УДК 517.956+517.958

Г.А.Рудых, Э.И.Семенов

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ АНИЗОТРОПНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИФФУЗИИ.II

Настоящая работа является продолжением исследований проведенных в [1]. Обозначения и сокращения взяты из [1] и используются без дополнительных пояснений.

6. Существование решений системы АДУ (3.4) ($p \neq 2$). Предположим, что $\lambda = -\frac{2}{m}, m \in \{1, 2, \ldots, n\}, p \neq 1$. Выше (см. замечание 5), мы отмечали, что если $\lambda = -\frac{2}{m}$, то либо $p = 1$, либо $m = 2$. Так как $p \neq 1$, то $m = 2$. Итак, в рассматриваемом случае $\lambda = -1, \tau = -\frac{1}{p}, \sigma = -p, \xi = 1, p \neq 0, p \neq 1$. Из системы ОДУ (5.6), (5.7) следует, что $\varphi(t) = \beta \exp\{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t\}, \psi(t) = \alpha$, где $\alpha, \beta \in \Re; \alpha \neq 0; \beta \neq 0$. Тогда в силу (5.4), (5.5) имеем $A_1(t) = \beta \exp\{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t\} S E_2 S', A_2(t) = \alpha S E_2 S.'$ Заметим прежде всего (проверяется вычислением), что из уравнения (3.4.2) следует представление

$$\mathbf{B}_2(t) = S[E_2 + e^{-2\alpha t}(I - E_2)]S'\mathbf{B}_2(0).$$

Кроме того, уравнение (3.4.5) запишется

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 2\alpha S(E_2 - \frac{1}{p}I)S'\mathbf{B}_1(t) + 2\beta e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t} S(E_2 - pI)S'\mathbf{B}_2(t).$$

В исследуемом случае, алгебраическое соотношение (5.2) принимает вид $(I - E_2)S'\mathbf{B}_1(t) = 0$, то есть $S'\mathbf{B}_1(t) = E_2 S'\mathbf{B}_1(t)$. Следовательно

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \frac{2\alpha}{p}(p-1)\mathbf{B}_1(t) + 2\beta e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t} S(E_2 - pI)S'\mathbf{B}_2(t).$$

Отметим, во-первых, что из (5.2) следует справедливость равенства $(I - E_2)S'\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 0$. В итоге, из полученного соотношения и с учетом того, что $E_2^2 = E_2, p \neq 0$, имеем $(I - E_2)S'\mathbf{B}_2(t) = 0$. Ясно, также, что $(I - E_2)S'\mathbf{B}_2(0) = 0$. Так как

$E_2S'\mathbf{B}_2(0) = S'\mathbf{B}_2(0)$, то $\mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0)$. С другой стороны, нетрудно видеть, что вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \frac{2\alpha}{p}(p-1)\mathbf{B}_1(t) - 2\beta(p-1)e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}\mathbf{B}_2(0).$$

Отсюда следует

$$\mathbf{B}_1(t) = [\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)]e^{\frac{2\alpha}{p}(p-1)t} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}. \tag{6.1}$$

Ввиду того, что $\mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0), \lambda = -1$, то уравнение (3.4.3) запишется $\dot{C}_2(t) = -2\alpha C_2(t) + |\mathbf{B}_2(0)|^2$, и как легко проверить, обладает решением

$$C_2(t) = [C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2]e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2. \tag{6.2}$$

Помимо этого, можно показать, что уравнение (3.4.6) принимает вид

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{2\alpha}{p}C_1(t) - 2\beta p e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}C_2(t) + 2(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_1(t)),$$

где функции $\mathbf{B}_1(t), C_2(t)$ определены выше. При этом мы учли, что $\mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0)$. Нетрудно показать, что полученное уравнение имеет следующее решение

$$C_1(t) = \mathbb{C}_1(0)e^{-\frac{2\alpha}{p}t} + \frac{\beta p}{\alpha(p-1)}[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2]e^{-\frac{2\alpha}{p}(p^2-p+1)t} +$$

$$+\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2]e^{\frac{2\alpha}{p}(p-1)t} + \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2 e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}, \tag{6.3}$$

где введено обозначение

$$\mathbb{C}_1(0) = C_1(0) - \frac{\beta p}{\alpha(p-1)}[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2] - \tag{6.4}$$

$$-\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2] - \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2.$$

Поскольку вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ и скалярная функция $C_1(t)$ связаны алгебраическим соотношением (5.3), то из него, после несложных преобразований, вытекает зависимость

$$[\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)]^2 e^{\frac{4\alpha}{p}(p-1)t} = 2\beta\mathbb{C}_1(0)e^{-\frac{2\alpha}{p}(p^2-2p+2)t} + \tag{5.3$'$}$$

$$+\frac{2\beta^2 p}{\alpha(p-1)}[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2]e^{-\frac{2\alpha}{p}(2p^2-3p+2)t}.$$

Так как $\alpha, \beta, p \in \Re, \alpha \neq 0, \beta \neq 0, p \neq 0, p \neq 1$, то условие (5.3) $'$, как легко видеть, будет выполняться в двух случаях:

$\mathbb{I}$. Пусть $p \neq \frac{1}{2}$, тогда если имеют место соотношения

$$\mathbf{B}_1(0) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0), C_2(0) = \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2, \mathbb{C}_1(0) = 0,$$

то (5.3) $'$ выполняется тождественно.

$\mathbb{II}$. Пусть $p = \frac{1}{2}$, и

$$|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2 + \frac{2\beta^2}{\alpha}[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2] = 0, \mathbb{C}_1(0) = 0, \tag{6.5}$$

тогда (5.3) $'$ выполняется тождественно.

В итоге, в случае $\mathbb{I}$ получим

Утверждение 8. *Пусть* $\lambda = -\frac{2}{m}, m \in \{1, 2, \ldots, n\}, p \neq 0, p \neq \frac{1}{2}, p \neq 1$, *тогда* $m = 2, \lambda = -1, \tau = -\frac{1}{p}, \sigma = -p, \xi = 1$ *и система АДУ (3.4) имеет следующее решение*

$$A_1(t) = \beta e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t} SE_2S', A_2(t) = \alpha SE_2S',$$
$$\mathbf{B}_1(t) = \mathbf{B}_1(0)e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}, \mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0),$$
$$C_1(t) = \frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2 e^{-\frac{2\alpha}{p}(p-1)^2 t}, C_2(t) = \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

причем

$$(I - E_2)S'\mathbf{B}_1(0) = (I - E_2)S'\mathbf{B}_2(0) = 0, \mathbf{B}_1(0) = \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0),$$

где $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in \Re^n$ *- постоянные векторы.*

Докажем, что в случае $\mathbb{II}$ имеет место следующий результат

Теорема 5. *Если* $\lambda = -\frac{2}{m}, m \in \{1, 2, \ldots, n\}, p = \frac{1}{2}$, *то* $m = 2, \lambda = -1, \tau = -2, \sigma = -\frac{1}{2}, \xi = 1$ *и система АДУ (3.4) обладает решением*

$$A_1(t) = \beta e^{-\alpha t} SE_2S', A_2(t) = \alpha SE_2S',$$
$$\mathbf{B}_1(t) = [\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)]e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)e^{-\alpha t}, \mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0),$$
$$C_1(t) = \frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2 e^{-3\alpha t} + \tag{6.6}$$
$$+\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2]e^{-2\alpha t} + \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2 e^{-\alpha t},$$

$$C_2(t) = -\frac{\alpha}{2\beta^2}|\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2 e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

причем постоянные векторы $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in \Re^n$ *связаны цепочкой равенств*

$$(I - E_2)S'\mathbf{B}_1(0) = (I - E_2)S'\mathbf{B}_2(0) = 0, \tag{6.7}$$

где $\alpha, \beta \in \Re; \alpha \neq 0; \beta \neq 0$.

Доказательство. Прежде всего отметим, что при сделанных предположениях, вид матриц $A_1(t), A_2(t)$ и вектор-столбца $\mathbf{B}_2(t)$ следует из утверждения 8. С другой стороны, используя формулу (6.1) получим выражение для вектор-столбца $\mathbf{B}_1(t)$. Отметим, что аналогично, как и при доказательстве утверждения 8 можно показать справедливость цепочки равенств (6.7). Обратимся теперь к алгебраическим соотношениям (6.5). При этом напомним, что $\mathbb{C}_1(0)$ определяется согласно (6.4). С учетом сказанного, легко проверить, что из соотношений (6.5) следует справедливость формул

$$C_1(0) = \frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2, C_2(0) = \frac{1}{\beta}(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\alpha}{2\beta^2}|\mathbf{B}_1(0)|^2.$$

Если учесть вид $C_2(0)$, то из (6.2) немедленно следует выражение для скалярной функции $C_2(t)$. Наконец, принимая во внимание тот факт, что $\mathbb{C}_1(0) = 0$ (см. (6.4)) и учитывая выражение для $C_2(0)$, нетрудно убедиться, что из соотношения (6.3) определяется скалярная функция $C_1(t)$. Теорема доказана.

Из утверждения 1 и теоремы 5 вытекает следующий нетривиальный результат

Теорема 6. *Уравнение нелинейной диффузии*

$$u_t = \Delta \ln u, \quad u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{6.8}$$

обладает точным неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x}, t) = \Bigg[-[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)]_+^{\frac{1}{2}} -$$

$$-[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)]\Bigg]_+^{-1}. \tag{6.9}$$

При этом матрицы $A_k(t)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ и скалярные функции $C_k(t)$ определяются посредством формул (6.6), (6.7), где $k = 1, 2$.

