УДК 517.983.51

Фундаментальные оператор-функции вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах

М.В.Фалалеев, Е.Ю.Гражданцева

Аннотация

В данной статье, продолжающей исследования начатые первым из авторов, строятся фундаментальные оператор-функции некоторых классов вырожденных дифференциальных (как обыкновенных, так и в частных производных) и дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором при старшей (по времени) производной в банаховых пространствах. Для достижения поставленной цели используется техника жордановых наборов нетеровых операторов и элементы теории обобщенных функций в банаховых пространствах.

Объектом исследования в данной работе являются дифференциальные и дифференциально-разностные уравнения с нетеровым оператором в главной части в банаховых пространствах. Редукцию к уравнениям такого типа допускают многочисленные начальные и краевые задачи математической физики моделирующие реальные динамические процессы: фильтрации, термоконвекции, деформации механических систем, электротехники, волновые процессы в электромагнитных анизотропных средах (волны в плазме, волны в ферромагнетиках во внешнем магнитном поле), волновые процессы в проводящих средах без дисперсии, колебания стратифицированной жидкости (модели Корпусова-Плетнера-Свешникова [10], Баренблатт-Желтова-Кочиной [11], Осколкова [12], Хоффа, Dolesal-а [13], Буссинеска [14], [15] и многие другие).

Как хорошо известно [8] такие задачи разрешимы в классе непрерывных функций не при всех начальных данных и правых частях, поэтому естественно возникает проблема построения обобщенных решений, которую в полном объеме удается разрешить с помощью конструкции фундаментальных оператор-функций соответствующих дифференциальных операторов исходных уравнений. В работах [6] и [16] во фредгольмовском случае были построены фундаментальные оператор-функции для дифференциальных операторов 1-го, 2-го порядков, некоторых классов дифференциальных операторов N-го порядка (как обыкновенных, так и в частных производных), интегральных и интегро-дифференциальных 1-го порядка. В настоящей работе полученные в [6] и [16] результаты распространяются на нетеровский случай для дифференциальных операторов 1-го порядка, неполные дифференциальные операторы 2-го и N-го порядков, а также дифференциально-разностные операторы 1-го и N-го порядков.

1 Жордановы наборы нетеровых операторов.

В этом пункте приведены основные сведения о жордановых наборах нетеровых операторов из работы [2] необходимые в дальнейшем для изложения наших результатов.

Пусть A, B - замкнутые линейные операторы действующие из банахова пространства E_1 в банахово пространство E_2, $\overline{D(A)} = \overline{D(B)} = E_1$, $D(B) \subset D(A)$, $\dim N(B) = n$, $\dim N(B^*) = m$, $\varphi_i\, i = 1, \ldots, n$ - базис в $N(B)$, ψ_j - базис в $N(B^*)$, $\gamma_i \in E_1^*$, $i = 1, \ldots, n$, $z_j \in E_2, j = 1, \ldots, m$ - соответствующие биортогональные системы элементов, т.е. $< \varphi_i, \gamma_k >= \delta_{ik}$, $i, k = 1, \ldots, n$ и $< z_k, \psi_j >= \delta_{kj}$, $k, j = 1, \ldots, m$.

Введем проекторы $\mathcal{P} = \sum_{i=1}^{n} < \cdot, \gamma_i > \varphi_i$ и $\mathcal{Q} = \sum_{j=1}^{m} < \cdot, \psi_j > z_j$. Фиксированным базисам $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_j\}$, $\{\gamma_i\}$, $\{z_j\}$ соответствует единственный [1] псевдообратный оператор однозначно определяемый следующим набором своих свойств:

$$D(B^+) = R(B) \oplus \{z_1, \ldots, z_m\}, \quad R(B^+) = N(\mathcal{P}) \cap D(B),$$

$$BB^+ = I - \mathcal{Q} \text{ на } D(B^+), \quad B^+B = I - \mathcal{P} \text{ на } D(B),$$

причем $N(B^+) = \{z_1, \ldots, z_m\}$, $BB^+B = B$, $B^+BB^+ = B^+$.

Введем сопряженные пректоры $\mathcal{P}^* = \sum_{i=1}^{n} < \varphi_i, \cdot > \gamma_i$ и $\mathcal{Q}^* = \sum_{j=1}^{m} < z_j, \cdot > \psi_j$ и соответствующий им псевдообратный оператор B^{*+}

$$D(B^{*+}) = R(B^*) \oplus \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}, \quad R(B^{*+}) = N(\mathcal{Q}^*) \cap D(B^*),$$

$$B^{*+}B^* = I - \mathcal{Q}^* \text{ на } D(B^*),\ B^*B^{*+} = I - \mathcal{P}^* \text{ на } D(B^{*+}),$$

причем $N(B^{*+}) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$, $B^*B^{*+}B^* = B^*$, $B^{*+}B^*B^{*+} = B^{*+}$ и $B^{*+} = B^{+*}$.

Далее будем предполагать, что оператор B нормально разрешим, т.е. $\overline{R(B)} = R(B)$, тогда $D(B^*) \equiv E_2$, $D(B^{*+}) \equiv E_1^*$ и значит операторы B^+ и B^{*+} ограничены.

