = \dfrac{400}{7} \approx 57,2$ (мин).

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти неопределенные интегралы

1. $\int\left(2x^3-3\sqrt{x^5}+\frac{4}{x}\right)dx$,

2. $\int\sqrt[4]{1+3x}dx$,

3. $\int\frac{dx}{5+3x}$,

4. $\int\sin(5-3x)dx$,

5. $\int\frac{dx}{3x^2+2}$,

6. $\int\frac{5xdx}{\sqrt{3-5x^2}}$,

7. $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-1}}$,

8. $\int e^{3-5x}dx$,

9. $\int\frac{\ln^4(3x+1)}{3x+1}dx$,

10. $\int\sqrt{\cos^3 2x}\sin 2xdx$,

11. $\int\frac{dx}{\sin^2 3x ctg^3 3x}$,

12. $\int\frac{\sqrt[3]{arctg 2x}dx}{(1+4x^2)}$,

13. $\int e^{3\cos x+2}\sin xdx$,

14. $\int\frac{5x-2}{x^2+9}dx$,

15. $\int\frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx$,

16. $\int\frac{e^{3x}}{e^{3x}-5}dx$,

17. $\int\frac{x^4-2x^2-1}{x^2+1}dx$,

18. $\int\left(1+2\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$,

19. $\int tg^4\frac{2x}{3}dx$,

20. $\int\cos 2x\cdot\sin 3xdx$,

21. $\int\frac{dx}{2x^2-8x+30}$,

22. $\int\frac{dx}{\sqrt{2x^2-8x+1}}$,

23. $\int\frac{2x-1}{2x^2+8x-6}dx$,

24. $\int\frac{x+5}{\sqrt{3-6x-x^2}}dx$.

Вычислить

25. $\int\limits_{0}^{x/3} x^2 \cos x\,dx$, 26. $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{x^2dx}{1+x^6}$, 27. $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^3 x}$,

28. $\int\limits_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$, 29. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2-4)^3}}$, 30. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+2x+5}$.

31. Вычислить площадь, ограниченную кардиоидой
$x = a$ cos t $(1 + \cos t)$, $y = a \sin t\,(1 + \cos t)$.

32. Найти площадь петли $x = t\,(6 - t) / 3$, $y = t^2 (6 - t) / 8$.

33. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси $OX$ площади, ограниченной осями координат и параболой $x^{1/2} + \mathrm{y}^{1/2} = a^{1/2}$.

34. Фигура, ограниченная дугой синусоиды $y = \sin x$, осью ординат и прямой $y = 1$, вращается вокруг оси $OY$. Определить объем полученного тела вращения.

35. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением кривой $\rho = 2a\sin\varphi$ вокруг полярной оси.

36. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением лемнискаты $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ вокруг полярной оси.

36. Вычислить длину дуги кривой $y^2 = x^3$, отсеченной прямой $x = 4/3$.

37. Вычислить длину дуги кривой $x = y^2/4 - (\ln y)/2$, заключенной между точками с ординатами $y = 1$, $y = 2$.

38. Производительность труда рабочего времени в течение дня задается функцией $z(t) = -0{,}000625t^2 + 0{,}05t + 0{,}5 \left(\frac{\text{д.е.}}{\text{ч}}\right)$, где $e$ – время в часах от начала работы, $0 \le t \le 8$. Найти функцию $u = u(t)$ – объем продукции (в стоимостном выражении) и его величину за рабочий день.

39. Стоимость перевозки одной тонны груза на один километр (тариф перевозки) есть функция $f(x) = \frac{10}{x+2} \left(\frac{\text{д.е.}}{\text{км}}\right)$. Определить затраты на перевозку одной тонны груза на расстояние в 20 км.

# КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Неопределенный интеграл, его свойства.
2. Замена переменной в неопределенном интеграле.
3. Интегрирование по частям в неопределенном интеграле.
4. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла: задача о пройденном пути.
5. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла: задача о площади криволинейной трапеции.
6. Свойства определенного интеграла.
7. Формула Ньютона – Лейбница.
8. Теоремы о среднем.
9. Суммы Дарбу и их свойства.
10. Замена переменной в определенном интеграле.
11. Интегрирование по частям в определенном интеграле.
12. Несобственные интегралы первого рода.
13. Несобственные интегралы второго рода.
14. Признаки сходимости несобственных интегралов.
15. Приложения определенного интеграла.

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данное пособие в полном объеме освещает материал по интегральному исчислению функции одной переменной в смысле интеграла Римана. Пособие не содержит материал, связанный с теорией меры (интеграл Лебега, интеграл Стилтьеса и т. п.), поскольку главная цель пособия – оказание помощи в приобретении навыков интегрирования и их практического применения.

Книга может быть использована студентами, обучающимися по любым направлениям, для подготовки к экзамену по рассмотренным темам.

# РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Баврин И. И. Краткий курс высшей математики для химико-биологических и медицинских специальностей / И. И. Баврин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 328 с.
2. Виноградова И. А. Задачи и упражнения по математическому анализу / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2000. – 725 с.
3. Вся высшая математика : учебник. Т. 2. / М. Л. Краснов [и др.]. – М. : Эдиториалл УРСС, 2007. – 184 с.
4. Гильдерман Ю. И. Лекции по высшей математике / Ю. И. Гильдерман. – Новосибирск : Наука, 1974. – 104 с.
5. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. пособие для втузов / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высш. шк., 1999. – 304 с.
6. Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. – М. : Наука, 2009. – 558 с.
7. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б. П. Демидовича. – М. : Наука, 2007. – 495 с.
8. Зорич В. А. Математический анализ. Ч. 1 / В. А. Зорич. – М. : МЦНМО, 2007. – 664 с.
9. Ильин В. А. Математический анализ. В 2 ч. / В. А. Ильин, В. А. Садовничий, Б. Х. Сендов. – М. : Изд-во Моск. ун-та, 2006. – 660 с.
10. Ильин В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : Наука, 2001. – 646 с.
11. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа / Л. В. Кудрявцев. – М. : Высш. шк., 2006. – 694 с.
12. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Наука, 2006. – 336 с.
13. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике / А. Д. Мышкис. – М. : Наука, 1969. – 640 с.
14. Никольский С. М. Курс математического анализа : в 2 т. / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1990. – 528 с.