Теперь рассмотрим случай, когда $\lambda \neq -\frac{2}{m}$. В п.5 мы отмечали, что параметры $\lambda, p \in \Re, \lambda \neq 0, p \neq 0$ исследуемой системы АДУ (3.4) связаны соотношением $2p(\lambda + 1) = \lambda(2 - m)$. Отсюда следует, что $\lambda = \frac{2p}{2-m-2p}$, где $2 - m - 2p \neq 0$. Так как $\tau = \frac{\lambda}{p}, \sigma = -\frac{2p}{m}$, то $\tau m + \sigma m + 4 = \frac{2(p-1)(2p+m-4)}{2-m-2p}$. Причем, если $p = 1$, то $\lambda = -\frac{2}{m}$. Однако, мы рассматриваем случай, когда $\lambda \neq -\frac{2}{m}$. В связи с этим, $\tau m + \sigma m + 4 = 0$, если $p = 2 - \frac{m}{2}$, где $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Очевидно, что $\lambda = \frac{m}{2} - 2$. Следовательно $\tau = -1, \sigma = \frac{m-4}{m}, \lambda m + 2 = \frac{(m-2)^2}{2}$, причем $m \neq 2, m \neq 4$. Таким образом, в рассматриваемом случае, система ОДУ (5.6), (5.7) имеет следующее решение $\varphi(t) = \beta, \psi(t) = \alpha[\Theta(t)]^{-1}$, где $\Theta(t) = 1 - \frac{1}{2}\alpha(m-2)^2 t; \alpha, \beta \in \Re; \alpha \neq 0; \beta \neq 0$. Используя формулы (5.4), (5.5) получим $A_1(t) = \beta S E_m S', A_2(t) = \alpha[\Theta(t)]^{-1} S E_m S'$. В результате, из (3.4.2) имеем

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t) = \psi(t) S[2E_m + \lambda m I] S' \mathbf{B}_2(0),$$

где $\lambda = \frac{m}{2} - 2$. Отсюда следует, что

$$\mathbf{B}_2(t) = S\left[\exp\left\{\lambda m \left(\int_0^t \psi(\tau) d\tau\right) I + 2\left(\int_0^t \psi(\tau) d\tau\right) E_m\right\}\right] S' \mathbf{B}_2(0).$$

Поскольку

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau = -\frac{2}{(m-2)^2} \ln|\Theta(t)|,$$

и справедлива цепочка равенств

$$e^{v(t)E_m} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k(t)}{k!} E_m^k = I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^k(t)}{k!} E_m^k =$$

$$= (I - E_m) + E_m + \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^k(t)}{k!}\right) E_m =$$

$$= (I - E_m) + \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^k(t)}{k!}\right) E_m = (I - E_m) + e^{v(t)} E_m,$$

то есть $e^{v(t)E_m} = (I - E_m) + e^{v(t)} E_m$, тогда

$$\mathbf{B}_2(t) = S\left[[\Theta(t)]_+^{-\frac{2\lambda m}{(m-2)^2}} \left(I - E_m + [\Theta(t)]_+^{-\frac{4}{(m-2)^2}} E_m\right)\right] S' \mathbf{B}_2(0).$$

Учитывая, что $\lambda = \frac{m}{2} - 2$ получим

$$\mathbf{B}_2(t) = S\Big[[\Theta(t)]_+^{-\frac{m(m-4)}{(m-2)^2}}(I - E_m) + [\Theta(t)]^{-1}E_m\Big]S'\mathbf{B}_2(0). \tag{6.10}$$

Далее, рассмотрим уравнение (3.4.5). Так как $E_mS'\mathbf{B}_1(t) = S'\mathbf{B}_1(t), (I - E_m)S'\mathbf{B}_1(0) = 0$ (см. (5.2)), то уравнение (3.4.5), после несложных преобразований, принимает вид

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = (2-m)\psi(t)\mathbf{B}_1(t) + \beta(m-4)\mathbf{B}_2(t) + 2\beta SE_mS'\mathbf{B}_2(t). \tag{6.11}$$

С другой стороны, из (5.2) следует, что $(I - E_m)S'\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 0$. Поэтому из (6.11) получим, что $\beta(m-4)(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(t) = 0$. Заметим, что поскольку $\beta \neq 0, m \neq 4$, то $(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(t) = 0$. Очевидно, что $(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(0) = 0$. Иначе говоря, формула (6.10) упрощается

$$\mathbf{B}_2(t) = [\Theta(t)]^{-1}SE_mS'\mathbf{B}_2(0) = [\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_2(0). \tag{6.12}$$

Кроме того, уравнение (6.11) принимает вид

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \alpha(2-m)[\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_1(t) + \beta(m-2)[\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_2(0),$$

и, как легко проверить, обладает решением

$$\mathbf{B}_1(t) = [\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)][\Theta(t)]_+^{\frac{2}{m-2}} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0). \tag{6.13}$$

Помимо этого, уравнение (3.4.3) запишется

$$\dot{C}_2(t) = \frac{1}{2}\alpha m(m-4)[\Theta(t)]^{-1}C_2(t) + [\Theta(t)]^{-2}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

и имеет следующее решение

$$C_2(t) = [C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2][\Theta(t)]_+^{-\frac{m(m-4)}{(m-2)^2}} + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]^{-1}. \tag{6.14}$$

Обратимся теперь к уравнению (3.4.6). Итак, имеем

$$\dot{C}_1(t) = -\alpha m[\Theta(t)]^{-1}C_1(t) + \beta(m-4)C_2(t) + 2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)),$$

где функции $\mathbf{B}_2(t), \mathbf{B}_1(t), C_2(t)$ определяются согласно (6.12), (6.13), (6.14). Откуда, после несложных вычислений, получим представление

$$C_1(t) = \mathbb{C}_1(0)[\Theta(t)]_+^{\frac{2m}{(m-2)^2}} + \frac{\beta(m-4)}{\alpha(m-2)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{\frac{4}{(m-2)^2}} +$$

$$+\frac{1}{\alpha}\left[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{\frac{2}{m-2}}+\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2, \tag{6.15}$$

где

$$\mathbb{C}_1(0)=C_1(0)-\frac{\beta(m-4)}{\alpha(m-2)}\left[C_2(0)-\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]-$$

$$-\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2]-\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2. \tag{6.16}$$

Напомним, что вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ и скалярная функция $C_1(t)$ связаны соотношением (5.3). Определим условия, обеспечивающие выполнимость алгебраического соотношения (5.3). Учитывая сказанное обстоятельство и формулы (6.13), (6.15), (6.16), в итоге, получим

$$|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]_+^{\frac{4}{m-2}}=2\beta\mathbb{C}_1(0)[\Theta(t)]_+^{\frac{2m}{(m-2)^2}}+$$

$$+\frac{2\beta^2(m-4)}{\alpha(m-2)}\left[C_2(0)-\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{\frac{4}{(m-2)^2}}. \tag{6.17}$$

Очевидно, что равенство (6.17) будет выполняться в двух случаях:

$\mathbb{I}$. Пусть $m\in\{1,2,\ldots,n\}, m\neq 3$, тогда для того, чтобы имела место зависимость (6.17) достаточно, чтобы выполнялись соотношения

$$\mathbf{B}_1(0)=\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0),\mathbb{C}_1(0)=0,C_2(0)=\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

где $\mathbb{C}_1(0)$ определяется согласно (6.16).

$\mathbb{II}$. Если $m=3$, то для выполнимости (6.17) достаточно, чтобы

$$|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2+\frac{2\beta^2}{\alpha}\left[C_2(0)-\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]=0,\mathbb{C}_1(0)=0. \tag{6.18}$$

Тем самым, в случае $\mathbb{I}$ справедливо

Утверждение 9. *Пусть* $p=2-\frac{m}{2},\lambda=\frac{m}{2}-2,m\in\{1,2,\ldots,n\},m\neq 2,m\neq 3,m\neq 4,$ *тогда* $\tau=-1,\sigma=\frac{m-4}{m}$ *и система АДУ (3.4) имеет решение*

$$A_1(t)=\beta SE_mS',A_2(t)=\alpha[\Theta(t)]^{-1}SE_mS',$$

$$\mathbf{B}_1(t)=\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0),\mathbf{B}_2(t)=\mathbf{B}_2(0)[\Theta(t)]^{-1},$$

$$C_1(t)=\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2,C_2(t)=\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]^{-1},$$

причем $(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(0)=0.$

Помимо этого, покажем, что в случае $\mathbb{III}$ имеет место следующий результат.