Введем системы элементов

$$\varphi_i^{(j)} = (B^*A)^{j-1}\varphi_i^{(1)},\ i = 1, \ldots, n,\ j \geq 2,\ \varphi_i^{(1)} = \varphi_i$$

и функционалов

$$\psi_i^{(j)} = (B^{*+}A^*)^{j-1}\psi_i^{(1)},\ i = 1, \ldots, m,\ j \geq 2,\ \psi_i^{(1)} = \psi_i.$$

В силу свойств операторов B^* и B^{*+} $\varphi_i^{(j)} \in N(\mathcal{P})$ и $\psi_i^{(j)} \in N(\mathcal{Q})$, $j \geq 2$, т.е.

$$< \varphi_i^{(j)}, \gamma_k >= 0,\ i, k = 1, \ldots, n,\ j \geq 2$$

и

$$< z_k, \psi_i^{(j)} >= 0,\ i, k = 1, \ldots, m,\ j \geq 2.$$

Будем предполагать выполненным следующее условие

А) элементы $\varphi_i^{(j)}$ удовлетворяют системе уравнений и неравенств вида

$$B\varphi_i^{(j)} = A\varphi_i^{(j-1)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 2, \ldots, p_i,$$

$$B\varphi_i^{(p_i+1)} \neq A\varphi_i^{(p_i)},\ i = 1, \ldots, n,$$

причем

$$rang\| < A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} > \|_{i=1,\ldots,n,\ k=1,\ldots,m} = \min(n, m) = l.$$

Условие А) означает, что система элементов $\{\varphi_i^{(j)},\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, p_i\}$ образует полный $A-$жорданов набор [4].

Если выполнено условие A), то, как показано в работе [3], системы $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_j\}$, $\{\gamma_i\}$,
$\{z_j\}$ можно выбрать таким образом, чтобы выполнялись равенства

$$< A\varphi_i^{(j)}, \psi_k >= \begin{cases} 0, & j = 1, \dots, p_i - 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad\quad k = 1, \dots, m, \\ \delta_{ik}, & j = p_i, \quad\quad\quad\quad\quad\;\; i, k = 1, \dots, l, \end{cases}$$

$$< \varphi_i, A^*\psi_k^{(j)} >= \begin{cases} 0, & j = 1, \dots, p_k - 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad\quad k = 1, \dots, m, \\ \delta_{ik}, & j = p_k, \quad\quad\quad\quad\quad\;\; i, k = 1, \dots, l, \end{cases}$$

Поэтому при выполнении условия A), не ограничивая общности, можно считать, что $z_i = A\varphi_i^{(p_i)}$, $\gamma_i = A^*\psi_k^{(p_k)}$, $i, k = 1, \dots, l$. Из условия A) так же следует, что система элементов $\{\psi_k^{(j)}$, $k = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p_k\}$ образует полный A^*-жорданов набор. Прямоугольные матрицы $\| < A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} > \|$ и $\| < \varphi_i^{(1)}, A^*\psi_k^{(p_k)} > \|$, $i = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, m$, при выполнении условия A), имеют одинаковые ранги l, а значит обе они эквивалентны прямоугольной матрице единичным главным ранговым минором $l-$порядка и нулями на остальных позициях. Приведем соответствующие преобразования базисов $\{\varphi_i\}$ и $\{\psi_j\}$. При $m < n$ матрица $\| < \varphi_i^{(1)}, A^*\psi_k^{(p_k)} > \|$ преобразованием

$$\tilde{\varphi}_i = \begin{cases} \varphi_i, \quad i = 1, \dots, m, \\ \varphi_i - \sum_{k=1}^m < \varphi_i, A^*\psi_k^{(p_k)} > \varphi_k, \quad i = m+1, \dots, n \end{cases}$$

приводятся к требуемому виду, а при $m > n$ для матрицы $\| < A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k^{(1)} > \|$ искомым преобразованием очевидно является следующее

$$\tilde{\psi}_k = \begin{cases} \psi_k, \quad k = 1, \dots, n, \\ \psi_k - \sum_{i=1}^n < A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k > \psi_i, \quad k = n+1, \dots, m. \end{cases}$$

В следующих пунктах работы при обращении к жордановым наборам будем считать, что такая перестройка базисов уже осуществлена и знак волны будем опускать.

2 Свертки распределений и обобщенных оператор-функций в банаховых пространствах

Пусть E - банахово пространство, E^* - сопряженное банахово пространство. Отнесем к множеству *основных функций* $K(R^n; E^*)$ все финитные в R^n функции класса C^∞ со значениями в E^* и будем обозначать эти функции через $s(\bar{x})$, $\bar{x} \in R^n$. *Носителем* $supps(\bar{x})$ основной функции $s(\bar{x})$ назовем замыкание в R^n множества тех точек $\bar{x}$, для которых $s(\bar{x}) \neq 0$. Сходимость в $K(R^n; E^*)$ определяется следующим образом

Определение. Последовательность функций $s_k(\bar{x}) \in K(R^n; E^*)$ *сходится* к функции $s(\bar{x}) \in K(R^n; E^*)$, если

а) существует $R > 0$ такое, что $supps_k(\bar{x}) \subset U_R \forall k \in N$, здесь U_R шар в R^n с центром в нуле и радиусом R;

б) $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ $\|D^\alpha s_k(\bar{x}) - D^\alpha s(\bar{x})\| \Rightarrow 0$ равномерно по $\bar{x}$ при $k \to \infty$, здесь D^α мультииндекс.

Обобщенной функцией (распределением) назовем всякий линейный непрерывный функционал на основном пространстве $K(R^n; E^*)$. Всякая локально интегрируемая по Бохнеру функция $u(\bar{x})$ со значениями в E порождает по правилу

$$\Big(u(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{R^n} < u(\bar{x}), s(\bar{x}) > d\bar{x}, \quad \forall\, s(\bar{x}) \in K(R^n; E^*)$$

регулярную обобщенную функцию. Все остальные обобщенные функции называются *сингулярными.* Множество обобщенных функций будем обозначать $K'(R^n; E)$.