Теорема 7. *Если* $p=\frac{1}{2}, \lambda=-\frac{1}{2}, m=3$, *то* $\tau=-1, \sigma=-\frac{1}{3}$ *и система АДУ (3.4) обладает решением*

$$A_1(t)=\beta S E_3 S', A_2(t)=\alpha(1-\frac{1}{2}\alpha t)^{-1} S E_3 S',$$

$$\mathbf{B}_1(t)=[\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)](1-\frac{1}{2}\alpha t)^2+\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0),$$

$$\mathbf{B}_2(t)=\mathbf{B}_2(0)(1-\frac{1}{2}\alpha t)^{-1},$$

$$C_1(t)=\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2(1-\frac{1}{2}\alpha t)^4+$$

$$+\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2](1-\frac{1}{2}\alpha t)^2+\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

$$C_2(t)=-\frac{\alpha}{2\beta^2}|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2(1-\frac{1}{2}\alpha t)^3+\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2(1-\frac{1}{2}\alpha t)^{-1}, \tag{6.19}$$

причем

$$(I-E_3)S'\mathbf{B}_1(0)=(I-E_3)S'\mathbf{B}_2(0)=0, \tag{6.20}$$

где $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in \Re^n$ *- постоянные векторы;* $\alpha, \beta \in \Re; \alpha \neq 0; \beta \neq 0.$

Доказательство. Отметим, во-первых, что вид матриц $A_1(t), A_2(t)$ и вектор-столбца $\mathbf{B}_2(t)$ следует из утверждения 9. Аналогично, как и при доказательстве утверждения 9 можно показать справедливость цепочки равенств (6.20). Обратимся теперь к соотношениям (6.18). Используя (6.16), нетрудно показать, что из (6.18) можно получить равенства

$$C_1(0)=\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2+\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2+\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2],$$

$$C_2(0)=\frac{1}{\beta}(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\alpha}{2\beta^2}|\mathbf{B}_1(0)|^2. \tag{6.21}$$

После того, как получены соотношения (6.21) легко убедиться, что из формул (6.13), (6.14), (6.15) следует соответственно вид функций $\mathbf{B}_1(t), C_2(t), C_1(t)$. В итоге, мы приходим к справедливости соотношений (6.19). Теорема доказана.

Теперь сформулируем интересный, как нам представляется, результат, вытекающий из утверждения 1 и теоремы 7.

Теорема 8. *Функция*

$$u(\mathbf{x},t)=\left[-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_1(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_1(t))+C_1(t)]_+^{\frac{1}{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_2(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_2(t))+C_2(t)]\right]^{-2},$$

является точным неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением многомерного уравнения быстрой диффузии

$$u_t=\nabla\cdot(u^{-1/2}\nabla u),u\overset{\triangle}{=}u(\mathbf{x},t):\Omega\times\overline{\Re}^+\to\Re^+,\mathbf{x}\in\Re^n,$$

При этом матрицы $A_k(t)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ и скалярные функции $C_k(t)$ определяются согласно (6.19), (6.20), где $k=1,2$.

Далее расмотрим случай, когда $\lambda\neq-\frac{2}{m},\lambda\neq\frac{m}{2}-2$. Пусть $\tau m+\sigma m+4=r$, где $r\in\Re; r\neq0; \tau=\frac{\lambda}{p}; \sigma=-\frac{2p}{m}; m\in\{1,2,\ldots,n\}$. Причем как отмечалось в п.5 имеет место соотношение $2p(\lambda+1)=\lambda(2-m)$. Тем самым, из системы ОДУ (5.6), (5.7) получим, что $\varphi(t)=\beta[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}},\psi(t)=\alpha[\Theta(t)]^{-1}$, где $\Theta(t)=1-\alpha(\lambda m+2)t;\alpha,\beta,\lambda\in\Re;\alpha\neq0;\beta\neq0;\lambda\neq0$. Следовательно, из формул (5.4), (5.5) имеем $A_1(t)=\beta[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}SE_mS',A_2(t)=\alpha[\Theta(t)]^{-1}SE_mS'$. Перепишем уравнение (3.4.2) в следующем виде

$$\dot{\mathbf{B}}_2(t)=\psi(t)S[\lambda mI+2E_m]S'\mathbf{B}_2(t).$$

Решение этого уравнения легко определяется. В самом деле, в силу очевидных соотношений

$$\int_0^t\psi(\xi)d\xi=-\frac{1}{\lambda m+2}\ln|\Theta(t)|,e^{v(t)E_m}=(I-E_m)+e^{v(t)}E_m,$$

несложно показать справедливость цепочки равенств

$$\mathbf{B}_2(t)=S\left[\exp\left\{\lambda m\left(\int_0^t\psi(\xi)d\xi\right)I+2\left(\int_0^t\psi(\xi)d\xi\right)E_m\right\}\right]S'\mathbf{B}_2(0)=$$

$$=S\left[[\Theta(t)]_+^{-\frac{\lambda m}{\lambda m+2}}(I-E_m)+[\Theta(t)]^{-1}E_m\right]S'\mathbf{B}_2(0).\qquad(6.22)$$

Учитывая алгебраическое соотношение (5.2), преобразуем уравнение (3.4.5). Итак имеем

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \alpha(\tau m+2)[\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_1(t) + \beta[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}} S[\sigma m I + 2E_m]S'\mathbf{B}_2(t). \qquad (6.23)$$

С другой стороны, из (5.2) следует, что $(I-E_m)S'\dot{\mathbf{B}}_1(t)=0$, где E_m - матрица, обладающая свойством: $E_m = E_m^2$. Учитывая сказанное, нетрудно убедиться в том, что вектор-столбец $\mathbf{B}_2(t)$ удовлетворяет соотношению $(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(t)=0$. Ясно, что $(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(0)=0$. После того, как получен этот результат , легко видеть, что выражение (6.22) упрощается и, в итоге, принимает вид

$$\mathbf{B}_2(t) = [\Theta(t)]^{-1}SE_mS'\mathbf{B}_2(0) = [\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_2(0). \qquad (6.24)$$

Уравнение (6.23) в силу (6.24) запишется

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = \alpha(\tau m+2)[\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_1(t) + \beta(\sigma m+2)[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}-1}\mathbf{B}_2(0).$$

Отсюда сразу следует, что

$$\mathbf{B}_1(t) = [\mathbf{B}_1(0) - \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)][\Theta(t)]_+^{-\frac{\tau m+2}{\lambda m+2}} + \frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}. \qquad (6.25)$$

Так как функции $A_2(t), \mathbf{B}_2(t)$ нами определены, то легко устанавливается, что уравнение (3.4.3) обладает решением

$$C_2(t) = [C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2][\Theta(t)]_+^{-\frac{\lambda m}{\lambda m+2}} + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]^{-1}. \qquad (6.26)$$

Наконец, рассмотрим уравнение (3.4.6)

$$\dot{C}_1(t) = \alpha\tau m[\Theta(t)]^{-1}C_1(t) + \beta\sigma m[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}C_2(t) + 2(\mathbf{B}_1(t), \mathbf{B}_2(t)),$$

где функции $\mathbf{B}_2(t), \mathbf{B}_1(t), C_2(t)$ определяются согласно (6.24), (6.25), (6.26). Простыми вычислениями проверяется, что

$$C_1(t) = \mathbb{C}_1(0)[\Theta(t)]_+^{-\frac{\tau m}{\lambda m+2}} + \frac{\beta\sigma m}{\alpha(\sigma m+2)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{-\frac{r-2}{\lambda m+2}} +$$

$$+\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2][\Theta(t)]_+^{-\frac{\tau m+2}{\lambda m+2}} + \frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}, \qquad (6.27)$$

где введено обозначение

$$\mathbb{C}_1(0) = C_1(0) - \frac{\beta\sigma m}{\alpha(\sigma m+2)}\left[C_2(0) - \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right] -$$

$$-\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2]-\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2. \tag{6.28}$$

Теперь вернемся к формуле (5.3), связывающей вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ и скалярную функцию $C_1(t)$. Выясним при каких условиях выполняется алгебраическое уравнение (5.3). В итоге, (5.3) запишется

$$|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2[\Theta(t)]_+^{-\frac{2(\tau m+2)}{\lambda m+2}}=2\beta\mathbb{C}_1(0)[\Theta(t)]_+^{-\frac{r+\tau m}{\lambda m+2}}+$$

$$+\frac{2\beta^2\sigma m)}{\alpha(\sigma m+2}\left[C_2(0)-\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right][\Theta(t)]_+^{-\frac{2(r-1)}{\lambda m+2}}. \tag{6.29}$$

Очевидно, что равенство (6.29) будет иметь место в двух случаях.

II. Пусть $p\neq\frac{1}{2}$, тогда равенство (6.29) выполняется если

$$\mathbf{B}_1(0)=\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0),\mathbb{C}_1(0)=0,C_2(0)=\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

где $\mathbb{C}_1(0)$ определяется посредством (6.28).

III. Если $p=\frac{1}{2}$, то для выполнимости (6.29) достаточно, чтобы

$$|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2=\frac{2\beta^2\sigma m}{\alpha(\sigma m+2)}\left[C_2(0)-\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2\right]=0,\mathbb{C}_1(0)=0. \tag{6.30}$$

Тем самым, в случае II справедливо

Утверждение 10. *Пусть* $p\in\Re,p\neq0,p\neq\frac{1}{2},p\neq1,p\neq2,\lambda=\frac{2p}{2-m-2p}$, *тогда* $\tau=\frac{2}{2-m-2p},\sigma=-\frac{2p}{m},r=\frac{2(p-1)(2p+m-4)}{2-m-2p}$ *и система АДУ (3.4) имеет следующее решение*

$$A_1(t)=\beta[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}SE_mS',A_2(t)=\alpha[\Theta(t)]^{-1}SE_mS',$$

$$\mathbf{B}_1(t)=\frac{\beta}{\alpha}[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}\mathbf{B}_2(0),\mathbf{B}_2(t)=[\Theta(t)]^{-1}\mathbf{B}_2(0),$$

$$C_1(t)=\frac{\beta}{2\alpha^2}[\Theta(t)]_+^{-\frac{r}{\lambda m+2}}|\mathbf{B}_2(0)|^2,C_2(t)=\frac{1}{2\alpha}[\Theta(t)]^{-1}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

причем $(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(0)=0$.

Более того, в случае III имеет место

Теорема 9. *Если* $p=\frac{1}{2},\lambda=-\frac{1}{m-1},m\in\{1,2,\dots,n\},m\neq1$, *то* $\tau=-\frac{2}{m-1},\sigma=-\frac{1}{m}$ *и система АДУ (3.4) обладает решением*

$$A_1(t)=\beta[h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}}SE_mS',A_2(t)=\alpha[h(t)]^{-1}SE_mS',$$

$$\mathbf{B}_1(t)=[\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)][h(t)]_+^{\frac{2}{m-2}}+\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)[h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}},$$

$$\mathbf{B}_2(t)=[h(t)]^{-1}\mathbf{B}_2(0),$$

$$C_1(t)=\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2[h(t)]_+^{\frac{m+1}{m-2}}+$$

$$+\frac{1}{\alpha}[(\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0))-\frac{\beta}{\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2][h(t)]_+^{\frac{2}{m-2}}+\frac{\beta}{2\alpha^2}|\mathbf{B}_2(0)|^2[h(t)]_+^{-\frac{m-3}{m-2}},$$

$$C_2(t)=-\frac{\alpha}{2\beta^2}|\mathbf{B}_1(0)-\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0)|^2[h(t)]_+^{\frac{m}{m-2}}+\frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2[h(t)]^{-1}, \qquad (6.31)$$

причем

$$(I-E_m)S'\mathbf{B}_1(0)=(I-E_m)S'\mathbf{B}_2(0)=0, \qquad (6.32)$$

где $h(t)=1-\alpha\frac{m-2}{m-1}t;\mathbf{B}_1(0),\mathbf{B}_2(0)\in\Re^n$ *- постоянные векторы;* $\alpha,\beta\in\Re;\alpha\neq 0;\beta\neq 0.$

Доказательство этой теоремы опирается на результаты, полученные в настоящем разделе. В самом деле, при сделанных предположениях, вид функций $A_1(t),A_2(t),\mathbf{B}_2(t)$ непосредственно следует из утверждения 10. Кроме того, точно также, как и при доказательстве утверждения 10 можно показать справедливость цепочки равенств (6.32). Помимо этого, нетрудно убедиться, что из соотношений (6.30) следуют формулы (6.21). Наконец, из (6.25), (6.27), (6.26) получим вид функций $\mathbf{B}_1(t),C_1(t),C_2(t)$. Таким образом, матрицы $A_k(t)$, вектор-столбцы $\mathbf{B}_k(t)$ и скалярные функции $C_k(t)$ определяются согласно (6.31), (6.32), где $k=1,2$. Теорема доказана.

Отметим, что фактическим следствием утверждения 1 и теоремы 9 является следующий нетривиальный результат.

Теорема 10. *Уравнение нелинейной диффузии*

$$u_t=\nabla\cdot(u^{-1/(m-1)}\nabla u), u\stackrel{\triangle}{=}u(\mathbf{x},t):\Omega\times\overline{\Re}^+\to\Re^+,\mathbf{x}\in\Re^n,$$

обладает точным неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x},t)=\left[-\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_1(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_1(t))+C_1(t)\right]_+^{\frac{1}{2}}-\right.$$

$$-\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)\right]_+^{1-m}.$$

Причем функции $A_k(t), \mathbf{B}_k(t), C_k(t)$ определяются формулами (6.31), (6.32) где $k = 1, 2; m \in \{2, \ldots, n\}$.

Из теоремы 9 (при $m = 2$,) с использованием второго замечательного предела, вытекает важное, как нам представляется,

Следствие 2. Если $p = 1/2, \lambda = -1, m = 2$, то $\tau = -2, \sigma = -1/2, \xi = 1$ и система АДУ (3.4) имеет следующее решение

$$A_1(t) = \beta e^{-\alpha t} S E_2 S',\ A_2(t) = \alpha S E_2 S',$$

$$\mathbf{B}_1(t) = e^{-2\alpha t}[\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)\mathbf{B}_2(0) + \mathbf{B}_1(0)],\ \mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_2(0),$$

$$C_1(t) = \frac{1}{2\beta} e^{-3\alpha t} |\frac{\beta}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1)\mathbf{B}_2(0) + \mathbf{B}_1(0)|^2,$$

$$C_2(t) = -\frac{\alpha}{2\beta^2} e^{-2\alpha t} |\frac{\beta}{\alpha}\mathbf{B}_2(0) - \mathbf{B}_1(0)|^2 + \frac{1}{2\alpha}|\mathbf{B}_2(0)|^2,$$

причем $(I - E_2)S'\mathbf{B}_1(0) = (I - E_2)S'\mathbf{B}_2(0) = 0$, где $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in \Re^n; \alpha, \beta \in \Re; \alpha \neq 0; \beta \neq 0$.

Легко видеть, что полученные соотношения совпадают с формулами (6.6), (6.7).

Итак, полностью завершено исследование случая $p \neq 2$. Теперь перейдем к изучению системы АДУ (3.4) когда $p = 2$.

7. Существование решений системы АДУ (3.4)($p = 2$). Итак, пусть $p = 2$, тогда, прежде всего, отметим, что параметры $\xi, \tau, \sigma, \lambda$, входящие в систему АДУ (3.4) запишутся

$$\xi = \frac{2m}{m+2}, \tau = -\frac{2}{m+2}, \sigma = -\frac{4}{m}, \lambda = -\frac{4}{m+2}. \tag{7.1}$$

Причем заметим, что из (7.1) следует зависимость: $\sigma m + 4 = 0$, где $m = rank A_1(t); m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. С другой стороны, так как

$$\xi = p(\lambda + 1) - \lambda, \tau = \frac{\lambda}{p}, \sigma = \frac{\lambda p}{\xi}, \lambda = -\frac{4}{m+2},$$

то из соотношения $\sigma m + 4 = 0$ получим, что $p = 2$. Итак, из утверждения 6 следует, что вещественная симметричная матрица $A_1(t)$, определяемая согласно (5.4) удовлетворяет алгебраическому уравнению (3.4.7), если $rank A_1(t) = m = -2\xi/\lambda \in \{1, 2, \ldots, n\}$, где $\lambda \neq 0; \xi \neq 0$. Помимо этого, мы показали, что функции (3.24)-(3.26) являются решением задачи Коши (3.11)-(3.13). Тем самым, подставляя функции $A_1(t), A_2(t)$, определяемые посредством формул (5.4), (3.24), в матричное уравнение (3.4.4) и учитывая (7.1), после несложных преобразований, приходим к зависимости

$$\left[\dot{\varphi}(t) + \frac{2}{m+2}\varphi(t) trD(t)\right] E_m = -4\varphi(t)(I - E_m)D(t),$$

причем $trA_2(t) = trD(t) = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) = v(t)$, (см. (3.23), (3.24)), где $D(t)$ - матрица вида (3.22); $E_m = diag[1, \ldots, 1, 0, \ldots, 0] \in M_n(\Re)$ - матрица, в которой число единиц на диагонали равно $m \in \{1, 2, \ldots n\}$. В связи с этим, последнее соотношение распадается на два

$$\dot{\varphi}(t) = -\frac{2}{m+2}\varphi(t)\sum_{k=1}^{m} d_k(t),$$

$$0 = -4\varphi(t) d_k(t),\ k = m+1, \ldots, n.$$

Итак, $d_k(t) \equiv 0$ для $k = m+1, \ldots, n$ и $D(t) = diag[d_1(t), \ldots, d_m(t), 0, \ldots, 0]$. Так как $\lambda = -\frac{4}{m+2}$, то представление (3.19) приводит к зависимости $v(t) = \sum_{k=1}^{n} d_k(t) = -\frac{(m+2)}{4} \cdot \frac{\ddot{z}(t)}{\dot{z}(t)}$. Тем самым, справедливо равенство

$$2\dot{\varphi}(t)\dot{z}(t) = \varphi(t)\ddot{z}(t),$$

то есть $\varphi(t) = \varphi(0)[\dot{z}(t)]^{1/2}$, причем $\dot{z}(0) = 1$. В итоге получим, что

$$A_1(t) = \varphi(0)[\dot{z}(t)]_+^{1/2} S E_m S', A_1(0) = \varphi(0) S E_m S'.$$

Поэтому имеет место цепочка равенств

$$A_1(t) = \beta[\dot{z}(t)]_+^{1/2} S E_m S' = [\dot{z}(t)]_+^{1/2} A_1(0), \tag{7.2}$$

где $\beta = \varphi(0) \neq 0$. Кроме того, в рассматриваемом случае, задача Коши (3.10) запишется

$$\dot{z}(t) = \prod_{k=1}^{m} [1 - 2d_k(0)z(t)]^{\frac{2}{m+2}}, z(0) = 0, \tag{7.3}$$

где $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$. При этом собственные значения $d_k(t)$ симметричной матрицы $A_2(t)$ принимают вид

$$d_k(t) = \frac{d_k(0)}{1 - 2d_k(0)z(t)}\dot{z}(t), k = 1, 2 \ldots, m; d_k(t) \equiv 0, k = m + 1, \ldots, n. \qquad (7.4)$$

Итак, из (7.4) сразу следует, что $D(0)E_m = D(0)$, где
$D(0) = diag[d_1(0), \ldots, d_m(0), 0, \ldots, 0] \in M_n(\Re)$.