Если $E = E^* = R^1$, то пространства $K(R^n; R^1)$ и $K'(R^n; R^1)$ следуя [5] будем обозначать через $D(R^n)$ и $D'(R^n)$ соответственно.

Из всего множества обобщенных функций $K'(R^n; E)$ выделим некоторые специальные классы. Через $K'(R^n_+; E)$ будем обозначать множество обобщенных функций, носители которых находятся в первом "октанте"пространства R^n. Таковыми будут, например, функции вида $u(\bar{x})g(\bar{x})$, где $u(\bar{x}) \in C^\infty(R^n; E)$, $g(\bar{x}) \in D'(R^n_+)$ или $u(\bar{x}) \in C^\infty(R^n_+; E)$, $g(\bar{x}) \in D'(R^n)$ действующие по правилу

$$\Big(u(\bar{x})g(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(g(\bar{x}), < u(\bar{x}), s(\bar{x}) >\Big) \quad \forall\, s(\bar{x}) \in K(R^n; E^*).$$

При $n = 1$ вместо $D'(R^1_+)$ принято [5] использовать обозначение D'_+.

Пусть E_1, E_2 - банаховы пространства, $\mathcal{K}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ сильно непрерывная оператор-функция класса C^∞, причем $\mathcal{K}^*(\bar{x}) \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ существует при почти всех $\bar{x} \in R^n$, $f(\bar{x}) \in D'(R^n)$, тогда формальный символ $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ назовем *обобщенной оператор-функцией. Сверткой* [6] обобщенной оператор-функции $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x})$ и обобщенной функции $v(\bar{x}) \in K'(R^n; E_1)$ назовем обобщенную функцию $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}) \in K'(R^n; E_2)$ (если она существует), действующую по формуле

$$\Big(\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x}), s(\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big(f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y}))\Big) \quad \forall s(\bar{x}) \in K(R^n; E_2^*).$$

Поскольку функция $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$ не финитна в R^{2n}, то сформулированное определение будет корректно лишь в том случае, когда носитель "прямого произведения" обобщенных функций $f(\bar{x})$ и $v(\bar{y})$, т.е. множество $supp f(\bar{x}) \otimes supp v(\bar{y})$, пересекается с носителем $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$ по ограниченному в R^{2n} множеству. В этом случае $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$ можно заменить на финитную функцию $\psi(\bar{x}, \bar{y})$, совпадающую с $\mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$ на пересечении $[supp f(\bar{x}) \otimes supp v(\bar{y})] \cap supp \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$, тогда значение $(f(\bar{x}), (v(\bar{y}), \psi(\bar{x}, \bar{y})))$ уже будет корректно определено и оно не зависит от выбора значений $\psi(\bar{x}, \bar{y})$ вне пересечения $[supp f(\bar{x}) \otimes supp v(\bar{y})] \cap supp \mathcal{K}^*(\bar{x})s(\bar{x} + \bar{y})$. Приведем некоторые достаточные условия, при которых свертка заведомо существует.

Пример1. Если $n = 1$, $f(t) \in D'_+$, $v(t) \in K'(R^1_+; E_1)$, то свертка $\mathcal{K}(t)f(t) * v(t)$ существует, причем если $A \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ и существует $A^* \in \mathcal{L}(E_3^*, E_2^*)$, то справедливо свойство ассоциативности

$$A\delta^{(k)}(t) * (\mathcal{K}(t)f(t) * v(t)) = (A\delta^{(k)}(t) * \mathcal{K}(t)f(t)) * v(t),$$

где $A\delta^{(k)}(t) * \mathcal{K}(t)f(t) \stackrel{\text{def}}{=} (A\mathcal{K}(t)f(t))^{(k)}$. Эти же утверждения справедливы и в случае $n > 1$, если $f(\bar{x}) \in D'(R^n_+)$ и $v(\bar{x}) \in K'(R^n_+; E_1)$. Для замкнутого оператора A приведенное здесь равенство будем считать выполненным по определению.

Пример 2. Если одна из функций $f(\bar{x})$ или $v(\bar{x})$ финитна, то свертка $\mathcal{K}(\bar{x})f(\bar{x}) * v(\bar{x})$ существует.

Доказываются утверждения из этих двух примеров такими же рассуждениями, что и соответствующие теоремы в [5] см. стр. 130-141.

Пример 3. Если $v(t,\bar{x}) \in K'(R^1_+ \otimes R^n; E_1)$ (т.е. $suppv(t,\bar{x}) \subset R^1_+ \otimes R^n \equiv \{t \geq 0\}$ - полупространство в R^{n+1}), $\mathcal{K}(t,\bar{x})f(t,\bar{x}) = k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1)$, $g(t) \in D'_+$, $\bar{y}_1$ - фиксированный вектор (т.е. $supp\mathcal{K}(t,\bar{x})f(t,\bar{x}) \equiv \{t \geq 0,\, \bar{x}=\bar{y}_1\}$ - луч в R^{n+1}), то

$$M \equiv supp(k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1)) \otimes suppv(\tau,\bar{z}) \equiv$$

$$\equiv \{(t,\,\tau,\,\bar{x},\,\bar{z})|t \geq 0,\, \tau \geq 0,\, \bar{x}=\bar{y}_1,\, \bar{z} \in R^n)\} \subset R^{2n+2}.$$

Пусть $s(t,\bar{x}) \in K(R^{n+1};E_2^*)$, тогда в силу финитности $s(t,\bar{x})$ существует $R>0$ такое, что $supps(t,\bar{x}) \subset U_R \equiv \{(t,\bar{x})|t^2+(\bar{x},\bar{x}) \leq R^2,\}$ поэтому носителем функции $s(t+\tau,\bar{x}+\bar{z})$ является "полоса"в R^{2n+2} описываемая неравенством $(t+\tau)^2+(\bar{x}+\bar{z},\bar{x}+\bar{z}) \leq R^2$. Такая "полоса"пересекается с M по множеству $\{(t+\tau)^2+(\bar{y}_1+\bar{z},\bar{y}_1+\bar{z}) \leq R^2,\, t\geq 0,\, \tau \geq 0,\, \bar{y}_1 - \text{фиксирован}\}$ очевидно ограниченному в R^{2n+2}, а значит свертка $k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1) * v(t,\bar{x})$ при сделанных предположениях существует. Если $A \in \mathcal{L}(E_2,E_3)$ и $A^* \in \mathcal{L}(E_3^*,E_2^*)$, то справедливо свойство ассоциативности

$$A\delta^{(k)}(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_2) * \Big(k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1) * v(t,\bar{x})\Big) =$$

$$= \Big(A\delta^{(k)}(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_2) * k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1)\Big) * v(t,\bar{x}),$$

где

$$A\delta^{(k)}(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_2) * k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1) \stackrel{\text{def}}{=} (Ak(t)g(t))^{(k)}\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1-\bar{y}_2).$$

Действительно, введем обозначение $w(t,\bar{x}) = k(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1)*v(t,\bar{x})$, тогда $\forall s(t,\bar{x}) \in K(R^{n+1};E_2^*)$

$$\Big(w(t,\bar{x}),s(t,\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=} \Big((g(t)\cdot\delta(\bar{z}-\bar{y}_1),(v(\tau,\bar{x}),k^*(t)s(t+\tau,\bar{x}+\bar{z}))\Big) =$$

$$= \Big(g(t),(v(\tau,\bar{x}),k^*(t)s(t+\tau,\bar{x}+\bar{y}_1))\Big).$$

Отсюда $\forall s(t,\bar{x}) \in K(R^{n+1};E_3^*)$

$$\Big(A\delta^{(k)}(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_2) * w(t,\bar{x}),s(t,\bar{x})\Big) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$= \Big(\delta^{(k)}(\tau)\cdot\delta(\bar{z}-\bar{y}_2),(w(t,\bar{x}),A^*s(t+\tau,\bar{x}+\bar{z}))\Big) = (-1)^k\Big(w(t,\bar{x}),A^*s_t^{(k)}(t,\bar{x}+\bar{y}_2)\Big) =$$

$$= (-1)^k\Big(g(t),(v(\tau,\bar{x}),k^*(t)A^*s_t^{(k)}(t+\tau,\bar{x}+\bar{y}_1+\bar{y}_1))\Big) \stackrel{\text{def}}{=}$$

$$= (-1)^k\Big(Ak(t)g(t)\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1-\bar{y}_2) * v(\tau,\bar{x}),s_t^{(k)}(t,\bar{x})\Big) =$$

$$= \Big((Ak(t)g(t))^{(k)}\cdot\delta(\bar{x}-\bar{y}_1-\bar{y}_2) * v(\tau,\bar{x}),s(t,\bar{x})\Big).$$

3 Фундаментальные оператор-функции дифференциальных операторов с нетеровым оператором в главной части

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$\mathcal{L}(\mathcal{D})=\sum_{|\alpha|=0}^{N}A_\alpha\mathcal{D}^\alpha=\sum_{|\alpha|=0}^{N}A_\alpha\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}},\ \ |\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n,$$

где A_α - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{\cap_{|\alpha|=0}^{N}D(A_\alpha)}=E_1$, и соответствующую ему обобщенную оператор-функцию

$$\mathcal{L}(\delta(\bar{x}))=\sum_{|\alpha|=0}^{N}A_\alpha\delta^{(\alpha_1)}(\bar{x}_1)\cdot\ldots\cdot\delta^{(\alpha_n)}(\bar{x}_n).$$

Фундаментальной оператор-функцией дифференциального опреатора $\mathcal{L}(\mathcal{D})$ на классе $K'(R^n;E_2)$ называется такая обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}(\bar{x})$, что $\forall u(\bar{x})\in K'(R^n;E_2)$ на основном пространстве $K(R^n;E_2^*)$ справедливо равенство

$$\mathcal{L}(\delta(\bar{x}))*\mathcal{E}(\bar{x})*u(\bar{x})=u(\bar{x}).$$

Таким образом, если существует свертка $\mathcal{E}(\bar{x})*g(\bar{x})$, то она является решением уравнения $\mathcal{L}(\delta(\bar{x}))*u(\bar{x})=g(\bar{x})$, что в свою очередь позволяет строить обобщенные (и классические) решения дифференциального уравнения $\mathcal{L}(\mathcal{D})u(\bar{x})=f(\bar{x})$ [5], [6].

Теорема 1. Если A, B - замкнутые линейные операторы из E_1 в E_2, $\overline{R(B)}=R(B)$, $D(B)\subset D(A)$, $\overline{D(A)}=\overline{D(A)}=E_1$, $n=\dim N(B)$, $m=\dim N(B^*)$, $n>m$, существуют полные жордановы наборы $\{\varphi_i^{(j)},\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,p_i\}$ и $\{\psi_i^{(j)},\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,p_i\}$, тогда дифференциальный оператор первого порядка $(B\delta'(t)-A\delta(t))$ на классе $K'(R^1_+;E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_1(t)=B^+e^{AB^+t}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(k)}(t)\Big],$$

где $\psi_i^{(j)}$ при $i=m+1,\ldots,n$, $j=2,\ldots,p_i$ являются произвольными функционалами из E_2^* и $\psi_i^{(1)}=0$, $i=m+1,\ldots,n$.