При этом, разумеется (см. формулы (3.14), (7.3)), в исследуемом случае, справедлива цепочка равенств

$$A_2(t) = \prod_{k=1}^{m}[1 - 2d_k(0)z(t)]^{\frac{2}{m+2}} SQ(t)D(0)S' = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S', \qquad (3.14)'$$

где

$$Q(t) = diag\left[[1 - 2d_1(0)z(t)]^{-1}, \ldots, [1 - 2d_m(0)z(t)]^{-1}, 1, \ldots, 1\right]. \qquad (3.17)'$$

Здесь, исходя из (3.17), мы учли (7.4). Тем самым, в силу соотношения (5.2) и формул (7.1), (7.2), (3.14) $'$ задача Коши (4.13) конкретизируется

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 2\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(t) - \frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t) +$$

$$+2\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}SE_mS'\mathbf{B}_2(t) - 4\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_2(t), \mathbf{B}_1(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_1(0), \qquad (7.5)$$

где $Q(t)$ определяется согласно (3.17) $'$. Принимая во внимание равенство (5.2) и вытекающее из него представление $(I - E_m)S'\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 0$, нетрудно убедиться, что уравнение (7.5) приводит к зависимостям

$$(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(t) = 0, (I - E_m)S'\mathbf{B}_2(0) = 0. \qquad (7.6)$$

В самом деле, из (7.5) следует, что $\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(t) = 0$. Так как $\beta \neq 0$ и функция $z(t) = const \neq 0$ не является решением задачи Коши (7.3), то приходим к справедливости формул (7.6). Теперь, воспользовавшись (7.6), несложно проверить, что задачу Коши (7.5) можно переписать в виде

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = 2\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(t) - \frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t) -$$

$$-2\beta[\dot{z}(t)]^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_2(t), \mathbf{B}_1(t)|_{t=0} = \mathbf{B}_1(0). \qquad (7.7)$$

где $\mathbf{B}_2(t)$ определяется посредством (3.15). Далее покажем, что вид матрицы $A_1(t)$, определяемой согласно (7.2), следует из формулы (4.30). В первую очередь, важно отметить, что выполняется очевидное соотношение $\Lambda(0) = \beta E_m$, которое следует из представлений $A_1(0) = \beta S E_m S'$, $A_1(0) = S\Lambda(0)S'$. При этом мы воспользовались тем фактом, что $\dot{z}(0) = 1$. Итак, с одной стороны, из (7.2) следует, что $u(t) = trA_1(t) = \beta m[\dot{z}(t)]_+^{1/2}$. С другой стороны, так как $p = 2$, то формула (4.23) приводит к зависимости $u_0(t) = [\dot{z}(t)]_+^{-1/2}u(t)$. В итоге получим, что $u_0(t) = \beta m$. Далее, так как $Q^{-1}(\eta) = [I - 2z(\eta)D(0)]$ (см. (3.21)), то непосредственными вычислениями нетрудно показать, что справедливо соотношение

$$\int_0^t \dot{z}(\eta)Q^{-1}(\eta)d\eta = z(t)[I - z(t)D(0)], \tag{7.8}$$

и, тем самым, имеет место цепочка равенств

$$A_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} S \left[-4\beta \int_0^t \dot{z}(\eta)Q^{-1}(\eta)D(0)d\eta + \Lambda(0)\right] Q^2(t)S' =$$

$$= \beta[\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} S \Big[E_m - 4z(t)[I - z(t)D(0)]D(0)\Big] Q^2(t)S' =$$

$$= \beta[\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} S E_m [I - 2z(t)D(0)]^2 Q^2(t)S' = \beta[\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} S E_m S'.$$

Что и требовалось показать.

Теперь, для исследуемого случая, вычислим вид вектор-столбца $\mathbf{B}_1(t)$, определяемого согласно (4.31). В результате тривиальных преобразований с использованием формулы (7.8) получим

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} S Q(t) \Big[2z(t)Q(t)\Lambda(0)S'\mathbf{B}_2(0) -$$

$$-4\beta z(t)[I - z(t)D(0)]Q(t)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\Big] =$$

$$= [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} S Q(t) \Big[-2\beta z(t)[I - 2z(t)D(0)]Q(t)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\Big] =$$

$$= [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} S Q(t) \left[-2\beta z(t)S'\mathbf{B}_2(0) + S'\mathbf{B}_1(0)\right] =$$

$$= [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} \left[S Q(t) S'\mathbf{B}_1(0) - 2\beta z(t) S Q(t) S'\mathbf{B}_2(0)\right].$$

При этом мы учли тождество (3.21). Итак, имеем

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}} \left[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2\beta z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right]. \tag{7.9}$$

Тем самым, с одной стороны, воспользовавшись соотношениями (3.19), (3.20) несложно проверить, что функции (3.15), (7.9) удовлетворяют задаче Коши (7.7). С другой стороны, нетрудно убедиться, что найденные выше функции (3.14) ′, (3.15), (7.2), (7.9) обращают в тождество и исходное уравнение (3.4.5). В самом деле, покажем это. Во-первых, дифференцируя (7.9) по времени и учитывая (3.19), (3.20), (7.9) имеем

$$\dot{\mathbf{B}}_1(t) = -\frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t) + 2[\dot{z}(t)]_+^{\frac{3}{2}}\Bigg[SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0) -$$

$$-\beta SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) - 2\beta z(t)SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)\Bigg], \tag{7.10}$$

где $v(t) = trA_2(t)$. Во-вторых, расписывая правую часть уравнения (3.4.5) и принимая во внимание формулы (3.14) ′, (3.15), (7.1), (7.2), (7.9), (7.10) приходим к справедливости цепочки равенств

$$2A_1(t)\mathbf{B}_2(t) + 2A_2(t)\mathbf{B}_1(t) + \tau v(t)\mathbf{B}_1(t) + \sigma u(t)\mathbf{B}_2(t) =$$

$$= 2\beta[\dot{z}(t)]_+^{\frac{3}{2}}SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) + 2[\dot{z}(t)]_+^{\frac{3}{2}}SQ(t)D(0)S'\times$$

$$\times\Bigg[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2\beta z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)\Bigg] - \frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t) -$$

$$-4\beta[\dot{z}(t)]_+^{\frac{3}{2}}SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) = -\frac{2}{m+2}v(t)\mathbf{B}_1(t) + 2[\dot{z}(t)]_+^{\frac{3}{2}}\times$$

$$\times\Bigg[SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0) - \beta SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) - 2\beta z(t)SQ^2(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)\Bigg] = \dot{\mathbf{B}}_1(t).$$

Здесь мы учли введенное выше обозначение: $u(t) = trA_1(t)$.

Теперь займемся вычислением скалярной функции $C_1(t)$. Используя представление $\Lambda(0) = \beta E_m$ и очевидные соотношения $\int_0^t \dot{z}(\eta)u_0(\eta)d\eta = \beta m z(t)$, $\int_0^t z(\eta)\dot{z}(\eta)u_0(\eta)$ $\frac{1}{2}\beta m z^2(t)$, легко устанавливается (проверяется вычислением), что формула (4.32) приводит к зависимости

$$C_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\Bigg[C_1(0) - 4\beta z(t)C_2(0) + 2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) -$$

$$-4\beta z^2(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\Big]. \tag{7.11}$$

Далее, в силу формул (3.14) $'$, (3.15), (3.16), (7.1), (7.2), (7.9) и с учетом, введенных выше, обозначений $v(t) = trA_2(t), u(t) = trA_1(t) = \beta m[\dot{z}(t)]_+^{1/2}$ уравнение (3.4.6) запишется

$$\dot{C}_1(t) = -\frac{2}{m+2}v(t)C_1(t) + 2[\dot{z}(t)]_+^{\frac{3}{2}}\Big[-2\beta C_2(0) + \Big(Q^2(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\Big) -$$

$$-2\beta z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) - 2\beta z(t)\Big(Q^2(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\Big)\Big].$$

Решение этого линейного неоднородного уравнения определяется методом вариации постоянной и имеет вид

$$C_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\Big[2\Big([\int_0^t \dot{z}(\eta)Q^2(\eta)d\eta]S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\Big) - \tag{7.12}$$

$$-4\beta\left(\left[\int_0^t z(\eta)\dot{z}(\eta)[Q(\eta)+Q^2(\eta)]d\eta\right]S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) - 4\beta z(t)C_2(0) + C_1(0)\Big].$$

Пользуясь равенством (3.17), с помощью несложных выкладок, нетрудно убедиться, что имеют место представления

$$\int_0^t \dot{z}(\eta)Q^2(\eta)d\eta = z(t)Q(t), \int_0^t z(\eta)\dot{z}(\eta)[Q(\eta)+Q^2(\eta)]d\eta = z^2(t)Q(t). \tag{7.13}$$

Итак, легко видеть, что объединяя (7.12), (7.13) приходим к справедливости формулы (7.11).