Доказательство. В соответствии с определением необходимо проверить справедливость равенства

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}_1(t)*u(t)=u(t)$$

на основном пространстве $K(R^1;E_2^*)$. Подставим в левую часть этого равенства выражение для $\mathcal{E}_1(t)$:

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}_1(t)*u(t)=$$

$$
= \Big((I-\mathcal{Q})AB^{+}e^{AB^{+}t}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)+
$$

$$
+(I-\mathcal{Q})\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\delta(t)-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k} <\cdot,\psi_i^{(j)}> B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(k+1)}(t)\Big]-
$$

$$
-AB^{+}e^{AB^{+}t}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(k)}(t)\Big]\Big) * u(t).
$$

Поскольку $B\varphi_i^{(1)}=0$, то

$$
(B\delta'(t)-A\delta(t)) * \mathcal{E}_1(t) * u(t) =
$$

$$
= \Big(I\delta(t) - \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{Q}e^{AB^{+}t}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)\Big)-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-2}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k-1} <\cdot,\psi_i^{(j)}> B\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(k+1)}(t)\Big]+
$$

$$
+\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(k)}(t)\Big]\Big) * u(t) =
$$

$$
= \Big(I\delta(t) - \frac{d}{dt}\Big(\mathcal{Q}e^{AB^{+}t}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)\Big)-
$$

$$
-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k} <\cdot,\psi_i^{(j)}> \Big(B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\Big\}\delta^{(k)}(t)\Big]\Big) * u(t).
$$

Но $B\varphi_i^{(j+1)}=A\varphi_i^{(j)}$, поэтому теорема будет доказана, если показать, что

$$
\mathcal{Q}e^{AB^{+}t}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]=0
$$

или

$$
\sum_{\nu=1}^{m} < e^{AB^{+}t}\cdot,\psi_\nu > z_\nu\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]=0.
$$

Покажем, что при каждом $\nu=1,\ldots,m$ соответствующее слагаемое обращается в нуль. Действительно

$$
< e^{AB^{+}t}\cdot,\psi_\nu > z_\nu\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} <\cdot,\psi_i^{(j)}> A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]=
$$

$$
=<\cdot,\psi_\nu^{(1)}+\psi_\nu^{(2)}\cdot\frac{t}{1!}+\psi_\nu^{(3)}\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots\psi_\nu^{(p_\nu)}\cdot\frac{t^{p_\nu-1}}{(p_\nu-1)!}> z_\nu.
$$

$$\cdot\Big[I-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}-\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]=$$

$$=-\sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>z_\nu\cdot$$

$$\cdot<\varphi_i^{(1)},A^*(B^{+*}A^*)^{p_i-j}\Big(\psi_\nu^{(1)}+\psi_\nu^{(2)}\cdot\frac{t}{1!}+\psi_\nu^{(3)}\cdot\frac{t^2}{2!}+\ldots\psi_\nu^{(p_\nu)}\cdot\frac{t^{p_\nu-1}}{(p_\nu-1)!}\Big)>=0.$$

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если в условиях теоремы 1 $n<m$, то обобщенная оператор- функция $\mathcal{E}_1(t)$ является фундаментальной для дифференциального оператора $(B\delta'(t)-A\delta(t))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(R^1_+;E_2)$ удовлетворяющих условиям

$$<e^{AB^+t}\cdot,\psi_\nu>z_\nu\theta(t)*u(t)=0,\quad \nu=n+1,\ldots,m.$$

Доказательство. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, получим равенство

$$(B\delta'(t)-A\delta(t))*\mathcal{E}_1(t)*u(t)=I\delta(t)*u(t)-$$

$$-\frac{d}{dt}\Big(\mathcal{Q}e^{AB^+t}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)\Big)*u(t).$$

Но

$$\mathcal{Q}e^{AB^+t}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)*u(t)=$$

$$=\sum_{\nu=n+1}^{m}<e^{AB^+t}\cdot,\psi_\nu>z_\nu\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)*u(t)=$$

$$=\sum_{\nu=n+1}^{m}\Big[<e^{AB^+t}\cdot,\psi_\nu>-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>\frac{t^{j-1}}{(j-1)!}<A\varphi_i^{(p_i)},\psi_\nu>\Big]z_\nu\theta(t)*u(t)=$$

$$=\sum_{\nu=n+1}^{m}<e^{AB^+t}\cdot,\psi_\nu>z_\nu\theta(t)*u(t)$$

Теорема 2 доказана.

Теоремы 1 и 2 допускают следующие обобщения.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 1, то

а) дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(t)-A\delta(t))$ на классе $K'(R^1_+;E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t)=B^+\mathcal{U}_N(AB^+t)\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(N\cdot k)}(t)\Big],$$

где

$$\mathcal{U}_N(AB^+t)=\sum_{i=1}^{\infty}(AB^+)^{i-1}\frac{t^{i\cdot N-1}}{(i\cdot N-1)!};$$

б) дифференциальный оператор $(B\delta^{(N)}(x) \cdot \delta^{(N)}(y) - A\delta(x) \cdot \delta(y))$ на классе $K'(R^2_+; E_2)$ имеет фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(x,y) = B^+\mathcal{V}_N(AB^+)(x,y)\Big[I - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \psi_i^{(j)} > A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(x,y) -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k} < \cdot, \psi_i^{(j)} > \varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(N\cdot k)}(x)\cdot\delta^{(N\cdot k)}(y)\Big],$$

где

$$\mathcal{V}_N(AB^+)(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}(AB^+)^{i-1}\frac{x^{i\cdot N-1}}{(i\cdot N-1)!}\cdot\frac{y^{i\cdot N-1}}{(i\cdot N-1)!},$$

здесь $\psi_i^{(j)}$ при $i = m+1,\dots,n$, $j = 1,\dots,p_i$ те же, что и в теореме 1.