Тем самым, все подготовлено для того, чтобы определить достаточные условия, обеспечивающие выполнимость алгебраического уравнения (5.3). Осуществим намеченное. Учитывая, что имеют место представления (7.9), (7.11), а также тот факт, что $\varphi(t) = \beta[\dot{z}(t)]_+^{1/2}$, на основании (5.3) заключаем, что верно соотношение

$$C_1(0) - 4\beta z(t)C_2(0) + 2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) -$$

$$-4\beta z^2(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) = \frac{1}{2\beta}|Q(t)S'\mathbf{B}_1(0)|^2 - \tag{7.14}$$

$$-2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)\right) + 2\beta z^2(t)|Q(t)S'\mathbf{B}_2(0)|^2.$$

Заметим, прежде всего, что из (7.14) при $t = 0$ следует зависимость

$$C_1(0) = \frac{1}{2\beta}|S'\mathbf{B}_1(0)|^2 = \frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2. \tag{7.15}$$

При этом, мы приняли во внимание, что $SS' = I, z(0) = 0, Q(0) = I$. Итак, подставляя (7.15) в (7.14), очевидным образом группируя слагаемые, получим

$$-4\beta z(t)C_2(0) + 2z(t)\Big(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), [Q(t) + I]S'\mathbf{B}_2(0)\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\beta}\Big([Q^2(t) - I]S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_1(0)\Big) + 2\beta z^2(t)\Big(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), [Q(t) + 2I]S'\mathbf{B}_2(0)\Big).$$

Вернемся к соотношению (3.21), из которого следует, что $Q(t) - I = 2z(t)Q(t)D(0)$. В результате, с учетом того, что $z(t) \neq 0$, просто проверяется, справедливость равенства

$$\begin{aligned} &-4\beta C_2(0) + 2\Big(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), [Q(t) + I]S'\mathbf{B}_2(0)\Big) = \\ &= \frac{1}{\beta}\Big(Q(t)[Q(t) + I]D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_1(0)\Big) + \\ &+ 2\beta z(t)\Big(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), [Q(t) + 2I]S'\mathbf{B}_2(0)\Big). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Теперь наша цель - определить $C_2(0)$. В связи с этим, поскольку $Q(0) = I, z(0) = 0$, то из (7.16) при $t = 0$ следует, что

$$\begin{aligned} C_2(0) &= \frac{1}{\beta}\Big[(S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)) - \frac{1}{2\beta}\left(D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_1(0)\right)\Big] = \\ &= \frac{1}{\beta}\Big[(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)) - \frac{1}{2\beta}\left(D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_1(0)\right)\Big]. \end{aligned} \tag{7.17}$$

Итак, объединяя (7.16), (7.17) и должным образом группируя слагаемые, приходим к соотношению

$$2\Big(S'\mathbf{B}_1(0), Q(t)[Q(t) + I]S'\mathbf{B}_2(0)\Big) - 4\left(S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) =$$

$$= \frac{1}{\beta}\Big(Q(t)[Q(t) + I]D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_1(0)\Big) - \frac{2}{\beta}\Big(D(0)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_1(0)\Big) +$$

$$+ 2\beta z(t)\Big(S'\mathbf{B}_2(0), Q(t)[Q(t) + 2I]S'\mathbf{B}_2(0)\Big).$$

Тем самым, легко проверить справедливость следующего выражения

$$2\Bigg(S'\mathbf{B}_1(0), [Q(t)(Q(t)+I)-2I]S'\mathbf{B}_2(0)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{\beta}\Bigg(S'\mathbf{B}_1(0), [Q(t)(Q(t)+I)-2I]D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg)+$$

$$+2\beta z(t)\Bigg(S'\mathbf{B}_2(0), Q(t)[Q(t)+2I]S'\mathbf{B}_2(0)\Bigg).$$

Далее, очевидно, что в силу (3.21) имеет место цепочка равенств

$$Q(t)\,(Q(t)+I)-2I = (Q(t)-I)\,[Q(t)+2I] = 2z(t)Q(t)[Q(t)+2I]D(0).$$

В соответствие с ней, предыдущее соотношение запишется

$$2\,(S'\mathbf{B}_1(0), H(t)D(0)S'\mathbf{B}_2(0)) = \frac{1}{\beta}\left(S'\mathbf{B}_1(0), H(t)D^2(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right)+$$

$$+\beta\,(S'\mathbf{B}_2(0), H(t)S'\mathbf{B}_2(0))\,, \tag{7.18}$$

где введено обозначение $H(t) = Q(t)[Q(t)+2I]$. Умножая обе части (7.18) на $\beta \neq 0$ и принимая во внимание тот факт, что матрица $H(t) \neq 0$, приходим к формуле

$$|\beta S'\mathbf{B}_2(0) - D(0)S'\mathbf{B}_1(0)|^2 = 0.$$

При этом мы учли, что $z(t) \neq 0$. Итак, в дальнейшем, не теряя общности, будем считать, что справедлива зависимость

$$\mathbf{B}_2(0) = \frac{1}{\beta}SD(0)S'\mathbf{B}_1(0). \tag{7.19}$$

После этого, ближайшая наша задача - выяснить, с учетом (7.19), к какой зависимости приводит вторая из формул (7.6). Однако, прежде чем приступить к намеченному, поясним смысл алгебраических соотношений

$$(I-E_m)S'\mathbf{B}_k(0) = 0, k = 1, 2, \tag{7.20}$$

встречающихся, как правило, в большинстве разделов этой работы. С этой целью перепишем (7.20) в виде $\mathbf{B}_k(0) = SE_mS'\mathbf{B}_k(0)$, где $S \in M_n(\Re)$ - вещественная ортогональная матрица; $\mathbf{B}_k(0) \in M_{n,1}(\Re)$ - вектор-столбцы; $E_m =$

$diag[1,\ldots,1,0,\ldots,0] \in M_n(\Re)$ - матрица, в которой число единиц на диагонали равно $m \in \{1,2,\ldots,n\}$. Далее, введем обозначение $P_m = SE_mS'$, где S, S' - невырожденные (неособые) матрицы. Тем самым, $\mathbf{B}_k(0) = P_m\mathbf{B}_k(0), P_m^2 = P_m$, то есть $P_m \in M_n(\Re)$ - вещественная симметричная идемпотентная матрица. Причем P_m всегда можно привести к диагональному виду и, кроме того, $trP_m = m$. Помимо этого, хорошо известно, что вещественная симметричная матрица P_m ранга m является идемпотентной тогда и только тогда, когда m ее собственных значений равны единице, а остальные $(n-m)$ равны нулю. Более того, согласно [2] евклидово пространство $\Re^n$ представимо в виде прямой суммы подпространств: области значений и ядра (нуль-пространства) любой вещественной симметричной матрицы. Символически это записывается следующим образом: $\Re^n = L_0 \bigoplus L_1$, где $L_0 = rangeP_m, L_1 = kerP_m$- соответственно область значений и ядро матрицы P_m. Очевидно, что векторы $\mathbf{B}_k(0) \in L_0$, где $k = 1,2$.

С другой стороны, вводя в рассмотрение вектор-столбцы
$\hat{\mathbf{B}}_k(0) = E_mS'\mathbf{B}_k(0)$ получим, что $\mathbf{B}_k(0) = S\hat{\mathbf{B}}_k(0)$. Ясно, что $\hat{\mathbf{B}}_k(0)$ принадлежит множеству $\mathcal{L}_m = \{x \in \Re^n : x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$.

Итак, для каждого фиксированного k алгебраическое соотношение (7.20) выполняется тогда и только тогда, когда существует вектор-столбец $\hat{\mathbf{B}}_k(0) \in \mathcal{L}_m$ такой, что $\mathbf{B}_k(0) = S\hat{\mathbf{B}}_k(0)$.

Далее, вернемся ко второму из соотношений (7.6). Легко видеть, что исходя из зависимости $(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(0) = 0$ и принимая во внимание формулу (7.19) имеем

$$(I - E_m)S'\mathbf{B}_2(0) = \frac{1}{\beta}D(0)(I - E_m)S'\mathbf{B}_1(0) = 0.$$

Так как $D(0) \neq 0$, то $(I - E_m)S'\mathbf{B}_1(0) = 0$. Этот факт согласуется с алгебраическим соотношением (5.2) при $t = 0$. Далее, используя (7.19), нетрудно проверить, что выражение (7.18) выполняется тождественно. Теперь, с учетом зависимости (7.19) выясним, что дает равенство (7.17). Оказывается, что справедлива цепочка равенств

$$C_2(0) = \frac{1}{2\beta^2}\left(S'\mathbf{B}_1(0), D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right) = \tag{7.21}$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\left(\mathbf{B}_1(0), SD(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right) = \frac{1}{2\beta}\left(\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0)\right).$$

Обратимся теперь к формуле (3.16) и найдем явный вид $_2(t)$. Несложно убедиться, что при выполнении условий (3.14), (3.21), (7.19), (7.21) скалярная функция $C_2(t)$ принимает вид

$$C_2(t) = \frac{1}{2\beta^2}\left(\mathbf{B}_1(0), A_2(t)\mathbf{B}_1(0)\right). \tag{7.22}$$

В самом деле, легко проверить, что в этом случае имеет место цепочка равенств

$$C_2(t) = \dot{z}(t)\Bigg[\frac{1}{2\beta^2}\Bigg(\mathbf{B}_1(0), SD(0)S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg) +$$

$$+\frac{1}{\beta^2}z(t)\Bigg(Q(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\dot{z}(t)\Bigg[\Bigg(\mathbf{B}_1(0), SD(0)S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg) + 2z(t)Q(t)\Bigg(\mathbf{B}_1(0), SD^2(0)S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg)\Bigg] =$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\dot{z}(t)\Bigg(\mathbf{B}_1(0), S[I + 2z(t)Q(t)D(0)]D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg) =$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\dot{z}(t)\Bigg(\mathbf{B}_1(0), SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\Bigg) = \frac{1}{2\beta^2}\Bigg(\mathbf{B}_1(0), A_2(t)\mathbf{B}_1(0)\Bigg).$$

Таким образом, справедливо выражение (7.22). Помимо этого, напомним, что матрицы $A_2(t), A_1(t)$ определяются соответственно формулами (3.14), (7.2).