Теорема 4. Если выполнены условия теоремы 2, то

а) обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t)$ является фундаментальной для дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(t) - A\delta(t))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(R^1_+; E_2)$ удовлетворяющих условиям

$$< \mathcal{U}_N(AB^+t)\cdot, \psi_\nu > z_\nu\theta(t) * u(t) = 0, \quad \nu = n+1,\dots,m;$$

б) обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(x,y)$ является фундаментальной для дифференциального оператора $(B\delta^{(N)}(x)\cdot\delta^{(N)}(y) - A\delta(x)\cdot\delta(y))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(R^2_+; E_2)$ удовлетворяющих условиям

$$< \mathcal{V}_N(AB^+)(x,y)\cdot, \psi_\nu > z_\nu\theta(x,y) * u(x,y) = 0, \quad \nu = n+1,\dots,m.$$

Замечание 1. Очевидно при $N = 2$, $\mathcal{U}_2(AB^+t) = \frac{\sinh(\sqrt{AB^+}t)}{\sqrt{AB^+}}$, причем здесь $\sqrt{AB^+}$ формальный символ.

Замечание 2. Если $n = m$, т.е. оператор B фредгольмов, то $B^+ = \Gamma$ - оператор Шмидта и теоремы 1 и 3а) оказываются теоремами 1 и 3 из работы [6].

Рассмотрим для пары операторов A и B, в предположении выполнения условий теоремы 1, задачу Коши вида

$$B\dot{x}(t) = Ax(t) + f(t),$$

$$x(0) = x_0,$$

$x_0 \in D(B)$, $f(t)$ достаточно гладкая функция со значениями в E_2. Функция $x(t) \in C^1(t \geq 0)$, являющаяся решением этой задачи, будучи продолженная нулем при $t < 0$, т.е. $\tilde{x}(t) = x(t)\theta(t) \in K'(R^1_+; E_1)$, удовлетворяет в обобщенном смысле [7] равенству

$$B\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + f(t)\theta(t) + Bx_0\delta(t),$$

здесь $f(t)\theta(t)+Bx_0\delta(t) \in K'(R^1_+; E_2)$. Задачу о построении решения такого уравнения принято называть обобщенной задачей Коши. В соответствии с теоремой 1 искомое обобщенное решение (класса $K'(R^1_+; E_1)$) имеет вид

$$\tilde{x}(t) = \mathcal{E}_1(t) * (Bx_0\delta(t) + f(t)\theta(t)),$$

или в развернутой форме

$$\tilde{x}(t) = -\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{p_i-1}\Big\{\sum_{j=1}^{k} c_{ij}\varphi_i^{(k+1-j)}\Big\}\delta^{(p_i-1-k)}(t)\Big]+$$

$$+\Bigg(x_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i} c_{ij}\varphi_i^{(p_i+1-j)} + \sum_{i=m+1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i} c_{ij}B^+e^{AB^+t}A\varphi_i^{(p_i-j)}+$$

$$+\int_0^t B^+e^{AB^+(t-s)}[I-\tilde{\mathcal{Q}}](Ax_0 + f(s) + \sum_{k=m+1}^{n}\xi_{k1}(s)A\varphi_k^{(1)})ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{p_i}\xi_{ij}(t)\varphi_i^{(j)} + \sum_{k=m+1}^{n}\xi_{k1}(t)\varphi_k^{(1)}\Bigg)\theta(t),$$

здесь введены обозначения:

$$\tilde{\mathcal{Q}} = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \psi_i^{(j)} > A\varphi_i^{(p_i+1-j)}, \quad l = \min(m,n);$$

при $i = 1, \dots, m, \;\; j = 1, \dots, p_i$

$$c_{ij} = - < Ax_0 + f(0), \psi_i^{(j)} > - < f'(0), \psi_i^{(j-1)} > - \ldots - < f^{(j-1)}(0), \psi_i^{(1)} >,$$

$$\xi_{ij}(t) = -\sum_{k=0}^{p_i-j} < f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0), \psi_i^{(p_i-k+1-j)} >;$$

при $i = m+1, \dots, n, \;\; j = 1, \dots, p_i - 1$

$$c_{ij} = - < Bx_0, \psi_i^{(j+1)} > - < f(0), \psi_i^{(j)} > - \ldots - < f^{(j-2)}(0), \psi_i^{(2)} >,$$

$$c_{ip_i} = - < x_0, \gamma_i > - < f(0), \psi_i^{(p_i)} > - \ldots - < f^{(p_i-2)}(0), \psi_i^{(2)} >,$$

$$\xi_{i1}(t) = -\sum_{k=0}^{p_i-1} < f^{(k)}(t) - f^{(k)}(0), \psi_i^{(p_i-k)} > .$$

В силу произвольности функционалов $\psi_i^{(j)}$, при $i = m+1, \dots, n$, $j = 2, \dots, p_i$, соответствующие им коэффициенты c_{ij} оказываются свободными параметрами, а функции $\xi_{i1}(t)$, $i = m+1, \dots, n$ - произвольными, т.е. обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ является многопараметрической функцией. Отсюда получаем следующее утверждение

Следствие 1. Если выполнены условия теоремы 1, в выражении для обобщенного решения $\tilde{x}(t)$ задачи Коши свободные параметры c_{ij}, $i = m+1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$ положить равными нулю, а начальные условия x_0 и функцию $f(t)$ выбрать такими, чтобы $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p_i$, то обобщенное решение окажется классическим (непрерывным).