Выше (см. (7.9)), нами была найдена функция $\mathbf{B}_1(t)$. Стартуя с (7.9) и используя (3.21), (7.19) нетрудно установить, что вектор-столбец $\mathbf{B}_1(t)$ запишется

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_1(0). \tag{7.23}$$

Действительно, непосредственно проверяется, что

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\left[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2z(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right] =$$

$$= [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}S\left[Q(t) - 2z(t)Q(t)D(0)\right]S'\mathbf{B}_1(0) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_1(0).$$

Значит, в самом деле, выполняется предъявленная формула (7.23). Теперь, принимая во внимание (7.23), заключаем, что если имеет место зависимость $(I - E_m)S'\mathbf{B}_1(0) = 0$, то справедливо алгебраическое уравнение (5.2).

Наконец, вернемся к соотношению (7.11). Покажем, что прямые вычисления с применением формул (3.21), (7.15), (7.19), (7.21) приводят (7.11) к виду

$$C_1(t) = \frac{1}{2\beta}[\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}|\mathbf{B}_1(0)|^2. \tag{7.24}$$

В самом деле, оказывается, что в изучаемом случае выполняется цепочка равенств

$$C_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2 - \frac{2}{\beta}z(t)\left(S'\mathbf{B}_1(0), D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right) + \right.$$

$$+\frac{2}{\beta}z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right) -$$

$$\left. -\frac{4}{\beta}z^2(t)\left(D(0)S'\mathbf{B}_1(0), Q(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right)\right] =$$

$$= [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2 - \left(S'\mathbf{B}_1(0), \frac{2}{\beta}z(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right) + \right.$$

$$\left. + \left(S'\mathbf{B}_1(0), \frac{2}{\beta}z(t)Q(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right) - \left(S'\mathbf{B}_1(0), \frac{4}{\beta}z^2(t)Q(t)D^2(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right)\right] =$$

$$= [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{2\beta}|\mathbf{B}_1(0)|^2 + \left(S'\mathbf{B}_1(0), \frac{2}{\beta}z(t)[Q(t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. -2z(t)Q(t)D(0) - I]D(0)S'\mathbf{B}_1(0)\right)\right] = \frac{1}{2\beta}[\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}|\mathbf{B}_1(0)|^2.$$

При этом, мы учли, что $Q(t) - 2z(t)Q(t)D(0) - I = 0$, (см. (3.21)). Итак, как и следовало ожидать, $C_1(t)$ определяется согласно (7.24). В заключение отметим, что из теоремы 3 и утверждения 3 следует соответственно симметричность предъявленных матриц $A_2(t), A_1(t)$ для всех t из областей их определения.

Таким образом, суммируя проведенные в этом разделе исследования, приходим к одному из основных результатов настоящей работы.

Теорема 11. *Пусть $p = 2$ и заданы вещественные симметричные матрицы $A_1(0), A_2(0) \in M_n(\Re)$ со свойством (4.7), вектор-столбцы $\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_2(0) \in M_{n,1}(\Re)$, связанные соотношением (7.19) и скаляры $C_1(0), C_2(0) \in \Re$, определяемые согласно (7.15), (7.21). Пусть, помимо этого, функция $z(t)$ является вещественным решением задачи Коши (7.3). Тогда задача Коши (3.11)-(3.13),* *(4.2), (4.13), (4.18), нагруженная алгебраическими уравнениями (3.4.7)-(3.4.9) обладает вещественным решением*

$$A_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)D(0)S' = \dot{z}(t)SQ(t)S'A_2(0), \tag{7.25}$$

$$\mathbf{B}_2(t) = \dot{z}(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0) = \tag{7.26}$$

$$= \frac{1}{\beta}\dot{z}(t)SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0) = \frac{1}{\beta}A_2(t)\mathbf{B}_1(0),$$

$$C_2(t) = \dot{z}(t)C_2(0) + z(t)\left(\mathbf{B}_2(0), \mathbf{B}_2(t)\right) =$$

$$= \dot{z}(t)\Bigg[C_2(0) + z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\Bigg] = \tag{7.27}$$

$$= \frac{1}{2\beta^2}\dot{z}(t)\left(SQ(t)D(0)S'\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_1(0)\right) = \frac{1}{2\beta^2}\left(A_2(t)\mathbf{B}_1(0), \mathbf{B}_1(0)\right),$$

$$A_1(t) = \beta[\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}SE_mS' = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}A_1(0), \tag{7.28}$$

$$\mathbf{B}_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\Bigg[SQ(t)S'\mathbf{B}_1(0) - 2\beta z(t)SQ(t)S'\mathbf{B}_2(0)\Bigg] =$$

$$= [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\mathbf{B}_1(0), \tag{7.29}$$

$$C_1(t) = [\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}\Bigg[C_1(0) - 4\beta z(t)C_2(0) + 2z(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_1(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right) -$$

$$-4\beta z^2(t)\left(Q(t)S'\mathbf{B}_2(0), S'\mathbf{B}_2(0)\right)\Bigg] = \frac{1}{2\beta}[\dot{z}(t)]_+^{\frac{1}{2}}|\mathbf{B}_1(0)|^2. \tag{7.30}$$

Кроме того, $A_1(t), A_2(t)$ *- вещественные симметричные матрицы, соответственно, для всех* $t \in domain A_1(t), t \in domain A_2(t)$*. Здесь*

$$Q(t) = diag\Bigg[[1 - 2d_1(0)z(t)]^{-1}, \ldots, [1 - 2d_m(0)z(t)]^{-1}, 1, \ldots, 1\Bigg], \tag{7.31}$$

$$D(0) = diag[d_1(0), \ldots, d_m(0), 0, \ldots, 0], \tag{7.32}$$

$d_l(0) \in \Re$ *- собственные значения матрицы* $A_2(0); d_l \neq 0; l = 1, 2, \ldots m.$

Объединяя утверждение 1 и теорему 11 заключаем, что справедлива

Теорема 12. *Уравнение быстрой диффузии*

$$u_t = \nabla \cdot (u^{-4/(m+2)}\nabla u), u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n, \tag{7.33}$$

имеет точное неавтомодельное, анизотропное по пространственным переменным, явное неотрицательное решение

$$u(\mathbf{x},t)=\left[-\frac{4}{m+2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_1(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_1(t))+C_1(t)\right]^2-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{m+2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_2(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_2(t))+C_2(t)\right]\right]_+^{-\frac{m+2}{4}}. \tag{7.34}$$

При этом функции $A_k(t),\mathbf{B}_k(t),C_k(t)$ определяются формулами (7.25)-(7.32), где $m\in\{1,2,\dots,n\};k=1,2$.

Пример 2. Уравнение нелинейной диффузии

$$u_t=\Delta\ln u, u=u(x,y,z,t), \tag{7.35}$$

обладает точным неавтомодельным, анизотропным по пространственным переменным, явным неотрицательным решением

$$u(x,y,z,t)=\left[\frac{2\,\mathrm{sn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)\,\mathrm{cn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}{\mathrm{dn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}\left[\sqrt{c_2-c_1}x^2-\right.\right.$$

$$-\frac{2c_3}{k}x-\frac{\mathrm{sn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}{\mathrm{dn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}\left(\frac{c_1}{\sqrt{c_2-c_1}}y^2+2c_4ky\right)+$$

$$+\mathrm{sn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)\left(\sqrt{c_2-c_1}z^2-\frac{2c_5}{k}z\right)+ \tag{7.36}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{c_2-c_1}\,\mathrm{cn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}\left(\frac{c_3^2}{k^2}-c_4^2\frac{\mathrm{sn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}{\mathrm{dn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{c_5^2}{k^2}\,\mathrm{sn}^4(\sqrt{c_2-c_1}t,k)\right)-\frac{2c_6}{k}\frac{\mathrm{sn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}{\mathrm{cn}^2(\sqrt{c_2-c_1}t,k)}\right]^{-1}\right]_+.$$

Здесь $\mathrm{sn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k),\mathrm{cn}(\sqrt{c_2-c_1}t,k)$ - эллиптический синус и косинус Якоби с модулем $k=\sqrt{c_2/(c_2-c_1)}$, $c_i\in\Re,c_2>c_1,c_2\geq 0,i=1,2,\dots,6$.