Если $m > n$, то в соответствии с теоремой 2 функция $\tilde{x}(t) = \mathcal{E}_1(t) * (Bx_0\delta(t) + f(t)\theta(t))$ будет являться обобщенным решением задачи Коши, если для функции $Bx_0\delta(t) + f(t)\theta(t)$ при $\nu = n+1, \dots, m$ будут выполняться условия

$$< e^{AB^+t}\cdot, \psi_\nu > z_\nu\theta(t) * (Bx_0\delta(t) + f(t)\theta(t)) = 0$$

или

$$\int_0^t < e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \psi_\nu > ds = 0,$$

причем свободных параметров и произвольных функций в обобщенном решении $\tilde{x}(t)$ в этом случае нет. Итак, справедливо утверждение.

Следствие 2. Если выполнены условия теоремы 2, начальные данные x_0 и функцию $f(t)$ выбрать таким образом, чтобы $c_{ij} = 0$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p_i$ и при $\nu = n+1, \dots, m$

$$\int_0^t < e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \psi_\nu > ds = 0,$$

то обобщенное решение $\tilde{x}(t)$ окажется классическим (непрерывным).

Замечание 3. Если вспомнить, что при $n < m$ была осуществлена перестройка базиса $\{\psi_k\}$ для $k = n+1, \dots, m$ по правилу $\tilde{\psi}_k = \psi_k - \sum_{i=1}^n < A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_k > \psi_i$, то, вводя обозначения для $j = 1, \dots, m$

$$b_j(t) = \int_0^t < e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \psi_j > ds,$$

условия

$$\int_0^t < e^{AB^+(t-s)}(Ax_0 + f(s)), \tilde{\psi}_\nu > ds = 0, \quad \nu = n+1, \dots, m$$

можно переписать в виде

$$b_\nu(t) = \sum_{i=1}^n < A\varphi_i^{(p_i)}, \psi_\nu > b_i(t).$$

Соответственно при $i = 1, \dots, l$, $j = 1, \dots, p_i$, $l = \min(n, m)$ коэффициенты c_{ij} можно вычислять по правилам $c_{ij} = -b_i^{(j)}(0)$, а функции - $\xi_{ij}(t) = b_i^{(p_i-j+1)}(t) - b_i^{(p_i-j+1)}(0)$. Именно таким образом в работах [8], [9] конструировались непрерывные решения рассматриваемой задачи Коши. При нашем подходе теоремы из [8] и [9] получаются как следствия из теорем 1 и 2, аналогичные утверждения можно получить и из теорем 3 и 4.

4 Фундаментальные оператор-функции дифференциально-разностных операторов с нетеровым оператором при производной

Теорема 5. Если выполнены условия теоремы 1, то дифференциально-разностный оператор $(B\delta'(t) \cdot \delta(\bar{x}) - A\delta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x})))$ имеет на классе $K'(R^1_+ \otimes R^n; E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_1(t, \bar{x}) = B^+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(AB^+t)^k}{k!} \Big[I - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{p_i} < \cdot, \psi_i^{(j)} > A\varphi_i^{(p_i+1-j)} \Big] \theta(t) \cdot (\delta(\bar{x} - \bar{\mu}) - \delta(\bar{x}))^k +$$

$$+ \sum_{i=1}^n \Big[\sum_{k=0}^{p_i-1} (-1)^k \Big\{ \sum_{j=1}^{p_i-k} < \cdot, \psi_i^{(j)} > \varphi_i^{(p_i-k+1-j)} \Big\} \delta^{(k)}(t) \cdot \mathcal{B}_{k+1}(\bar{x}) \Big],$$

здесь, как и в теореме 1, при $i=m+1,\ldots,n$, $j=2,\ldots,p_i$, $\psi_i^{(1)}=0$, $\psi_i^{(j)}$ - произвольные функционалы из E_2^* и введены обозначения:

$$(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k=\underbrace{(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))*\ldots*(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))}_{k}=\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu C_k^\nu\delta(\bar{x}-\nu\bar{\mu}),$$

$$\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x})=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_{k+\nu}^k\delta(\bar{x}-\nu\bar{\mu}),\ \ (\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^0=\mathcal{B}_0(\bar{x})=\delta(\bar{x}).$$

Доказательство. Обобщенные функции $\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x})$ удовлетворяют следующим равенствам

$$(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))*\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x})=-\mathcal{B}_k(\bar{x}),\ \ \forall k\in N\cup\{0\},$$

проверяемым непосредственно, поэтому если $k>l$, то

$$(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k*\mathcal{B}_l(\bar{x})=(-1)^l(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^{k-l}.$$

Осуществляя далее выкладки, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 1, используя при этом приведенные здесь соотношения, получим равенство $\forall u(t,\bar{x})\in K'(R_+^1\otimes R^n;E_2)$

$$(B\delta'(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x})))*\mathcal{E}_1(t,\bar{x})*u(t,\bar{x})=$$

$$=\Bigg(I\delta(t)\cdot\delta(\bar{x})-\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{Q}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(AB^+t)^k}{k!}\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=1}^{p_i-1}(-1)^k\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>\Big(B\varphi_i^{(p_i-k+2-j)}-A\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big)\Big\}\delta^{(k)}(t)\cdot\mathcal{B}_k(\bar{x})\Big]\Bigg)*u(t,\bar{x}).$$

Завершается доказательство так же, как в теореме 1.

Теорема 5 доказана.

Теорема 6. Если в условиях теоремы 5 $n<m$, то обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_1(t,\bar{x})$ является фундаментальной для дифференциально-разностного оператора $(B\delta'(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x})))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(R_+^1\otimes R^n;E_2)$, удовлетворяющих условиям при $\nu=n+1,\ldots,m$

$$\sum_{k=0}^{\infty}<\frac{(AB^+t)^k}{k!}\cdot,\psi_\nu>z_\nu\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k*u(t,\bar{x})=0.$$

Как и теоремы предыдущего пункта, эти утверждения допускают обобщения на дифференциально-разностные операторы высокого порядка, а именно

Теорема 7. а) При выполнении условий теоремы 1 дифференциально-разностный оператор $(B\delta^{(N)}(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x})))$ имеет на классе $K'(R_+^1\otimes R^n;E_2)$ фундаментальную оператор-функцию вида

$$\mathcal{E}_N(t,\bar{x})=B^+\sum_{k=1}^{\infty}(AB^+)^{k-1}\frac{t^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}\cdot$$

$$\cdot\Big[I-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}<\cdot,\psi_i^{(j)}>A\varphi_i^{(p_i+1-j)}\Big]\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\Big[\sum_{k=0}^{p_i-1}(-1)^k\Big\{\sum_{j=1}^{p_i-k}<\cdot,\psi_i^{(j)}>\varphi_i^{(p_i-k+1-j)}\Big\}\delta^{(k\cdot N)}(t)\cdot\mathcal{B}_{k+1}(\bar{x})\Big],$$

б) Если в условиях теоремы 1 $n<m$, то обобщенная оператор-функция $\mathcal{E}_N(t,\bar{x})$ является фундаментальной для дифференциально-разностного оператора $B\delta^{(N)}(t)\cdot\delta(\bar{x})-A\delta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))$ на подклассе обобщенных функций из $K'(R^1_+\otimes R^n;E_2)$ удовлетворяющих условиям при $\nu=n+1,\dots,m$

$$\sum_{k=1}^{\infty}<(AB^+)^{k-1}\frac{(t)^{N\cdot k-1}}{(N\cdot k-1)!}\cdot,\psi_\nu>z_\nu\theta(t)\cdot(\delta(\bar{x}-\bar{\mu})-\delta(\bar{x}))^k*u(t,\bar{x})=0.$$

Замечание 4. Для пары операторов A и B, удовлетворяющих условиям теоремы 5, обобщенное решение задачи Коши

$$B\frac{\partial u}{\partial t}=A(u(t,\bar{x}-\bar{\mu})-u(t,\bar{x}))+f(t,\bar{x}),$$

$$u(0,\bar{x})=u_0(\bar{x}),$$

где $u_0(\bar{x})$ и $f(t,\bar{x})$ ограничены по $\bar{x}\in R^n$, $u_0(\bar{x})\in D(B)$, представимо в виде

$$\tilde{u}(t,\bar{x})=\mathcal{E}_1(t,\bar{x})*(Bu_0(\bar{x})\delta(t)+f(t,\bar{x})\theta(t)).$$

Из этого представления, как и при выводе следствий из теорем 1 и 2, при необходимости можно получить теоремы о непрерывных решениях данной задачи Коши.

В заключении авторы считают своим приятным долгом сердечно поблагодарить профессора Н.А.Сидорова за полезные обсуждения представленных здесь результатов и конструктивные замечания.

Список литературы

[1] Nashed M.Z. Generalized Inverses and aplications. Academ. Press, 1976.

[2] Сидоров Н.А., Романова О.А., Благодатская Е.Б. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части. Иркутск, 1992. 30 с. (Препринт / ИрВЦ Со РАН №3).

[3] Русак Ю.Б. Некоторые соотношения между жордановыми наборами оператор-функций и сопряженной к ней // Изв.АН УзССР, Сер. физ.-мат. 1972. №2. С. 15-19.

[4] Вайнберг М.М., Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.: Наука, 1969.

[5] Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981.

[6] Фалалеев М.В. Фундаментальные оператор-функции сингулярных дифференциальных операторов в банаховых пространствах // СМЖ. 2000. Т41, №5. С. 1167-1182.

[7] Сидоров Н.А., Фалалеев М.В. Обобщенные решения дифференциальных уравнений с фредгольмовым оператором при производной // Дифференц. уравнения. 1987. Т.23, №4. С. 726-728.

[8] Сидоров Н.А., Романова О.А. О применениии некоторых результатов теории ветвления при решении дифференциальных уравнений с вырождением // Дифференц. уравнения. 1983. Т.19, №9. С. 1516-1626

[9] Сидоров Н.А., Романова О.А., Благодатская Е.Б. Уравнения с частными производными с оператором конечного индекса при главной части // Дифференц. уравнения. 1994. Т.30, №4. С. 729-731.

[10] Корпусов М.О., Плетнер Ю.Д., Свешников А.Г. О нестационарных волнах в средах с анизотропной дисперсией // ЖВМиМФ. 1999. Т39, №6. С. 1006-1022; ЖВМиМФ. 2000. Т40, №8. С. 1237-1249; ЖВМиМФ. 2003. Т43, №12. С. 1835-1869.

[11] Баренблатт Г.И., Желтов Ю.П., Кочина И.Н. Об основных представлениях теории фильтрации в трещиноватых средах // Прикл. матем. и механ. 1960. Т.24, №5. С. 58-73.

[12] Осколков А.П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта и жидкостей Олдройта // Тр.МИАН СССР. М.: 1988. Т.179. С. 126-164.

[13] Dynamics of linear systems. Prague. 1967.

[14] Кожанов А.И. Начально-краевая задача для уравнений типа обобщенного уравнения Буссинеска с нелинейным источником // Матем. заметки. 1999. Т.65, №1. С. 70-75.

[15] Свиридюк Г.А. К общей теории полугрупп операторов // Успехи матем. наук. 1994. Т.49, №4. С. 47-74.

[16] Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002.