Рассмотрим случаи вырождения эллиптических функций в тригонометрические и гиперболические. Если $c_2=0$, тогда модуль $k=0$ и из формулы (7.36) получим точное решение в тригонометрических функциях

$$u(x,y,z,t)=\left[2\sin(\sqrt{-c_1}t)\cos(\sqrt{-c_1}t)\left[\sqrt{-c_1}x^2-2c_3x+\right.\right.$$

$$+\sin^2(\sqrt{-c_1}t)\left(\frac{-c_1}{\sqrt{-c_1}}y^2-2c_4y+\sqrt{-c_1}z^2-2c_5z\right)+ \tag{7.37}$$

$$+\frac{c_3^2}{\sqrt{-c_1}\cos^2(\sqrt{-c_1}t)}-\frac{(c_4^2+c_5^2)}{\sqrt{-c_1}}\frac{\sin^4(\sqrt{-c_1}t)}{\cos^2(\sqrt{-c_1}t)}-2c_6\operatorname{tg}^2(\sqrt{-c_1}t)\Bigg]^{-1}\Bigg]_+.$$

Отметим, что при $c_1=-1,\ c_3=c_4=c_5=c_6=0$ из (7.37) получим решение

$$u(x,y,z,t)=\left[\frac{2\sin t\cos t}{x^2+\sin^2 t(y^2+z^2)}\right]_+,$$

приведенное в [3]. Полагая $c_1=0$, получим $k=1$ и из выражения (7.36) вытекает точное решение в гиперболических функциях

$$u(x,y,z,t)=\Bigg[\operatorname{th}(\sqrt{c_2}t)\Bigg[\sqrt{c_2}x^2-2c_3x-2c_4\operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t)y+$$

$$+\operatorname{th}^2(\sqrt{c_2}t)\left(\sqrt{c_2}z^2-2c_5z\right)+\frac{c_3^2}{\sqrt{c_2}}\operatorname{ch}^2(\sqrt{c_2}t)- \tag{7.38}$$

$$-\frac{c_4^2}{\sqrt{c_2}}\operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t)\operatorname{ch}^2(\sqrt{c_2}t)-\frac{c_5^2}{\sqrt{c_2}}\frac{sh^4(\sqrt{c_2}t)}{ch^2(\sqrt{c_2}t)}-2c_6\operatorname{sh}^2(\sqrt{c_2}t)\Bigg]^{-1}\Bigg]_+,$$

которое является довольно интересным, так как при $c_4=0$ оно вырождается в двумерное. Например, если $c_2=1, c_3=c_4=c_5=0, c_6=-1/2$ то из (7.38) следует точное решение

$$u(x,y,t)=\left[\frac{2\operatorname{th}t}{x^2+y^2\operatorname{th}^2 t+\operatorname{sh}^2 t}\right]_+$$

уравнения (7.35) для двух пространственных переменных.

В заключение, приведем краткую сводку основных результатов в терминах параметров λ, p и $m\in\{1,2,\dots,n\}$.

1. Уравнение нелинейной диффузии

$$u_t=\nabla\cdot(u^\lambda\nabla u), u\triangleq u(\mathbf{x},t):\Omega\times\overline{\Re}^+\to\Re^+, \mathbf{x}\in\Re^n, \lambda\in\Re, \tag{7.39}$$

обладает точным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x},t)=\left[\lambda\left[\frac{1}{2}\left(\mathbf{x},A_2(t)\mathbf{x}\right)+(\mathbf{x},\mathbf{B}_2(t))+C_2(t)\right]\right]_+^{1/\lambda},$$

для любого параметра $\lambda\neq 0$, при этом функции $A_2(t), \mathbf{B}_2(t), C_2(t)$ определяются формулами (3.14)-(3.17).

2. Уравнение нелинейной диффузии (7.39) обладает точным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x},t)=\left[-\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_1(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_1(t))+C_1(t)\right]_+^{\frac{1}{2}}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{m-1}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_2(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_2(t))+C_2(t)\right]\right]_+^{1-m},$$

для $\lambda=-\frac{1}{m-1}, m\in\{2,\ldots,n\}$ и $p=1/2$, где функции $A_k(t),\mathbf{B}_k(t),C_k(t)$, $(k=1,2)$ выражаются формулами (6.31), (6.32).

3. Уравнение нелинейной диффузии (7.39) обладает точным неотрицательным решением

$$u(\mathbf{x},t)=\left[-\frac{4}{m+2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_1(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_1(t))+C_1(t)\right]^2-\right.$$

$$\left.-\frac{4}{m+2}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_2(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_2(t))+C_2(t)\right]\right]_+^{-\frac{m+2}{4}},$$

для $\lambda=-\frac{4}{m+2}, m\in\{1,\ldots,n\}$ и $p=2$, при этом функции $A_k(t),\mathbf{B}_k(t),C_k(t)$, $(k=1,2)$ определяются формулами (7.25)-(7.32).

References

[1] Рудых Г.А., Семенов Э.И. Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии.I. //Сиб.матем. журн. (в печати).

[2] Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. М.: Наука, 1969.

[3] Пухначев В.В. Многомерные точные решения уравнения нелинейной диффузии //Прикл.механика и технич.физика. 1995. Т.36, N 2. С.23-31.

Рудых Г.А., Семенов Э.И.
Россия, 664033, г.Иркутск, ул. Лермонтова, 134,
Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН,
отдел динамики систем,
(395-2) 31-14-09,
E-mail: rudykh@icc.ru., semenov@icc.ru.

УДК 517.956+517.958

Рудых Г.А., Семенов Э.И.**Существование и построение анизотропных решений многомерного уравнения нелинейной диффузии. II.**

Для многомерного уравнения нелинейной диффузии

$$u_t = \nabla \cdot (u^\lambda \nabla u), u \stackrel{\triangle}{=} u(\mathbf{x}, t) : \Omega \times \overline{\Re}^+ \to \Re^+, \mathbf{x} \in \Re^n,$$

предложена оригинальная форма решений

$$u(\mathbf{x}, t) = \left[\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_1(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_1(t)) + C_1(t)]_+^p + \lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x}, A_2(t)\mathbf{x}) + (\mathbf{x}, \mathbf{B}_2(t)) + C_2(t)] \right]_+^{1/\lambda},$$

с помощью которой исследование исходного уравнения сведено к изучению конечномерной, переопределенной (число уравнений превосходит число искомых функций, подлежащих определению) системе алгебро-дифференциальных уравнений (АДУ). Здесь $A_k(t)$ - вещественные симметричные матрицы с элементами $a_{kij}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+), \mathbf{B}_k(t)$ - вектор-столбцы с компонентами $b_{ki}(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ и $C_k(t) \in C^1(\overline{\Re}^+)$ - скалярные функции; $\Omega \subset \Re^n$ - ограниченная область; $\Re^+ = (0, \infty); \lambda, p \in \Re; \lambda, p \neq 0; k = 1, 2.$

В силу специфики задачи, исследование предъявленной системы АДУ распадается на два независимых случая: $p \neq 2, p = 2$. При определенных предположениях доказано, что задача Коши для изучаемой системы АДУ обладает решением, отличным от тривиального как при $p \neq 2$, так и $p = 2$. На основе этого результата, найдено многопараметрическое семейство новых точных, неавтомодельных, анизотропных по пространственным переменным, явных неотрицательных решений исследуемого уравнения. Основное внимание уделено изучению уравнений быстрой $(-1 < \lambda < 0)$ и предельной $(\lambda = -1, n = 2)$ диффузии.

Библиография: 3 наименования.

Рудых Геннадий Алексеевич
Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН,
664033, г.Иркутск, ул. Лермонтова, 134
тел.раб. (395-2) 31-14-09
тел.дом. (395-2) 46-76-65
E-mail: rudykh@icc.ru.

Семенов Эдуард Иванович
Институт динамики систем и теории управления (ИДСТУ) СО РАН,
664033, г.Иркутск, ул. Лермонтова, 134
тел.раб. (395-2) 31-14-09
тел.дом. (395-2) 33-51-17
E-mail: semenov@icc.ru.

Переписку вести с Рудых Г.А.

Rudykh G.A., Semenov E.I. **Existence and construction of anisotropic solutions of multi-dimensional nonlinear diffusion equation.II.**

The new form of solutions

$$u(\mathbf{x},t)=\Bigg[\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_1(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_1(t))+C_1(t)]_+^p+$$

$$+\lambda[\frac{1}{2}(\mathbf{x},A_2(t)\mathbf{x})+(\mathbf{x},\mathbf{B}_2(t))+C_2(t)]\Bigg]_+^{1/\lambda},$$

for multi-dimensional nonlinear diffusion equation

$$u_t=\nabla\cdot(u^\lambda\nabla u), u\triangleq u(\mathbf{x},t):\Omega\times\overline{\Re}^+\to\Re^+, \mathbf{x}\in\Re^n,$$

is given. We reduce the investigation of original equation to the finite-dimensional system of algebro-differential equations (ADE) using this form. Here $A_k(t)$ are real symmetrical matrixes with elements $a_{kij}(t)\in C^1(\overline{\Re}^+), \mathbf{B}_k(t)$ are vector-columns with components $b_{ki}(t)\in C^1(\overline{\Re}^+)$ and $C_k(t)\in C^1(\overline{\Re}^+)$ are scalar functions; $\Omega\subset\Re^n$ is bounded domain; $\Re^+=(0,\infty); \lambda,p\in\Re; \lambda,p\neq 0; k=1,2$. Thanks of problem species, the study of present system of ADE is decomposed onto the two dispoint cases: $p\neq 2, p=2$. It is proved that the Cauchy problem for the system of ADE possesses a solution distincted from trivial at $p\neq 2, p=2$. On the basis of this result the multiparametrical family of new exact, non-self-similar, anisotropic on space variables, explicit non-negative solutions of the study equation is constructed. The principal attention is directed to the investigation of fast diffusion $(-1<\lambda<0)$ limit $(\lambda=-1, n=2)$ diffusion equation.
References: 3.